Marcelo Rufino de Oliveira

COLEÇÃO ELEMENTOS DA MATEMÁTICA

$$w_k = z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i.\text{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

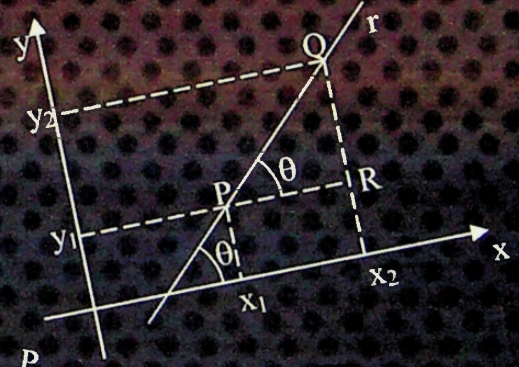
$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

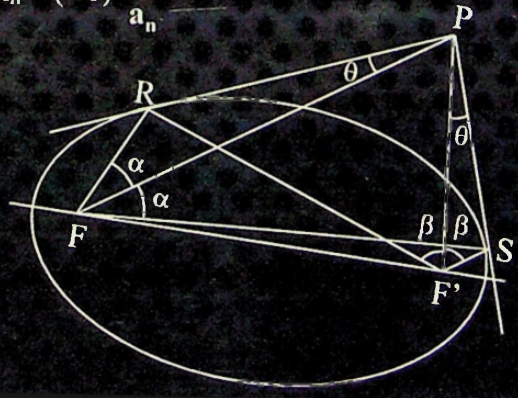
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

...

$$x_1x_2x_3\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$





4

NÚMEROS COMPLEXOS
POLINÔMIOS
GEOMETRIA ANALÍTICA

Marcelo Rufino de Oliveira
Com formação pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)
Coordenador das Turmas Militares do Colégio Ideal
Professor de Matemática das Turmas Militares do Colégio Ideal
Coordenador Regional da Olimpíada Brasileira de Matemática

NÚMEROS COMPLEXOS
POLINÔMIOS
GEOMETRIA ANALÍTICA

1ª edição (2013)

Copyright © 2013 by marcelo rufino de oliveira

Todos os direitos desta edição estão reservados
à Marcelo Rufino de Oliveira
Belém – Pará – Brasil
E-mail: marcelorufino@hotmail.com

Ilustração da Capa
MARCELO RUFINO DE OLIVEIRA

LOUDES PACHECO
Ficha Catalográfica

F48c.....Oliveira, Marcelo Rufino de

Coleção elementos da matemática, 4: números complexos, polinômios, geometria analitica / Marcelo Rufino de Oliveira. – 1 ed. - Belém: 2013.
p.

ISBN: 978-85-8917-136-6

1. Matemática (Ensino Médio) 2. Matemática (Ensino Médio) – numeros complexos 3. Matemática (Ensino Médio) – polinômios 3 Matemática (Ensino Médio) – geometria analitica. II. Titulo. III. Titulo: Números Complexos. IV. Titulo: Polinômios. V. Titulo: Geometria Analitica.

CDD. 510.7

APRESENTAÇÃO À 1ª EDIÇÃO

Este é o volume quatro da **Coleção Elementos da Matemática**, direcionada para alunos e professores que desejem aprofundar seus conhecimentos em assuntos da base comum do Ensino Médio. Os autores da coleção trabalham há muitos anos, na cidade de Belém, com preparação de alunos que desejam prestar os vestibulares do Colégio Naval, Epcar, ITA, IME, AFA, Escola Naval e EFOMM. Todos os volumes da coleção foram escritos com o objetivo de auxiliar os estudos dos alunos que desejam ingressar em alguma instituição militar. Basicamente todo o conteúdo dos livros da coleção é baseado nas notas de aula dos autores, incluindo as demonstrações e os exemplos resolvidos.

A coleção Elementos da Matemática é organizada da seguinte maneira:

Volume 0 – Álgebra, Proporção e Frações
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 1 – Conjuntos, Funções, Exponencial, Logaritmo e Aritmética
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 2 – Geometria Plana
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 3 – Seqüências, Combinatória, Probabilidade, Matrizes e Trigonometria
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Manoel Leite Carneiro

Volume 4 – Números Complexos, Polinômios e Geometria Analítica
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 5 – Geometria Espacial e Cálculo
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

O volume 4 aborda os assuntos de Números Complexos, Polinômios, Equações Algébricas, Transformadas Algébricas e toda a Geometria Analítica (estudo do ponto, reta, circunferência e cônicas). Todos os assuntos abordados neste volume, em especial números complexos e cônicas, quando cobrados em provas de concursos militares, apresentam alto grau de dificuldade, motivo pelo qual este quarto volume provavelmente é o que possui maior grau de aprofundamento de toda a coleção. Caso encontre dificuldades em acompanhar algum tópico, o leitor pode ficar a vontade em buscar textos mais acessíveis, de modo a formar melhor sua base sobre determinado assunto contido neste volume. Apesar deste maior nível de aprofundamento, é importante deixar explícito que Elementos da Matemática é uma coleção voltada para concursos militares e não olimpíadas de matemática. Ao longo de toda a coleção alguns exercícios resolvidos e muitos problemas propostos foram retirados de provas de olimpíadas de matemática, porém foi tomado o cuidado de escolher questões que se encaixem no estilo das provas dos concursos militares.

Determinados tópicos não comumente encontrados em livros de ensino médio estão incorporados a esta obra, tais como a interpretação geométrica dos números complexos, fórmula de Euler, aplicação de números complexos em somatórios, resolução de equações de 3º grau, dispositivo Delta, teorema de Poncelet e seções cônicas.

Ainda em sua 1ª edição é normal que alguns deslizes possam ter sido cometidos, sobretudo em alguns gabaritos e erros de digitação. De antemão, os autores já agradecem aos leitores que puderem indicar tais erros, de modo a serem corrigidos nas futuras edições.

O autor

Índice

Capítulo 1. Números Complexos

1. Origem dos Números Complexos 1
2. Unidade Imaginária 1
3. Conjunto dos Números Complexos 1
4. Conjugado de um Número Complexo 7
5. Potências de i 9
6. O Pano de Argand-Gauss 12
7. Forma Trigonométrica 18
8. Potenciação de um Número Complexo (1ª Lei de Moivre) 25
9. Radiciação de um Número Complexo (2ª Lei de Moivre) 30
10. Interpretação Geométrica 35
11. Fórmula de Euler 43
12. Somatório e Identidades 45

Exercícios 48

Capítulo 2. Polinômios

1. Definição 63
2. Valor Numérico 63
3. Raiz de um Polinômio 66
4. Soma de Multiplicação de Polinômios 69
5. Grau de um Polinômio 72
6. Igualdade entre Polinômios 74
7. Divisão de Polinômios 77
8. Teorema do Resto 86
9. Teorema de D'Alembert 88
10. Algoritmo de Briot-Ruffini 91
11. Teoremas sobre Divisão de Polinômios 94

Exercícios 95

Capítulo 3. Equações Algébricas

1. Definições 105
2. Teorema Fundamental da Álgebra 106
3. Teorema da Decomposição 106
4. Multiplicidade 109
5. Teorema das Raizes Conjugadas 112
6. Relações de Girad 118
7. Teorema de Bolzano 127
8. Teoremas sobre Raizes Inteiras e Racionais 129
9. Resolução de Equações de 3º Grau 132
10. Relações de Newton 133

Exercícios 135

Capítulo 4. Transformadas Algébricas

1. Transformada Multiplicativa 153
2. Transformada Aditiva 154
3. Transformada Recíproca 156
4. Equações Recíprocas 158

Exercícios 164

Capítulo 5. Ponto e Reta

ESTUDO DO PONTO

1. Plano Cartesiano 167
2. Distância entre Dois Pontos 168
3. Ponto Médio 170
4. Razão de Secção 172
5. Três Pontos Alinhados 173

ESTUDO DA RETA

6. Equação Geral da Reta 174
7. Equação Reduzida da Reta 175
8. Determinação da Equação de uma Reta 178
9. Equação Segmentária da Reta 179
10. Equação Paramétrica da Reta 179
11. Posições Relativas de duas Retas 180
12. Distância entre Ponto e Reta 189
13. Distância entre Retas Paralelas 192
14. Ângulos entre Duas Retas 193
15. Bissetrizes entre duas Retas 195
16. Área de Polígonos 197
17. Inequações do 1º Grau 200
18. Pontos Clássicos de um Triângulo 203

Exercícios 210

Capítulo 6. Circunferência

. Equação Reduzida 223
2. Equação Normal 223
3. Reconhecimento 224
4. Posições Relativas entre Ponto e Circunferência 228
5. Posições Relativas entre Reta e Circunferência 229
6. Inequações 237
7. Posições Relativas entre Duas Circunferências 239

Exercícios 243

Capítulo 7. Cônicas

PARÁBOLA

1. Definição 258
2. Elementos Principais 258
3. Equação Reduzida 259
4. Reta Tangente 261
5. Equação Polar 264
6. Corda Focal Mínima 265
7. Excentricidade 265
8. Teorema das Tangentes 266
9. Teorema de Poncelet para Parábolas 267

ELIPSE

10. Definição 270
11. Elementos Principais 270
12. Equação Reduzida 271
13. Reta Tangente 274
14. Excentricidade e Diretriz 277
15. Teorema das Tangentes 279

16. Teorema de Poncelet 279
17. Equação Polar 281
18. Latus Rectum 282
19. Equação Paramétrica 284
HIPÉRBOLE
20. Definição 285
21. Elementos Principais 285
22. Equação Reduzida 286
23. Reta Tangente 288
24. Excentricidade, Diretriz e Assíntotas 291
25. Teorema das Tangentes 294
26. Teorema de Poncelet 294
27. Equação Polar 295
28. Latus Rectum 296
19. Equação Paramétrica 296
Exercícios 297

Capítulo 8. Lugares Geométricos
1. Definição 313
2. Determinação de um Lugar Geométrico 313
3. Translação de Eixos 321
4. Rotação de Eixos 322
5. Interpretação de uma Equação de 2º Grau 323
Exercícios 328

Capítulo 9. Apêndice
1. Aplicações da Geometria Analítica na Geometria Plana 334
2. Seções Cônicas 340

Gabaritos 344

Números Complexos

1.1. ORIGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A primeira referência a raízes quadradas de números negativos surge quando utiliza-se fórmula de Baskara para resolver uma equação de 2º grau. No caso de uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, sabe-se que suas duas raízes são dadas por $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Dependendo dos valores de a, b e c pode-se ter $b^2 - 4ac < 0$. Neste caso, no passado, simplesmente afirmava-se que a equação não possuia raiz. Entretanto, em meados do século XVI, os matemáticos Cardano e Tartaglia, estudando as raízes de equações de 3º grau, perceberam que os números reais eram insuficientes para este estudo. A mais antiga referência encontrada sobre números complexos data de 1545 e é atribuída a Cardano, que utilizou a notação $\sqrt{-1}$ para caracterizar as propriedades de alguns polinômios. Porém, Cardano não enunciou e muito menos utilizou as propriedades da unidade imaginária, ou seja, não utilizou $\sqrt{-1}$ como um objeto matemático.

O nome "imaginário" surgiu em uma citação de Descartes, no seu famoso livro Discurso Sobre o Método de Bem Utilizar a Razão e de Encontrar a Verdade nas Ciências, publicado em 1637: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias".

Posteriormente, em 1777, Euler introduziu a notação i e – i para as duas raízes quadradas de – 1. Também é de sua autoria a notação algébrica dos números complexos, ou seja, todo número complexo pode ser escrito da forma $a + bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$. O matemático Wessel em 1797 e Gauss em 1799 usaram pela primeira vez a interpretação geométrica dos números complexos.

1.2. A UNIDADE IMAGINÁRIA

Denominamos unidade imaginária o número i tal que $i^2 = -1$.

1.3. CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Denominamos conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, ao conjunto dos pares ordenados de números reais (a, b) escritos na forma $a + bi$, onde $i^2 = -1$. Por exemplo, $1 + i$ e $3i$ são números complexos. Observe que o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, uma vez que todo número real pode ser encarado como um número complexo com parte imaginária igual a zero.

Se um número complexo z é da forma $a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, denominamos a de parte real do número complexo z e b de parte imaginária do número complexo. Simbolicamente temos que $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$. Esta maneira de representar um número complexo como sendo a parte real somada ao produto da parte imaginária pelo i denomina-se de **forma algébrica de um número complexo**. Por exemplo, o número complexo $2 - 3i$ possui parte real igual a 2 e parte imaginária igual a – 3. Em outras palavras, se $z = 2 - 3i$ então $\text{Re}(z) = 2$ e $\text{Im}(z) = -3$. Preste atenção que a unidade imaginária não faz parte da parte imaginária de um número complexo. Assim, a parte imaginária de $4 + 11i$ é igual a 11 e **não** 11i.

Quando $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$ dizemos que z é um imaginário puro e quando $\text{Im}(z) = 0$ dizemos somente que z é um número real. Por exemplo, os números complexos i e $-7i$ são imaginários puros.

Não há relação de ordem entre dois números complexos não reais. Assim, é errado afirmar que determinado número complexo é maior ou menor que outro número complexo. Por exemplo, por mais que as partes real e imaginária de $z = 8 + 10i$ sejam respectivamente maiores que as partes real e imaginária de $w = 3 - 2i$, **não é possível** afirmar que z é maior que w.

1.3.1. Igualdade de Números Complexos

Dois números complexos são iguais quando suas respectivas partes real e imaginária são iguais. Assim, defini-se igualdade de dois números complexos da seguinte maneira:

$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2 \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$

Por exemplo, se é afirmado que os números complexos $(x + 2) + (2y)i$, com x e $y \in \mathbb{R}$, e $3 + 4i$ são iguais então, necessariamente, deve-se ter $x = 1$ e $y = 2$.

Da mesma forma, um número complexo é igual a 0 somente se parte real e parte imaginárias forem nulas. Assim, se $(x - 7) + (2y - 4)i = 0$ deve-se necessariamente ter $x = 7$ e $y = 2$.

1.3.2. Adição de Números complexos

O resultado da soma de dois números complexos z e w é outro número complexo cuja parte real é igual a soma das partes reais de z e w e cuja parte imaginária é igual a soma das partes imaginárias de z e w. Portanto, defini-se adição de dois números complexos da seguinte maneira:

$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$

Por exemplo, $(1 + 2i) + (7 - 4i) = (1 + 7) + (2 - 4)i = 8 - 2i$

Este procedimento de cálculo pode ser estendido para a soma de uma quantidade qualquer de números complexos. Assim, se $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$a_1 + b_1i + a_2 + b_2i + ... + a_n + b_ni = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n)i$$

Por exemplo:

$(3 - 2i) + (-9 + 7i) + (-8 - 6i) = (3 - 9 - 8) + (-2 + 7 - 6)i = -14 - i$

1.3.2.1. Propriedades da Adição de Números Complexos

Associativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

Demonstração:

$(z_1 + z_2) + z_3 = (a_1 + b_1i + a_2 + b_2i) + a_3 + b_3i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + a_3 + b_3i =$

$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)i = a_1 + b_1i + (a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i = z_1 + (z_2 + z_3)$

Comutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Demonstração:

$z_1 + z_2 = a_1 + b_1i + a_2 + b_2i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i = a_2 + b_2i + a_1 + b_1i = z_2 + z_1$

Elemento Neutro: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C} / z + w = z$

Demonstração:

$z + 0 + 0i = a + bi + 0 + 0i = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = z$

Elemento Simétrico: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C} / z + w = 0$

Demonstração:

$z + z' = a + bi + (-a) + (-b)i = (a + (-a)) + (b + (-b))i = 0 + 0i = 0$

Exemplos:

1) (UFAM-2002) Os números x e y são reais. Os complexos $3x - 2 + yi - 5i$ e $4y + 1 - xi + 3i$ são iguais. Então $x - 3y$ é igual a:
a) 5 b) – 4 c) 3 d) – 5 e) 4
Solução:
Se $(3x - 2) + (y - 5)i = (4y + 1) + (- x + 3)i$ então:

$$\begin{cases} 3x - 2 = 4y + 1 \\ y - 5 = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 4x + 4y = 32 \end{cases} \Rightarrow 7x = 35 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 3$$

Logo: $x - 3y = 5 - 9 = -4$.

2) Sejam $z_1 = 4 + (x + 2)i$, $z_2 = (x - 2y) + 6i$ e $z_3 = y + (2x + y)i$. Determine os valores dos números reais x e y de modo que $z_1 + z_2 + z_3 = -4 - 8i$.
Solução:
$z_1 + z_2 + z_3 = -4 - 8i \Leftrightarrow 4 + (x + 2)i + (x - 2y) + 6i + y + (2x + y)i = -4 - 8i \Leftrightarrow$
$(4 + x - 2y + y) + (x + 2 + 6 + 2x + y)i = -4 - 8i \Leftrightarrow (4 + x - y) + (3x + y + 8)i = -4 - 8i$
Assim, pela igualdade entre números complexos, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4 + x - y = -4 \\ 3x + y + 8 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -8 \\ 3x + y = -16 \end{cases}$$

Somando as duas equações obtém-se: $4x = -24 \Rightarrow x = -6$
Substituindo na 1ª equação: $x - y = -8 \Rightarrow -6 - y = -8 \Rightarrow y = 2$

3) (IME-2006) Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s)i$ $(n > 1)$ termos de uma seqüência. Determine, em função de **n**, os valores de **r** e **s** que tornam esta seqüência uma progressão aritmética, sabendo que **r** e **s** são números reais e $i = \sqrt{-1}$.
Solução:
Supondo que a_1, a_n e a_{n-1} são termos de uma PA, então podemos usar a fórmula do termo geral:
$a_{n+1} = a_n + d$ (I) e $a_n = a_1 + (n - 1).d$ (II), onde d é a razão desta PA.
De (I), obtém-se: $(r - s) + (r + s)i = r + si + d \Rightarrow d = -s + ri$
De (II),obtém-se: $(r + si) = 1 - i + (n - 1).(-s + ri) \Rightarrow (r + ns - s) + (s - nr + r)i = 1 - i$
Da igualdade entre complexos concluímos que:
$r + ns - s = 1$ (iii)
$s - nr + r = -1$ (iv)
Isolando r na equação (iii) e substituindo em (iv):
$s + 1 + s(1 - n) - nr = -1 \Rightarrow 2s + 2 - sn - n - ns + n^2 s = 0 \Rightarrow (n^2 - 2n + 2)s = n - 2 \Rightarrow$

$$s = \frac{n-2}{n^2-2n+2} \Rightarrow r = 1 + \frac{(1-n)(n-2)}{n^2-2n+2} = \frac{n}{n^2-2n+2}$$

1.3.3. Multiplicação de Números Complexos

1.3.3.1. Multiplicação de um número real por um complexo

Sejam $r \in \mathbb{R}$ e $z = a + bi$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Defini-se o produto de r por z da seguinte maneira:

$$r(a + bi) = r.a + r.bi$$

Por exemplo, a multiplicação do número real 5 pelo número complexo $2 - 3i$ resulta em:
$5(2 - 3i) = 5.2 + 5(-3)i = 10 - 15i$

1.3.3.2. Multiplicação entre dois números complexos

Defini-se multiplicação de dois números complexos da seguinte maneira:

$$(a_1 + b_1i).(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$

Note que a multiplicação de dois números complexos respeita as regras de multiplicação polinomial, onde os termos que compõe cada número complexo são multiplicados aos pares, e depois os termos semelhantes obtidos são reduzidos.

$(a_1 + b_1i).(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2 = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i - b_1b_2 \Rightarrow$
$(a_1 + b_1i).(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$

Por exemplo: $(2 + i)(1 - i) = (2.1 - (1)(-1)) + (2.(-1) + 1.1)i = 3 - i$

É possível multiplicar dois números complexos não nulos e obter como resultado um número real. Por exemplo, o resultado da multiplicação entre $2 - i$ e $6 + 3i$ é um número real:

$(2 - i)(6 + 3i) = [2.6 - (-1)(3)] + [(-1)(6) + 2.3]i = 15$

.3.3.3. Propriedades

Associativa: $(z_1.z_2)z_3 = z_1(z_2.z_3)$

Demonstração:

$(z_1.z_2).z_3 = [(a_1 + b_1i).(a_2 + b_2i)](a_3 + b_3i) = [(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i](a_3 + b_3i) =$
$= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3) + (a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3)i =$
$= [a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(b_2a_3 + a_2b_3)] + [a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)]i =$
$= (a_1 + b_1i)[(a_2a_3 - b_2b_3) + (b_2a_3 + a_2b_3)i] = (a_1 + b_1i).[(a_2 + b_2i)(a_3 + b_3i)] = z_1.(z_2.z_3)$

Comutativa: $z_1.z_2 = z_2.z_1$

Demonstração:

$z_1.z_2 = (a_1 + b_1i).(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i = (a_2a_1 - b_2b_1) + (b_2a_1 + a_2b_1)i =$
$= (a_2 + b_2i).(a_1 + b_1i) = z_2.z_1$

Elemento Neutro: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists w \in \mathbb{C} / z.w = z$

Demonstração:

$z.1 = (a + bi).1 = a + bi = z$

Elemento Inverso: $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0, \exists w \in \mathbb{C} / z.w = 1$

Demonstração:

$$(a + bi)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}\right) = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \left(-\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2}\right)i = 1$$

Exemplos:

1) (UFU-98) A soma das raízes distintas da equação $z^2 + 2\Re(z) + 1 = 0$, onde z é um número complexo e $2\Re(z)$ denota a parte real de z, é igual a:

a) 0 b) 1 c) – 1 d) 2i e) – 2i

Solução:

Seja $z = a + bi$, onde a e $b \in \mathbb{R}$. Desta forma:

$z^2 + 2\Re(z) + 1 = 0 \Rightarrow (a + bi)(a + bi) + 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi + 2a + 1 = 0 \Rightarrow$

$(a^2 - b^2 - 2a + 1) + 2abi = 0$

Uma vez que um número complexo é nulo quando suas partes real e imaginária são iguais a zero, necessariamente teremos $2ab = 0$, onde temos duas possibilidades:

i) $a = 0 \Rightarrow 0^2 - b^2 + 2.0 + 1 = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow z = i$ ou $z = -i$

ii) $b = 0 \Rightarrow a^2 - 0^2 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a + 1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow z = -1$

Logo, a soma das raízes vale $i + (-i) + (-1) = -1$.

2) (UFLA-2006) Determine os valores reais de x de modo que o número complexo $z = 2 + (x - 4i)(2 + xi)$ seja real.

a) $\pm 2\sqrt{2}$ b) $\pm \frac{1}{3}$ c) ± 2 d) $\pm \sqrt{2}$ e) $\pm \sqrt{3}$

Solução:

Desenvolvendo obtemos: $z = 2 + (x - 4i)(2 + xi) = 2 + 2x + x^2i - 8i + 4x = (2 + 6x) + (x^2 - 8)i$

Assim, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

3) (UFMG-2006) Seja $z = (a + i)^3$ um número complexo, sendo a um número real.

a) ESCREVA z na forma $x + iy$, sendo x e y números reais.

b) DETERMINE os valores de a para que z seja um número imaginário puro.

Solução:

a) $z = (a + i)^3 = a^3 + 3a^2i + 3ai^2 + i^3 = a^3 + 3a^2i - 3a - i = (a^3 - 3a) + (3a^2 - 1)i$

b) z é imaginário puro se $\text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow a^3 = 3a \Rightarrow a = 0$ ou $a = \sqrt{3}$ ou $a = -\sqrt{3}$.

4) (IME-76/77) Seja $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Determine a e b tais que $z^2 = 3 - 4i$.

Solução:

Note que: $(a + bi)(a + bi) = 3 - 4i \Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = 3 - 4i$

i) $2ab = -4 \Rightarrow b = -\frac{2}{a}$

ii) $a^2 - b^2 = 3 \Rightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \Rightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0 \Rightarrow (a^2 - 4)(a^2 + 1) = 0 \overset{a \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} a^2 = 4$

Portanto: Se $a = 2$ temos que $b = -1$ e se $a = -2$ então $b = 1$.

5) (IME-83/84) Quais as relações entre os coeficientes a, b, c, d da equação $x^2 + 2(a + ib)x + c + id = 0$ de modo que ela seja satisfeita para um valor real $x = k$?

Solução:

Se $x = k$ é raiz da equação $k^2 + 2(a + ib)k + c + id = 0 \Rightarrow (k^2 + 2ak + c) + (2bk + d)i = 0$

i) $2bk + d = 0 \Rightarrow k = -\frac{d}{2b}$ $(b \neq 0)$

ii) $k^2 + 2ak + c \Rightarrow \frac{d^2}{4b^2} - \frac{ad}{b} + c = 0 \Rightarrow d^2 = 4b(ad - bc)$

6) (IME-74/75) São dados dois números complexos z_1 e z_2. As partes real e imaginária de um complexo são dadas por Re(z) e Im(z). Determine z_1 e z_2, sabendo que:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 5 \\ 4z_1^2 + z_2^2 + 15[\mathrm{Re}(z_2)] = 0 \\ \mathrm{Re}(z_2) = 4[\mathrm{Re}(z_1)] \end{cases}$$

Solução:

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

Logo: $\mathrm{Re}(z_2) = 4\mathrm{Re}(z_1) \Rightarrow c = 4a$

Por outro lado: $z_1 + z_2 = 5 \Rightarrow a + bi + c + di = 5 \Rightarrow (a + c) + (b + d)i = 5 \Rightarrow a + c = 5$ e $b + d = 0$

Porém, uma vez que $c = 4a \Rightarrow 4a + a = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = 4$

Portanto: $4z_1^2 + z_2^2 + 15\mathrm{Re}(z_2) = 0 \Rightarrow 4(1 + bi)^2 + (4 - bi)^2 + 15.4 = 0 \Rightarrow$

$4(1 + 2bi - b^2) + 16 - 8bi - b^2 + 60 = 0 \Rightarrow 4 + 8bi - 4b^2 - 8bi - b^2 + 76 = 0 \Rightarrow 5b^2 = 80 \Rightarrow$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$

Deste modo: $z_1 = 1 + 4i$ e $z_2 = 4 - 4i$ ou $z_1 = 1 - 4i$ ou $z_2 = 4 + 4i$.

7) (ITA-2009) Seja $x,y \in \mathbb{R}$ e $\omega = x^2(1+3i) + y^2(4 - i) - x(2+6i) + y(-16 + 4i) \in \mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \mathrm{Re}\,\omega \le -13 \text{ e } \mathrm{Im}\,\omega \le 4\}$.

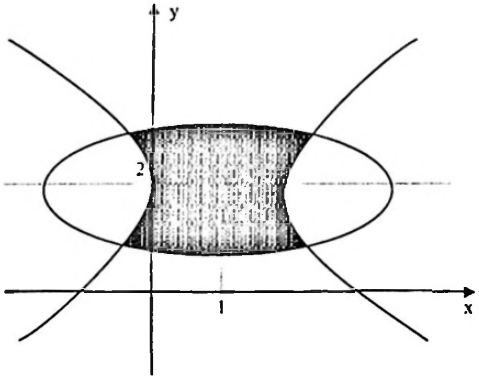
Solução:

$w = (x^2 + 4y^2 - 2x - 16y) + (3x^2 - y^2 - 6x + 4y)i = [(x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 17] + [3(x-1)^2 - (y-2)^2 + 1]i$

Para que $(x, y) \in \Omega$:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 17 \le -13 \\ 3(x-1)^2 - (y-2)^2 + 1 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 \le 1 \\ (x-1)^2 - \dfrac{(y-2)^2}{3} \le 1 \end{cases}$$

, que representam a região convexa determinada por uma elipse, de eixos 4 e 2, e a região côncava determinada por uma hipérbole, de eixos 2 (real) e $2\sqrt{3}$ (imaginário), ambas centradas em (1, 2). O esboço de Ω fica:



1.4. CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Denomina-se conjugado de um número complexo $z = a + bi$ (a e $b \in \mathbb{R}$) o número $\bar{z} = a - bi$. Assim, o número complexo $1 + i$ possui como conjugado o número complexo $1 - i$ e o número complexo $-2i$ possui como conjugado $2i$. Observe também que se o número complexo $z = x + yi$ (x e $y \in \mathbb{R}$) é igual ao seu conjugado $\bar{z} = x - yi$ então $y = -y$, ou seja, $y = 0$. Portanto, para que um número complexo seja igual ao seu conjugado a sua parte imaginária deve ser igual a zero (número real).

Perceba também que a soma de um número com seu conjugado resulta sempre em um número real, uma vez que $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$. Por outro lado, a subtração entre um número complexo não real e seu conjugado sempre resulta em um número imaginário puro: $z - \bar{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi$.

1.4.1. Propriedades

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Demonstração:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i =$$
$$= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

(ii) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

Demonstração:

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i =$$
$$= (a_1 a_2 - b_2 b_1) + (-a_1 b_2 - b_1 a_2)i = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

(iii) $z.\bar{z} \in \mathbb{R}$

Demonstração:

$z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (-ab + ba) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

Observação: Mais tarde você verá que esta propriedade é a base da divisão entre números complexos.

(iv) $\overline{(\bar{z})} = z$

Demonstração:

$$\overline{(\bar{z})} = \overline{\overline{(a + bi)}} = \overline{a - bi} = a - (-b)i = a + bi = z$$

Exemplos:

1) (UFV-2002) Seja a equação $Z - \bar{Z} + Z\bar{Z} = 2 + 2i$, no conjunto dos números complexos. A soma dos dois números que satisfazem essa equação é:

a) 2 b) $2i$ c) 0 d) 1 e) i

Solução:

Seja $z = a + bi$, onde a e $b \in \mathbb{R}$. Portanto:

$Z - \bar{Z} + Z\bar{Z} = 2 + 2i \Rightarrow a + bi - (a - bi) + (a + bi)(a - bi) = 2 + 2i \Rightarrow 2bi + a^2 + b^2 = 2 + 2i \Rightarrow$

$(a^2 + b^2 - 2) + (2b - 2)i = 0$

Desta forma:

i) $2b - 2 = 0 \Rightarrow b = 1$

ii) $a^2 + b^2 - 2 = 0 \Rightarrow a^2 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

Assim, são soluções os seguintes números complexos: $1 + i$ e $-1 + i$, onde sua soma vale $2i$.

2) (Fuvest-2000) Determine todas as soluções, no campo complexo, da equação $\bar{z} = iz^2$, onde i é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$ e $\bar{z}$ é o conjunto de z.

Solução:

Seja $z = a + bi$, onde a e $b \in \Re$. Desta maneira:

$\overline{z} = iz^2 \Rightarrow a - bi = i(a + bi)^2 \Rightarrow a - bi = i(a^2 + 2abi - b^2) \Rightarrow a - bi = ia^2 - 2ab - ib^2 \Rightarrow$
$(2ab + a) + (b^2 - b - a^2)i = 0$

Assim:

i) $2ab + a = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = -1/2$

ii) se $a = 0$ então $0 = b^2 - b - a^2 = b2 - b = b(b - 1) \Rightarrow b = 0$ ou $b = 1$

se $a \neq 0$ $(b = -1/2)$ então $0 = b^2 - b - a^2 = 1/4 + 1/2 - a^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}/2$

Conseqüentemente, as soluções da equação $\overline{z} = iz^2$ são: $\{0, i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\}$

3) (ITA-93) Resolvendo a equação $z^2 = \overline{2 + z}$ no conjunto dos números complexos, conclui-se sobre as suas soluções que:

a) nenhuma delas é um número inteiro.

b) a soma delas é dois.

c) estas são em número de 2 e são distintas.

d) estas são em número de quatro e são 2 a 2 distintas.

e) uma delas é da forma $z = bi$ com b real não-nulo.

Solução:

Seja $z = a + bi$, onde a e $b \in \Re$. Portanto: $z^2 = \overline{2 + z} \Rightarrow (a + bi)^2 = \overline{2 + a + bi} \Rightarrow$
$a^2 + 2abi - b^2 = 2 + a - bi \Rightarrow (a^2 - b^2 - a - 2) + (2ab + b)i = 0$

i) $2ab + b = 0 \Rightarrow b = 0$ ou $a = -1/2$

ii) se $b = 0$ então $0 = a^2 - b^2 - a - 2 = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1) \Rightarrow a = -1$ ou $a = 2$

se $b \neq 0$ $(a = -1/2)$ então $0 = a^2 - b^2 - a - 2 - 1/4 - b^2 + 1/2 - 2 \Rightarrow b^2 - 1/4 \Rightarrow b = \pm 1/2$

Deste modo, as soluções complexas da equação $z^2 = \overline{2 + z}$ são $\{-1, 2, \frac{-1 + i}{2}, \frac{-1 - i}{2}\}$

Assim, as soluções são em número de quatro e são 2 a 2 distintas.

4) (ITA-87) Considerando z e w números complexos arbitrários e $u = z.w + \overline{z}.\overline{w}$, então o conjugado de u será necessariamente:

a) igual a $|z|\,|w|$

b) um número imaginário puro

c) igual ao dobro da parte real de $z + w$

d) igual ao dobro da parte real do número $z.w$

e) diferente de u

Solução:

Seja $z = a + bi$ e $w = c + di$

$u = (a + bi)(c + di) + (a - bi)(c - di) = ac - bd + i(ad + bc) + ac - bd - i(ad + bc) = 2(ac - bd) \Rightarrow$
$u = 2.\mathrm{Re}(zw)$

ALTERNATIVA D

1.4.2. Divisão de Números Complexos

Baseado no fato de que $z.\bar{z} \in \mathbb{R}$, pode-se enunciar que a obtenção do número complexo que é resultado da divisão de z_1 por z_2 (com $z_2 \neq 0$) é realizada multiplicando o numerador e o denominador desta divisão pelo conjugado de z_2. Algebricamente falando, para calcular o valor de $\frac{z_1}{z_2}$, com $z_2 \neq 0$, basta utilizar a identidade $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}.\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$. Desenvolvendo esta expressão obtém-se:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}\frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a^2 + b^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a^2 + b^2} i$$

Por exemplo, pode-se calcular como este procedimento o valor de $\frac{5 - 10i}{3 + 4i}$:

$$\frac{5-10i}{3+4i} = \frac{5-10i}{3+4i}\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(5.3 - 10.4) + [(-10).3 + 5.(-4)]}{3^2 + 4^2} = \frac{-25 - 50i}{25} = -1 - 2i$$

Também é possível calcular agora o valor de i^{-1}. Uma vez que o conjugado de i é – i, então:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i}.\frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-(i)^2} = -i$$

1.5. POTÊNCIAS DE i

Inicialmente observemos que:

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = (i^2)i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = 1$, $i^5 = (i^4)i = i$, $i^6 = (i^4)(i^2) = -1$, ...

Portanto, é fácil notar que as potências de i para valores pequenos de n formam uma seqüência periódica: 1, i, – 1, – i, 1, i, – 1, – i, ... Vamos provar que é periódica (com o comprimento do período igual a 4) a seqüência dos valores de i^n. Inicialmente vamos dividir n por 4. Assim, podemos escrever que $n = 4k + r$, onde r = 0, 1, 2 ou 3. Logo: $i^n = i^{4k+r} = i^{4k}.i^r = (i^4)^k i^r = i^r$.

Deste modo, podemos afirmar que:

- se $n = 4k$ então $i^{4k} = i^0 = 1$
- se $n = 4k + 1$ então $i^{4k+1} = i^1 = i$
- se $n = 4k + 2$ então $i^{4k+2} = i^2 = -1$
- se $n = 4k + 3$ então $i^{4k+3} = i^3 = -i$

Exemplos:

1) (EEAR-2003) Sendo "i" a unidade imaginária, o resultado de $\frac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i}$ é

a) $-1-3i$. b) $-13-39i$. c) $-\frac{13}{5} - \frac{39i}{5}$ d) $\frac{13}{5} + \frac{39i}{5}$.

Solução:

$$\frac{(3+2i)(6-4i)}{-1+3i} = \frac{(3+2i)(6-4i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \frac{[(3.6+2.4)+3.(-4)+2.6](-1-3i)}{1+9} = \frac{-26(1+3i)}{10} = -\frac{13}{5} - \frac{39i}{5}$$

2) (UFMA-2002) Encontre o valor real de b, de modo que o quociente $\frac{2 - b.i}{1+i}$ seja um número real.

Solução:

Observemos que: $z = \frac{2-b.i}{1+i} = \frac{(2-b.i)}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{(2-b)+(-2-b)i}{2} = \frac{2-b}{2} - \frac{(b+2)}{2}i$

Assim, se $z \in \Re$ então $Im(z) = 0 \Rightarrow b = -2$.

3) (UFSCar-2005) Sejam i a unidade imaginária e a_n o n-ésimo termo de uma progressão geométrica com $a_2 = 2a_1$. Se a_1 é um número ímpar, então $i^{a_1} + i^{a_2} + ... + i^{a_{10}}$ é igual a

a) 9i ou – 9i. b) – 9 + i ou – 9 – i. c) 9 + i ou 9 – i.

d) 8 + i ou 8 – i. e) 7 + i ou 7 – i.

Solução:

Se a_1 é ímpar e a_n é uma PG de razão 2, então a_2 é múltiplo de 2 (mas não de 4), a_2 é múltiplo de 4, a_3 é múltiplo de 4, ..., a_{10} é múltiplo de 4. O valor de i^{a_1} depende se a_1 deixa resto 1 ou 3 na divisão por 4. Se a_1 deixar resto 1 na divisão por 3 então $i^{a_1} = i$ e se a_1 deixar resto 3 na divisão por 3 então $i^{a_1} = -i$. Como a_2 é múltiplo de 2 (mas não de 4) então $i^{a_2} = -1$. Como os demais termos da seqüência são múltiplos de 4 então $i^{a_n} = 1$, $3 \le i \le 10$.

Assim, se a_1 deixar resto 1 na divisão por 4: $i^{a_1} + i^{a_2} + ... + i^{a_{10}} = i - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 + i$

Se a_1 deixar resto 3 na divisão por 4: $i^{a_1} + i^{a_2} + ... + i^{a_{10}} = -i - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7 - i$

4) (UFMA-2001) Se $z = \dfrac{1+i}{1-i}$, calcule z^{2002}.

Solução:

Observe que $z^2 = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2 = \dfrac{1+2i-1}{1-2i-1} = -1$.

Logo, $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2002} = \left[\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right]^{1001} = (-1)^{1001} = -1$.

5) (Fuvest-2003) Nos itens abaixo, z denota um número complexo e i a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Suponha $z \neq i$.

a) Para quais valores de z tem-se $\dfrac{z+i}{1+iz} = 2$?

b) Determine o conjunto de todos os valores de z para os quais $\dfrac{z+i}{1+iz}$ é um número real?

Solução:

a) $\dfrac{z+i}{1+iz} = 2 \Rightarrow z + i = 2 + 2iz \Rightarrow z(1-2i) = 2 - i \Rightarrow z = \dfrac{2-i}{1-2i} \Rightarrow$

$z = \dfrac{2-i}{1-2i}\dfrac{1+2i}{1+2i} = \dfrac{(2+2)+(4-1)i}{1+4} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$.

b) Considere que $\dfrac{z+i}{1+iz} = n$, onde $n \in \Re$. Assim: $z + i = n + niz \Rightarrow z(1-ni) = n - i \Rightarrow$

$z = \dfrac{n-i}{1-ni} \Rightarrow z = \dfrac{n-i}{1-ni}\dfrac{1+ni}{1+ni} = \dfrac{(n+n)+(n^2-1)i}{1+n^2} = \dfrac{2n}{n^2+1} + \dfrac{n^2-1}{n^2+1}i$

Logo, todos os números complexos z da forma $z = \dfrac{2n}{n^2+1} + \dfrac{n^2-1}{n^2+1}i$, onde $n \in \Re$, satisfazem $\dfrac{z+i}{1+iz} = 2$.

6) (UFU-2003) Se $S = i + i^2 + i^3 + ... + i^{2003}$, em que $i^2 = -1$, então S é igual a

a) 0 b) – 1 c) i d) i – 1

Solução:

Observando que o expoente do primeiro termos do somatório deixa resto 1 na divisão por 4 e o último termo do somatório deixa resto 3 na divisão por 4, então podemos organizar S da seguinte maneira.

$S = (1 - 1 + i - i) + (1 - 1 + i - i) + ... + (1 - 1 + i - i) + (1 - 1 + i) \Rightarrow S = i$

7) (IME-98) Determine os parâmetros α, β, γ e δ da transformação complexa, $W=\frac{\alpha Z+\beta}{\gamma Z+\delta}$, que leva os pontos $Z = 0\ ;\ -i\ ;\ -1$ para $W = i\ ;\ 1\ ;\ 0$, respectivamente, bem como, Z para $W = -2-i$, onde $i=\sqrt{-1}$.

Solução:

$W(0) = i \Rightarrow i = \frac{\alpha(0)+\beta}{\gamma(0)+\delta} \Rightarrow \beta = \delta i$

$W(-i) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\alpha(-i)+\beta}{\gamma(-i)+\delta} \Rightarrow -\gamma i+\delta = -\alpha i+\beta$

$W(-1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\alpha(-1)+\beta}{\gamma(-1)+\delta} \Rightarrow \alpha = \beta = \delta i$

Desta forma: $-\gamma i+\delta = -\alpha i+\beta \Rightarrow -\gamma i+\delta = -(\delta i)i+\delta i \Rightarrow -\gamma i+\delta = \delta+\delta i \Rightarrow \gamma = -\delta$

Desta maneira: $W = \frac{\delta iZ+\delta i}{(-\delta)Z+\delta} = \frac{\delta(iZ+i)}{\delta(-Z+1)} \Rightarrow W = \frac{i(Z+1)}{-Z+1}$

Assim, se $W = -2-i$ então $\frac{i(Z+1)}{-Z+1} = -2-i \Rightarrow iZ+i = (2+i)Z-2-i \Rightarrow 2Z = 2+2i \Rightarrow$

$Z = 1+i$

8) (ITA-2007) Considere a equação $16\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^3 = \left(\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}\right)^4$.

Sendo x um número real, a soma dos quadrados das soluções dessa equação é

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

Solução:

Inicialmente, perceba que: $\left(\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left(\frac{1+2i-1-(1-2i-1)}{2}\right)^4 = (2i)^4 = 16$

Assim, a equação proposta se reduz a:

$(1-ix)^3 = (1+ix)^3 \Rightarrow 1-3ix-3x^2+ix^3 = 1+3ix-3x^2-ix^3 \Rightarrow x^3 = 3x \Rightarrow S = \left\{0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right\}$

Logo: $0^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2 = 6$

9) (IME-2007) Sejam z e w números complexos tais que:

$$\begin{cases} w^2-z^2 = 4+12i \\ \overline{z}-\overline{w} = 2+4i \end{cases}$$

onde $\overline{z}$ e $\overline{w}$ representam, respectivamente, os números complexos conjugados de z e w. O valor de z + w é:

a) $1-i$ b) $2+i$ c) $-1+2i$ d) $2-2i$ e) $-2+2i$

Solução:

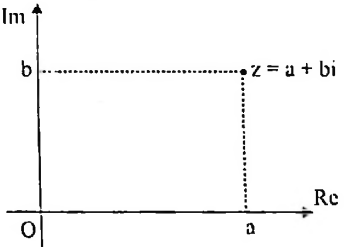
$W^2-Z^2 = (W+Z).(W-Z) = (W+Z)\left[-\left(\overline{Z}-\overline{W}\right)\right]$.

Como $w^2-z^2 = 4+12i$ e $\overline{z}-\overline{w} = 2+4i$:

$(w+z).[-(2-4i)] = 4+12i \Leftrightarrow w+z = \frac{4+12i}{-2+4i} = 2-2i$

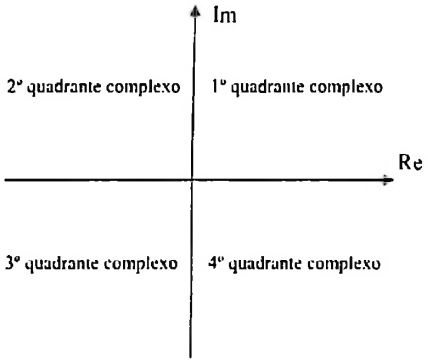
1.6. O PLANO DE ARGAND-GAUSS

Todo número complexo pode ser representado como um ponto em um plano, denominado plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Esta forma de representação é bastante semelhante à representação de pares ordenados em eixos cartesianos. No plano complexo, o eixo equivalente ao eixo das abscissas é denominado de eixo real, e nele marcamos a posição da parte real do número. No eixo imaginário, que é equivalente ao eixo das ordenadas do plano cartesiano, marcamos o valor da parte imaginária do número complexo. Assim, um número complexo da forma $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$, é representado no plano complexo da seguinte forma:



O ponto do plano complexo que representa o número complexo é denominado afixo deste número complexo. A origem O do sistema de eixos corresponde (afixo) ao número complexo $z = 0$.

O plano complexo, de forma análoga ao plano Cartesiano, fica dividido pelos eixos real e imaginário em quadrantes. O esquema abaixo mostra os quadrantes do plano complexo.

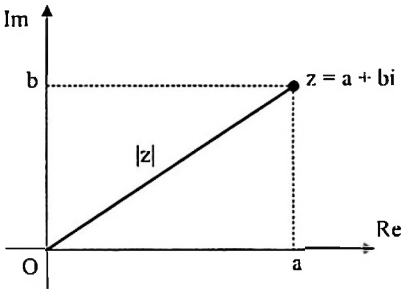


Logo, todo número complexo com partes real e imaginária positiva localiza-se no 1º quadrante, todo número complexo com parte real negativa e parte imaginária positiva localiza-se no 2º quadrante, todo número complexo com partes real e imaginária negativas localiza-se no 3º quadrante e todo número complexo com parte real positiva e parte imaginária negativa localiza-se no 4º quadrante.

Números complexos com parte real ou imaginária nula não pertencem a nenhum quadrante, somente aos eixos. Portanto, todo número complexo que possui parte imaginária nula e parte real positiva pertence ao semi-eixo real positivo, todo número complexo que possui parte imaginária nula e parte real negativa pertence ao semi-eixo real negativo, todo número complexo que possui parte real nula e parte imaginária positiva pertence ao semi-seixo imaginário positivo e todo número complexo que possui parte real nula e parte imaginária negativa pertence ao semi-eixo imaginário negativo. O número complexo $z = 0$ pertence tanto ao eixo real quanto ao eixo imaginário.

1.6.1. Módulo de um Número Complexo

A distância entre a origem e o ponto (afixo) que representa o número complexo z no plano de Argand-Gauss é denominada **módulo** do número complexo e simbolizada por |z|.

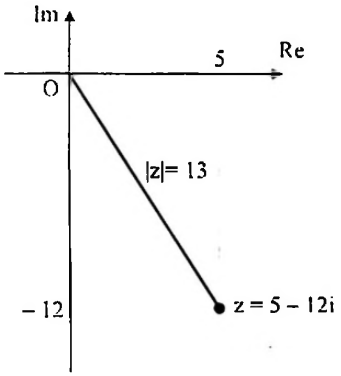


Outra expressão, sinônimo de módulo, bastante utilizada no passado, hoje em completo desuso, para representar a distância de um número complexo z à origem do plano complexo é **norma**.

Assim, independentemente de qual quadrante complexo pertence z, pelo Teorema de Pitágoras, o módulo de um número complexo $z = a + bi$, a e $b \in \mathbb{R}$, é dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Por exemplo, o módulo do número complexo $z = 5 - 12i$ vale $|z| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$. Assim, pode-se afirmar que a distância do afixo de $z = 5 - 12i$ à origem do plano complexo é igual a 13 unidades de comprimento. No plano complexo, a seguinte figura representa o afixo de $z = 5 - 12i$ e o segmento de reta cujo comprimento é o módulo de z:



Note que o número complexo $z = 0$ (origem do plano complexo) possui módulo igual a zero e é o único número complexo com esta propriedade. Para os demais, tem-se que $|z| > 0$.

1.6.1.2. Propriedades do Módulo de um Número Complexo

(i) $|z| = |\bar{z}|$

Demonstração:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2} = |a-bi| = |\bar{z}|$$

(ii) $z.\bar{z} = |z|^2$

Demonstração:

$$z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = (a^2+b^2)+(-ab+ba) = a^2+b^2 = |z|^2$$

(iii) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

Demonstração:

$$|z_1.z_2| = |(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)| = |(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)| = \sqrt{(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2} =$$

$$= \sqrt{a_1^2a_2^2-2a_1a_2b_1b_2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2+2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2} = \sqrt{a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2} =$$

$$= \sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} = \sqrt{a_1^2+b_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2} = |z_1|.|z_2|$$

Observação: Pode-se estender esta propriedade para uma quantidade qualquer de números complexos $z_1, z_2, ..., z_n$, ou seja: $|z_1.z_2...z_n| = |z_1|.|z_2|...|z_n|$

(iv) $|z^n| = |z|^n$

Demonstração:

Pela propriedade anterior temos que $|z^n| = |z.z.z...z| = |z|.|z|.|z|...|z| = |z|^n$

(v) $|z_1|-|z_2| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

Demonstração:

Inicialmente observe que:

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z_1}+\bar{z_2}) = z_1\bar{z_1}+z_1\bar{z_2}+z_2\bar{z_1}+z_2\bar{z_2} =$$

$$= |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z_2}+z_2\bar{z_1}$$

Por outro lado: $z_1\bar{z_2}+z_2\bar{z_1} = (a_1+b_1i)(a_2-b_2i)+(a_1-b_1i)(a_2+b_2i) = 2(a_1a_2+b_1b_2)$

Desenvolvendo o valor de $|\bar{z_1}.z_2|^2$ obtemos:

$$|\bar{z_1}.z_2|^2 = |(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)|^2 = |(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_1b_2-a_2b_1)|^2 = (a_1a_2+b_1b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

Uma vez que $(a_1b_2-a_2b_1)^2 \ge 0$ então $|\bar{z_1}.z_2|^2 \ge (a_1a_2+b_1b_2)^2 \Rightarrow |\bar{z_1}.z_2| \ge |a_1a_2+b_1b_2| \Rightarrow$

$$a_1a_2+b_1b_2 \le |\bar{z_1}.z_2| = |\bar{z_1}|.|z_2| = |z_1|.|z_2|$$

Logo: $|z_1+z_2|^2 \le |z_1^2|+|z_2^2|+2|z_1|.|z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2 \Rightarrow |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

Fazendo $z_1 = u+v$ e $z_2 = -v$ temos que $|u+v-v| \le |u+v|+|-v| \Rightarrow |u| \le |u+v|+|v| \Rightarrow$

$|u+v| \ge |u|-|v|$

Observação: Esta propriedade é denominada de **Desigualdade Triangular**, devido à semelhança com as condições que os comprimentos de três segmentos de reta devem satisfazer para que seja possível formar um triângulo com estes segmentos. Na verdade, posteriormente serão discutidas as interpretações geométricas para o módulo de um número complexo e também da soma de dois números complexos, deixando o leitor em condições de elaborar uma demonstração geométrica muito simples para esta importante propriedade.

Exemplos:

1) (IBMEC-2002) Sejam Z e W números complexos tais que $|Z| = 3$ e $|W| = 4$. Logo podemos concluir que:

a) $1 < |Z + W| < 7$ b) $1 \le |Z + W| \le 7$ c) $0 < |Z + W| < 5$ d) $0 \le |Z + W| \le 5$ e) $|Z + W| = 12$

Solução:

Pelas propriedades de módulo dos números complexos temos que:

$|W| - |Z| \le |W + Z| \le |W| + |Z| \Rightarrow 1 \le |W + Z| \le 7$.

Obs: A rigor, a alternativa a também está correta, uma vez que é um subconjunto da resposta correta.

2) (FEI-2005) O módulo do número complexo $z = \dfrac{1+2i}{3-4i}$, onde $i = \sqrt{-1}$, é:

a) 1/5 b) 2/5 c) $\sqrt{5}$ d) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ e) $\dfrac{1}{3}$

Solução:

Pelas propriedades de módulo sabe-se que se u e v são números complexos ($v \neq 0$) temos que $\left|\dfrac{u}{v}\right| = \dfrac{|u|}{|v|}$.

Assim: $\left|\dfrac{1+2i}{3-4i}\right| = \dfrac{|1+2i|}{|3-4i|} = \dfrac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

3) (Mackenzie-2000) Para os complexos $z = x + y.i$ tais que $|z| = 1$ e $\dfrac{z}{\bar{z}} = i$, é correto afirmar que x.y vale:

a) 1 c) 1/4 c) – 1/4 d) 1/2 e) – 1/2

Solução:

Se $|z| = 1$ então temos que $x^2 + y^2 = 1$.

Por outro lado, $\dfrac{z}{\bar{z}} = i \Rightarrow \dfrac{x+yi}{x-yi} = i \Rightarrow x + yi = ix + y \Rightarrow (x - y) + (y - x)i = 0$, de onde concluímos que $x = y$.

Portanto: $1 = x^2 + y^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x.y = x^2 = \dfrac{1}{2}$.

4) (Unesp-2007) Considere os números complexos $w = 4 + 2i$ e $z = 3a + 4ai$, onde a é um número real positivo e i indica a unidade imaginária. Se, em centímetros, a altura de um triângulo é $|z|$ e a base é a parte real de z.w, determine a de modo que a área do triângulo seja 90 cm^2.

Solução:

$h = |z| = |3a + 4ai| = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = \sqrt{25a^2} = 5|a| = 5a$

$L = \text{Re}(z.w) = \text{Re}[(4 + 2i)(3a + 4ai)] = 12a - 8a = 4a$

Assim, $90 = \dfrac{L.h}{2} \Rightarrow 4a.5a = 180 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, pois $a > 0$.

5) (ITA-2005) Seja $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\dfrac{1-\bar{z}w}{z-w}\right|$ assume valor

a) maior que 1, para todo w com $|w| > 1$.
b) menor que 1, para todo w com $|w| < 1$.
c) maior que 1, para todo w com $w \neq z$.
d) igual a 1, independente de w com $w \neq z$.
e) crescente para $|w|$ crescente, com $|w| < |z|$.

Solução:

Desde que $|z| = 1$, podemos multiplicar a expressão por $|z|$ sem alterar seu valor:

$$\left|\frac{1-\bar{z}w}{z-w}\right| = \frac{|z||1-\bar{z}w|}{|z-w|} = \frac{|z-z.\bar{z}w|}{|z-w|} = \frac{|z-|z|^2 w|}{|z-w|} = \frac{|z-w|}{|z-w|} = 1, \text{ se } z \neq w, \text{ para todo } w.$$

6) (ITA-2006) Se para todo $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$, então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}\, f(z) + f(1)\overline{f(z)}$ é igual a

a) 1 b) 2z c) 2 Re z d) 2 Im z e) $2|z|^2$.

1ª Solução:

Lembrando que $|w|^2 = w.\bar{w}$, $\forall w \in C$, tem-se que: $\left[f(z)-f(1)\right].\overline{\left[f(z)-f(1)\right]} = \left|f(z)-f(1)\right|^2 \Leftrightarrow$

$\left[f(z)-f(1)\right].\left[\overline{f(z)}-\overline{f(1)}\right] = |z-1|^2 \Leftrightarrow f(z).\overline{f(z)} - f(z).\overline{f(1)} - f(1).\overline{f(z)} + f(1).\overline{f(1)} = |z-1|^2 \Leftrightarrow$

$|f(z)|^2 + |f(1)|^2 - |z-1|^2 = f(2).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)} \Leftrightarrow f(z).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)} = |z|^2 + |1|^2 - |2-1|^2 \Leftrightarrow$

$f(z).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)} = z.\bar{z} + 1 - (z-1).\overline{(z-1)} \Leftrightarrow f(z).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)} = z.\bar{z} + 1 - (z-1).(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$

$f(z).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)} = z.\bar{z} + 1 - z.\bar{z} + z + \bar{z} - 1 \Leftrightarrow f(z).\overline{f(1)} + f(1).\overline{f(z)} = z + \bar{z} = 2\,Re(z)$

2ª Solução:

Sejam $f(1) = a + bi$ (a e b fixos), $z = x + yi$ (x e y variáveis) e $f(z) = c + di$ (c e d variáveis)

Para $z = 1$ temos $|f(1)| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

Desde que: $|f(z)| = |z| \Rightarrow c^2 + d^2 = x^2 + y^2$

Analogamente: $|f(z) - f(1)| = |z - 1| \Rightarrow (c - a)^2 + (d - b)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \Rightarrow$

$c^2 + a^2 - 2ac + b^2 + d^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \Rightarrow x = ac + bd$

Assim, desenvolvendo a expressão dada:

$\overline{f(1)}\, f(z) + f(1)\overline{f(z)} = (a - bi)(c + di) + (a + bi)(c - di) = ac + bd + i(ad - bc) + (ac + bd) - i(ad + bc) =$

$= 2(ac + bd) = 2x = 2Re(z)$

7) (ITA-2011) A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$: $z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$ é igual a

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) $-\frac{1}{2}$ e) -2i

Solução:

$Z = x + yi \Rightarrow Z^2 + |z|^2 + iZ - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 + x^2 + y^2 + xi - y - 1 = 0$

$$\begin{cases} 2x^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 2x^2 - 1 (1) \\ 2xy + x = 0 \Rightarrow x.(2y + 1) = 0 (2) \end{cases}$$

(2) em (1) $\Rightarrow x.(4x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow Z_0 = -i$

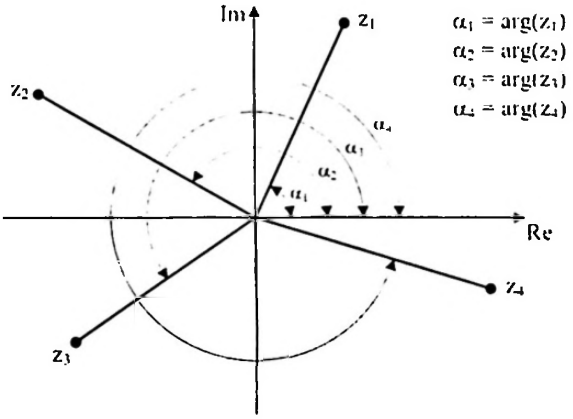
$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow Z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow Z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Logo: $Z_0 + Z_1 + Z_2 = -2i$

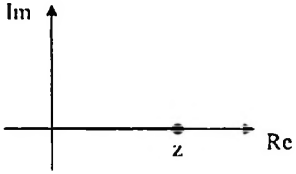
1.6.2. Argumento de um Número Complexo

Considere um número complexo (não nulo) cujo afixo é representado pelo ponto P no plano complexo. O ângulo traçado no sentido anti-horário a partir do semi-eixo real positivo até o segmento $\overline{OP}$ é denominado argumento do número complexo. Observe que o traçado do argumento de um número complexo segue os preceitos dos traçados dos ângulos no ciclo trigonométrico. A figura abaixo mostra como são traçados os argumentos de quatro números complexos, com cada um pertencente a um quadrante do plano complexo.

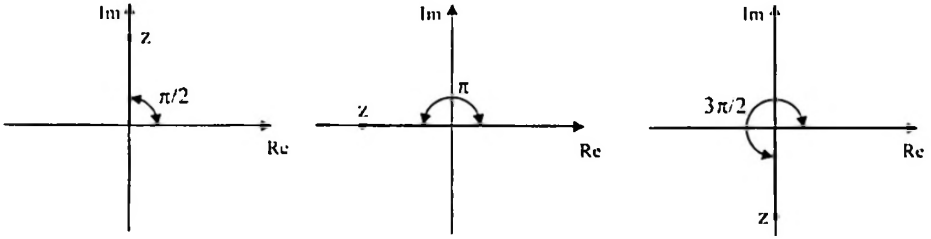


Apesar do argumento de um número complexo ser traçado de forma semelhante aos ângulos no ciclo trigonométrico, o argumento de um número complexo z está definido somente para arcos θ tais que $0 \leq \theta < 2\pi$. Entretanto, o leitor verá adiante que, em determinados casos, será bastante útil trabalhar com ângulos fora deste intervalo, principalmente com argumentos negativos.

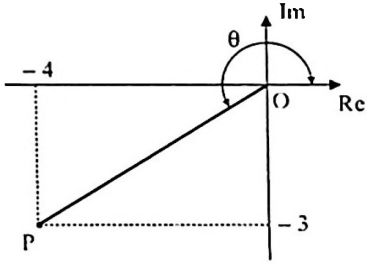
Os números que pertencem ao semi-eixo real positivo possuem argumento igual a 0. Por exemplo, o número complexo z = 4 possui argumento igual a 0.



Analogamente, os números complexos que pertencem ao semi-eixo imaginário positivo possuem argumento igual a $\pi/2$, os que pertencem ao semi-eixo real negativo possuem argumento igual a π e os que pertencem ao semi-eixo imaginário negativo possuem argumento igual a $3\pi/2$.



Analisando agora o procedimento para determinação do valor do argumento de números complexos que não pertençam aos eixos real e imaginário. Por exemplo, o argumento θ de z = – 4 – 3i é determinado graficamente no plano complexo da seguinte forma.



Aplicando o teorema de Pitágoras encontra-se que $\overline{OP} = 5$, que é o módulo de z = – 4 – 3i.

Deste modo, para z = – 4 – 3i pode-se concluir que $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$. Assim, encontra-se que o argumento do número complexo z = – 4 – 3i é o arco do 3º quadrante do ciclo trigonométrico que possui seno igual a – 0,6 (ou co-seno igual a – 0,8). Preste atenção que neste caso não há um arco notável (medido em valores inteiros em graus ou um número racional vezes π radianos) que represente o argumento de z. Assim, é necessário indicar simultaneamente os valores do seno e co-seno do argumento ou indicar o quadrante do afixo, caso seja explicitado somente um dos valores do seno ou co-seno do argumento.

Notando a semelhança com a trigonometria, de modo geral pode-se afirmar que para um número complexo z = x + yi, se θ (0 ≤ θ < 2π) é o argumento de z ≠ 0, então $\boxed{\cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|}}$.

Do mesmo modo, para determinar o argumento θ de z = 1 – i basta observar que:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uma vez que o único ângulo θ tal que 0 ≤ θ < 2π que possui co-seno igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e seno igual a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ é $\frac{7\pi}{4}$, então o argumento de 1 – i vale $\frac{7\pi}{4}$.

1.7. FORMA TRIGONOMÉTRICA

Pelo item anterior, foi definido que se o número complexo possui forma algébrica z = x + yi (x e y ∈ IR) e θ (0 ≤ θ < 2π) é o argumento de z ≠ 0, então $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|}$. Logo:

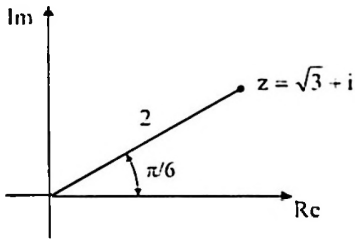
$$z = x + yi = |z|.\cos\theta + |z|.\operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}$$

que é denominada **forma trigonométrica** (ou forma polar) do número complexo z.

Repare que o nome forma polar não é aleatório, uma vez que esta forma de escrever um número complexo equivale a colocá-lo em coordenadas polares no plano complexo. Por exemplo, para o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ temos: $|z| = \sqrt{3+1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{Im(z)}{|z|} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}$

Portanto: $z = |z|(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) \Rightarrow z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6})$

A representação deste número complexo no plano de Argand-Gauss pode ser obtida traçando um segmento com extremidade na origem de comprimento 2 que faça um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos com o semi-eixo real positivo:



1.7.1. Propriedades da Forma Trigonométrica de um Número Complexo

(i) Se $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2)$ então

$z_1.z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

Demonstração:

$z_1.z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i.\text{sen}\,\theta_1)\rho_2(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\,\theta_2) =$

$= \rho_1\rho_2[(\cos 0_1.\cos 0_2 - \text{sen}\,0_1.\text{sen}\,0_2) + i(\text{sen}\,0_1.\cos 0_2 + \text{sen}\,0_2.\cos 0_1)] =$

$= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]$

Assim, concluímos que $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Uma vez que qualquer argumento está entre 0 e 2π, se por um acaso $\alpha = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ for maior que 2π, deve-se tomar como argumento de $\arg(z_1.z_2)$ a 1ª determinação positiva de α.

(ii) Se $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i.\text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2)$ então

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$, $z_2 \neq 0$.

Demonstração:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos 0_1 + i.\text{sen}0_1}{\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\cos 0_1 + i.\text{sen}0_1}{\cos\theta_2 + i.\text{sen}\theta_2}\frac{\cos 0_2 - i.\text{sen}\theta_2}{\cos\theta_2 - i.\text{sen}\theta_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1.\text{sen}\theta_2) + i(\text{sen}\theta_1.\cos\theta_2 - \text{sen}\theta_2.\cos\theta_1)}{\cos^2 0_2 + \text{sen}^2 0_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(0_1 - \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Portanto, podemos concluir que $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$, $z_2 \neq 0$.

Uma vez que qualquer argumento está entre 0 e 2π, se por um acaso $\alpha = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ for menor que 0, deve-se tomar como argumento de $\arg(z_1/z_2)$ o valor de $2\pi - \alpha$.

(iii) Se $z = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$ então $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}[\cos(-\theta) + i.\text{sen}(-\theta)]$

Demonstração:

Escrevendo o número complexo 1 na forma polar: $1 = 1(\cos 0 + i.\text{sen}\,0)$

Logo: $\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\frac{\cos 0 + i.\text{sen}0}{\cos\theta + i.\text{sen}\theta} = \frac{1}{\rho}\cos(0 - \theta) + i.\text{sen}(0 - \theta) = \frac{1}{\rho}[\cos(-\theta) + i.\text{sen}(-\theta)] = \frac{1}{\rho}[\cos\theta - i.\text{sen}\theta]$

Concluímos então que $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$, que é na verdade um abuso de linguagem, pois o argumento de um número complexo não pode ser negativo. Se $\alpha = \arg(1/z)$ então o valor correto do argumento de z é $2\pi - \alpha$.

(iv) Se $z = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$ então $\bar{z} = \rho[\cos(-\theta) + i.\text{sen}(-\theta)]$

Demonstração:

$\bar{z} = \rho(\cos\theta - i.\text{sen}\,\theta) = \rho[\cos(-\theta) + i.\text{sen}(-\theta)] \Rightarrow \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

(v) Se $\arg(z_1) = \theta_1$ e $\arg(z_2) = \theta_2$ então $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|.\cos(\theta_1 - \theta_2)$

Demonstração:

$$|z_1 + z_2|^2 = |(\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2) + i(\rho_1\text{sen}\theta_1 + \rho_2\text{sen}\theta_2)| =$$
$$= \sqrt{(\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2)^2 + (\rho_1\text{sen}\theta_1 + \rho_2\text{sen}\theta_2)^2} =$$
$$= \rho_1^2\cos^2\theta_1 + 2\rho_1\rho_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + \rho_2^2\cos^2\theta_2 + \rho_1^2\text{sen}^2\theta_1 + 2\rho_1\rho_2\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2 + \rho_2^2\text{sen}^2\theta_2 =$$
$$= \rho_1^2(\cos^2\theta_1 + \text{sen}^2\theta_1) + \rho_2^2(\cos^2\theta_2 + \text{sen}^2\theta_2) + 2\rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2) =$$
$$= \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2.\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Exemplos:

1) (Fatec/SP-2000) Sejam os números complexos $z_1 = \frac{1}{2} + i$ e $z_2 = 1 - \frac{1}{2}i$. O argumento principal de $z_1 - \bar{z}_2$ é.

a) $3\pi/4$ b) $5\pi/4$ c) $7\pi/4$ d) $\pi/4$ e) $\pi/8$

Solução:

$$z_1 - \bar{z}_2 = \frac{1}{2} + i - \left(1 + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} + i - 1 - \frac{i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

Logo: $|z_1 - \bar{z}_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Desta maneira, se $\theta = \arg(z_1 - \bar{z}_2)$ então:

$$\cos\theta = \frac{\text{Re}(z_1 - \bar{z}_2)}{|z_1 - \bar{z}_2|} = \frac{-1/2}{\sqrt{2}/2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = \frac{\text{Im}(z_1 - \bar{z}_2)}{|z_1 - \bar{z}_2|} = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Uma vez que $0 \le \theta \le 2\pi$ então $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

2) (Unesp-2005) Seja o número complexo $z = 10 + 10i$, no qual $i = \sqrt{-1}$. A forma trigonométrica que representam este número é

a) $10(\cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2})$ b) $10(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4})$ c) $10\sqrt{10}(\cos\frac{\pi}{6} + i\text{sen}\frac{\pi}{6})$

d) $10\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2})$ e) $10\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4})$

Solução:

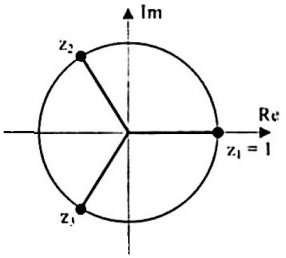
$|z| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

Se $\theta = \arg(z)$ então $\cos\theta = \frac{\text{Re}(z)}{|z|} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen}\theta = \frac{\text{Im}(z)}{|z|} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, segue diretamente que $\theta = \pi/4$. Portanto: $z = |z|(\cos\theta + i.\text{sen}\theta) \Rightarrow 10\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4})$

3) (FGV-2006) Três números complexos estão representados no plano de Argand-Gauss por 3 pontos que dividem circunferência de centro na origem (0,0) em partes iguais. Um desses números é igual a 1. Determine outros dois números.

Solução:



Se um dos números é igual a 1, então o raio da circunferência é igual a 1, ou seja, os módulos de z_2 e z_3 valem 1

Se os três números dividem a circunferência em três partes iguais, então o ângulo entre z_1 e z_2 e entre z_1 e z_3 vale, respectivamente, $2\pi/3$ e $4\pi/3$. Como contamos o argumento de um número complexo a partir do semi-eixo real positivo (onde está localizado z_1) então $\arg(z_1) = 2\pi/3$ e $\arg(z_2) = 4\pi/3$. Assim:

$$z_2 = |z_2|[\cos(2\pi/3) + i.\text{sen}(2\pi/3)] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = |z_3|[\cos(4\pi/3) + i.\text{sen}(4\pi/3)] = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

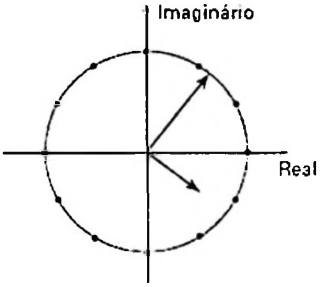
4) (UFMT-2006) Dados os números complexos não nulos $z = a + bi$ e $w = i.z$. Sendo α e β os argumentos, respectivamente de z e w, com $0 \le \alpha < 2\pi$ e $0 \le \beta < 2\pi$, pode-se afirmar que $\beta - \alpha$ é igual a

a) $\pi/4$ b) π c) $\pi/2$ d) $3\pi/2$ e) $3\pi/4$

Solução:

Sabe-se que se $\arg(z) = \alpha$ e $\arg(w) = \beta$ então $\arg\left(\frac{w}{z}\right) = \beta - \alpha$. Logo: $\beta - \alpha = \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \arg(i) = \pi$.

5) (FGV-2005) Admita que o centro do plano complexo Argand-Gauss coincida com o centro de um relógio de ponteiros, como indica a figura:



Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento, às 11 h 55 min sua ponta estará sobre o número complexo:

a) $-1+\sqrt{3}i$ b) $1+\sqrt{3}i$ c) $1-\sqrt{3}i$ d) $\sqrt{3}-i$ e) $\sqrt{3}+i$

Solução:

Uma vez que em um 60 minutos hora o ponteiro dos minutos percorre 2π radianos, então em cinco minutos o ponteiro dos minutos percorre $2\pi\frac{5}{60} = \frac{\pi}{6}$ radianos. Como o argumento de um número complexo é contado a partir do semi-eixo real positivo, então o argumento do número complexo z cujo afixo é a ponta do ponteiro dos minutos às 11 h 55 min, então $\theta = \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

Como o comprimento do ponteiro dos minutos é 2, então $|z| = 2$.

Assim: $z = |z|(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta) = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -1 + \sqrt{3}i$

6) (Fuvest-98) Dentre os números complexos $z = a + bi$, não nulos, que têm argumento igual a $\frac{\pi}{4}$, aquele cuja representação geométrica está sobre a parábola $y = x^2$ é:

a) $1 + i$ b) $1 - i$ c) $-1 + i$ d) $\sqrt{2} + 2i$ e) $-\sqrt{2} + 2i$

Solução:

Se $\theta = \arg(z)$ então $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ e $\text{sen}\theta = \frac{b}{|z|}$, ou seja, $\text{tg}\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \text{tg}(\pi/4) = 1 \Rightarrow a = b \ (a \neq 0)$

Se a representação de z está sobre a parábola $y = x^2$ então $b = a^2$.

Logo: $a^2 = b = a \Rightarrow a = 0$ ou $a = 1$. Uma vez que $a \neq 0$ então a única possibilidade é $a = 1 \Rightarrow b = 1$.

Deste modo, temos que $z = 1 + i$.

7) (ITA-91) Se $z = \cos t + i \text{ sen } t$, onde $0 < t < 2\pi$, então podemos afirmar que $w = \frac{1+z}{1-z}$ é dado por:

a) $i\,\text{cotg}\frac{t}{2}$ b) $i\,\text{tg}\frac{t}{2}$ c) $i\,\text{cotg}\,t$ d) $i\,\text{tg}\,t$ e) n.d.a.

Solução:

$$w = \frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+\cos t) + i\text{sen}t}{(1-\cos t) - i\text{sen}t} = \frac{(1+\cos t) + i\text{sen}t}{(1-\cos t) - i\text{sen}t}\frac{(1-\cos t) + i\text{sen}t}{(1-\cos t) + i\text{sen}t} \Rightarrow$$

$$w = \frac{(1-\cos^2 t - \text{sen}^2 t) + (\text{sen}t + \text{sen}t.\cos t + \text{sen}t - \text{sen}t.\cos t)i}{(1-\cos t)^2 + \text{sen}^2 t} \Rightarrow$$

$$w = \frac{2i\text{sen}t}{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \text{sen}^2 t} = \frac{i\text{sen}t}{1-\cos t} = \frac{2i\text{sen}(t/2)\cos(t/2)}{2.\cos^2(t/2)} = i\text{tg}(t/2)$$

8) (ITA-2003) Seja $z \in C$. Das seguintes afirmações independentes:

I – Se $\omega = \frac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então $\bar{\omega} = \frac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$.

II – Se $z \neq 0$ e $\omega = \frac{2iz + 3i + 3}{(1+2i)z}$, então $|\omega| \leq \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$.

III – Se $\omega = \frac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então $2\arg z - \frac{\pi}{12}$ é um argumento de ω.

é (são) verdadeira(s):

a) todas. b) apenas I e II. c) apenas II e III. d) apenas I e III. e) apenas II.

Solução:

I. Verdadeira

Se $u = 2iz^2 + 5\bar{z} - i$ e $v = 1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|$ então

$\bar{u} = \overline{2iz^2 + 5\bar{z} - i} = \overline{2iz^2} + \overline{5\bar{z}} - \bar{i} = -2i\bar{z}^2 + 5z + i$ e

$\bar{v} = 1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z| = \bar{1} + \overline{3\bar{z}^2} + \overline{2iz} + \overline{3|z|^2} + \overline{2|z|} = 1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|$

Uma vez que se $w = \frac{u}{v}$ então $\bar{w} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}}$, temos que esta afirmação está verdadeira

II. Verdadeira

Lembremos que pela Desigualdade Triangular, se $w = u + v$ então $|w| \leq |u| + |v|$

$$|w| = \frac{|2iz+3i+3|}{|(1+2i)z|} \le \frac{|2iz|+|3+3i|}{|1+2i||z|} = \frac{2|z|+3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$$

III. Verdadeira

Sabemos que:

– se $w = u.v \Rightarrow \arg w = \arg u + \arg v$

– se $w = \frac{u}{v}$ então $\arg z = \arg u - \arg v$

Desde modo:

$\arg w = \arg[(1+i)z^2] - \arg(4\sqrt{3}+4i) \Rightarrow \arg w = \arg(1+i) + \arg(z^2) - \pi/6 \Rightarrow$

$\arg w = \pi/4 + 2.\arg z - \pi/6 \Rightarrow \arg w = 2.\arg z + \pi/12$

9) (IME-87/88) Seja z um número complexo. Mostre que $z + \frac{1}{z}$ é um número real se e somente se z é um número real ou $|z| = 1$.

Solução:

Seja $z = |z|(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$. Assim: $z + \frac{1}{z} = |z|(\cos\theta + i.\text{sen}\theta) + \frac{\cos 0 - i.\text{sen}0}{|z|} \Rightarrow$

$$z + \frac{1}{z} = \frac{(|z|^2\cos 0 + \cos 0) + (|z|^2\,\text{sen}0 - \text{sen}\theta)i}{|z|}$$

Portanto, se $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ então $|z|^2\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0$ ($z \in \mathbb{R}$) ou $|z| = 1$

10) (ITA-83) Consideremos um número complexo z tal que $\frac{z^2}{z.i}$ tem argumento igual a $\pi/4$ e $\log_2(z+\bar{z}+2) = 3$. Nestas condições, podemos afirmar que:

a) Não existe $\ln\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)$. b) $z^4 + \ln\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right) = -324$. c) $z + 2\bar{z}$ é um número real.

d) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{10^3}(1+i)$. e) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = -\frac{1}{108}(1+i)$.

Solução:

Se $z = x + yi$, então $\log_2(z+\bar{z}+2) = 3 \Rightarrow x + yi + x - yi + 2 = 8 \Rightarrow x = 3$.

Se $\theta = \arg(z)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $\frac{\pi}{4} = \arg\left(\frac{z^2}{\bar{z}.i}\right)$ então $\arg(z^2) - \arg(\bar{z}) - \arg(i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow$

$2\theta - (-\theta) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$, onde $k \in Z$

$k = 0 \Rightarrow \theta = \pi/4 \Rightarrow z = 3 + 3i$

$k = 1 \Rightarrow \theta = 11\pi/12 \Rightarrow z = 3 + 3(\sqrt{3}-2)i$

$k = 2 \Rightarrow \theta = 19\pi/12 \Rightarrow z = 3 - 3(\sqrt{3}+2)i$

$k = 3 \Rightarrow \theta > 2\pi$

Logo, existem três valores possíveis de z (cada um associado a um valor de θ), fazendo com que nenhuma das alternativas esteja correta, pois cada uma delas não vale simultaneamente para os três valores possíveis de z. A alternativa e vale somente para $z = 3 + 3i$.

11) (IME-2009) Sabe-se que $z_1\overline{z_2} = \frac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0$, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero. Prove que z_1 e z_2 são ortogonais.

Obs: números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\bar{z}$ é o número complexo conjugado de z.

Solução:

$|Z_3 + Z_4| = |Z_3 - Z_4| \Leftrightarrow |Z_3|^2 + |Z_4|^2 + 2|Z_3||Z_4|\cos\theta_{34} = |Z_3|^2 + |Z_4|^2 - 2|Z_3||Z_4|\cos\theta_{34} \Leftrightarrow$

$4|Z_3||Z_4|\cos\theta_{34} = 0 \Leftrightarrow \theta_{34} = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ (Ângulo entre os complexos 3 e 4)

Portanto, sendo arg (w) o argumento do complexo não nulo w:

$z_1\overline{z_2} = \frac{z_3}{z_4} \Rightarrow \arg(z_1 \cdot \bar{z}_2) = \arg\left(\frac{z_3}{z_4}\right) \Leftrightarrow \arg z_1 - \arg \overline{z_2} = \arg z_3 - \arg z_4 = \theta_{34} \Leftrightarrow$

$\arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow z_1$ e z_2 são ortogonais

12) (ITA-2010) Os argumentos principais das soluções da equação em z, $iz + 3\bar{z} + \left(z + \bar{z}\right)^2 - i = 0$, pertencem a

a) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ b) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$ c) $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ d) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[$ e) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4} 2\pi\right[$

Solução:

Fazendo $z = a + bi$, com a e b reais: $a.i - b + 3a - 3bi + a^2 + 2abi - b^2 + 2a^2 + 2b^2 + a^2 - 2abi - b^2 - i = 0$.

Portanto, tem-se que: $(4a^2 + 3a - b) + (a - 3b - 1)i = 0$, implica

$$\begin{cases} 4a^2 + 3a - b = 0 \\ a - 3b - 1 = 0 \quad \rightarrow b = \frac{1}{3}(a-1) \end{cases}$$. Substituindo na equação 1:

$12a^2 + 8a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{6} \rightarrow b = -\frac{7}{18} \rightarrow z_1 = -\frac{1}{6} - \frac{7}{18}i$ ou $a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -\frac{1}{2} \rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Portanto: $\arg(z_2) = \frac{5\pi}{4}$ e $\arg(z_1) = \pi + \text{arc tg}\left(\frac{7}{3}\right)$. Assim, conclui-se que: $\frac{5\pi}{4} \le \arg(z_1) < \frac{3\pi}{2}$

13) (ITA-2011) Das afirmações abaixo sobre número complexos z_1 e z_2:

I - $|z_1 - z_2| \le ||z_1| - |z_2||$.

II - $|\overline{z_1} \cdot z_2| = ||\overline{z_2}| \cdot |\overline{z_2}||$

III - Se $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \neq 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$

é (são) sempre verdadeiras (s)

a) apenas I b) apenas II c) apenas III d) apenas II e III e) todas.

Solução:

i) Da desigualdade triangular sabe-se que $||u| - |v|| \le |u + v| \le ||u| + |v||$. Fazendo $u = z_1$ e $v = -z_2$ então conclui-se que $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$. **FALSO**

ii) Sabe-se que $|u.v| = |u|.|v|$ e que $|\bar{u}| = |u|$, assim: $|\bar{z}_1 . z_2| = |\bar{z}_1| . |z_2| = |\bar{z}_1|\,|\bar{z}_2| = |\bar{z}_1\,\bar{z}_2|$. **FALSO**

iii) $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{|z_1|}\frac{\cos 0 + i.\text{sen}0}{\cos 0 + i.\text{sen}\theta} = \frac{1}{|z_1|}\cos(0-\theta) + i.\text{sen}(0-\theta) = \frac{1}{|z_1|}[\cos(-\theta) + i.\text{sen}(-\theta)] = \frac{1}{|z_1|}[\cos\theta - i.\text{sen}\theta]$.

VERDADEIRO

1.8. POTENCIAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO (1ª LEI DE MOIVRE)

Teorema: Se $z = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$ e n é um inteiro positivo então $z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i.\text{sen}(n\theta)]$

Demonstração:

$$z^n = \underbrace{z.z.z...z}_{n} = \rho(\cos 0 + i.\text{sen}0)\rho(\cos 0 + i.\text{sen}0)\rho(\cos 0 + i.\text{sen}0)...\rho(\cos 0 + i.\text{sen}0) =$$

$$= \underbrace{(\rho.\rho.\rho...\rho)}_{n}[\cos(\underbrace{\theta+\theta+\theta+...+\theta}_{n}) + i.\text{sen}(\underbrace{\theta+\theta+\theta+...+\theta}_{n})] = \rho^n[\cos(n\theta) + i.\text{sen}(n\theta)]$$

Deste modo podemos concluir que $\arg(z^n) = n.\arg(z)$.

Por exemplo, vamos calcular o valor de $(-1+i)^{26}$ utilizando a 1ª Lei de Moivre. Inicialmente pode-se observar que $-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{3\pi}{4})$. Logo:

$$(-1+i)^{26} = \left[2^{1/2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{3\pi}{4})\right]^{26} = 2^{26/2}\left[\cos\left(26\frac{3\pi}{4}\right) + i.\text{sen}\left(26\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^{13}\left[\cos\left(\frac{39\pi}{2}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{39\pi}{2}\right)\right]$$

Desde que $\frac{39\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 9(2\pi)$ então a 1ª determinação positiva de $\frac{39\pi}{2}$ vale $\frac{3\pi}{2}$.

Portanto: $(-1+i)^{26} = 2^{13}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = -2^{13}i$

Exemplos:

1) (PUC/RS-2000) Seja z o conjugado do complexo $1 - i$. A potência z^{12} é igual a

a) $-64 - i$ b) $-64 + i$ c) $-32 - i$ d) $-32 + i$ e) -64

Solução:

Inicialmente observemos que $1 - i = 2^{1/2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$.

Desta forma: $(1-i)^{12} = (2^{1/2})^{12}\left(\cos 12\frac{7\pi}{4} + i.\text{sen}\,12\frac{7\pi}{4}\right) = 2^6(\cos 21\pi + i.\text{sen}\,21\pi) \Rightarrow$

$(1-i)^{12} = 64(\cos\pi + i.\text{sen}\,\pi) \Rightarrow (1-i)^{12} = -64$

2) (UFPR-2006) Considere os números complexos $z = \cos\frac{\pi}{18} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{18}$ e $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)$.

D.1) Mostre que o produto $z \cdot w$ é igual a $\sqrt{3} + i$.

D.2) Mostre que z^{18} é igual a -1.

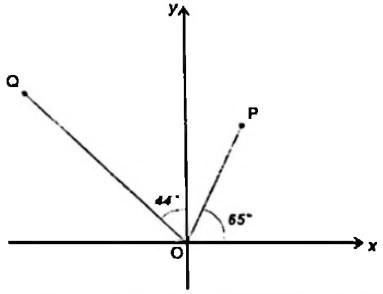
Solução:

D.1) $z.w = \left(\cos\frac{\pi}{18} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{18}\right)2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{9}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9}\right)\right] \Rightarrow$

$$z.w = 2\left[\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right] = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right] = \sqrt{3} + i$$

D.2) $z^{18} = \left(\cos\frac{\pi}{18} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{18}\right)^{18} = \cos 18\frac{\pi}{18} + i\,\text{sen}\,18\frac{\pi}{18} = \cos\pi + i.\text{sen}\,\pi = -1.$

3) (UFMG-2001) Observe a figura



Nessa figura, OP = 2 e OQ = 4. Sejam z e w, respectivamente, os números complexos representados geometricamente pelos pontos P e Q. Considerando esses dados, escreva o número complexo $\frac{z^{11}}{i.w^5}$ na forma a + b.i, em que a e b são números reais.

Solução:

Vamos calcular inicialmente o módulo de $u = \frac{z^{11}}{i.w^5}$: $|u| = \left|\frac{z^{11}}{i.w^5}\right| = \frac{|z^{11}|}{|i.w^5|} = \frac{|z|^{11}}{|i|.|w|^5} = \frac{2^{11}}{1.4^5} = 2$.

Vamos agora calcular o argumento de u:

$\arg(u) = \arg\left(\frac{z^{11}}{i.w^5}\right) = \arg(z^{11}) - \arg(i.w^5) = \arg(z^{11}) - \arg(i) - \arg(w^5) = 11.\arg(z) - \arg(i) - 5.\arg(w) \Rightarrow$

$\arg(u) = 11(65°) - 90° - 5(134°) = -45° \Rightarrow \arg(u) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(u) = \frac{7\pi}{4}$.

Portanto: $u = \frac{z^{11}}{i.w^5} = |u|(\cos 0 + i.\text{sen}0) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}.i$

4) (Fuvest-94) a) Se $z_1 = \cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1$ e $z_2 = \cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2$, mostre que o produto z_1z_2 é igual a $\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$.

b) Mostre que o número complexo $z = \cos 48° + i\,\text{sen}\,48°$ é raiz da equação $z^{10} + z^5 + 1 = 0$.

Solução:

a) $z_1.z_2 = (\cos\theta_1 + i.\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i.\text{sen}\,\theta_2) =$

$= (\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1.\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1.\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2.\cos\theta_1) =$

$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i.\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$

b) $z^5 = (\cos 48° + i.\text{sen}\,48°)^5 = \cos 240° + i.\text{sen}\,240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$z^{10} = (\cos 48° + i.\text{sen}\,48°)^5 = \cos 480° + i.\text{sen}\,480° = \cos 120° + i.\text{sen}\,120° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Portanto: $z^{10} + z^5 + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0$.

5) (UFC-99) Considere o número complexo $z = (1 + i).(\sqrt{3} - i)$. Assinale a opção na qual consta o menor inteiro positivo n, tal que z^n seja um número real positivo.

a) 6. b) 12. c) 18. d) 24. e) 30.

Solução:

$z = (1 + i)(\sqrt{3} - i) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4})2(\cos\frac{11\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{11\pi}{6}) = 2\sqrt{2}(\cos\frac{25\pi}{12} + i.\text{sen}\frac{25\pi}{12}) \Rightarrow$

$z = 2^{3/2}(\cos\frac{\pi}{12} + i.\text{sen}\frac{\pi}{12}) \Rightarrow z^n = 2^{3n/2}(\cos\frac{n\pi}{12} + i.\text{sen}\frac{n\pi}{12})$

De modo que $z^n \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \cos\frac{n\pi}{12} = 1$ e $\text{sen}\frac{n\pi}{12} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{12} = 2k\pi \Rightarrow n = 24k, k \in Z$.

Logo, o menor inteiro positivo n que satisfaz o enunciado é n = 24.

6) (UFCG-2006) O conjunto dos números inteiros k, tais que o número complexo $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{3}$ verifica a identidade $(1 + w)^k = w^k$ é equivalente ao conjunto dos:

a) múltiplos de 4 b) múltiplos de 3 c) múltiplos de 6
d) múltiplos de 12 e) números pares

Solução:

Sabe-se que $w = \cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Assim: $1 + w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}$.

Portanto: $(1 + w)^k = w^k \Rightarrow (\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3})^n = (\cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{3})^n \Rightarrow$

$\cos\frac{n\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{n\pi}{3} = \cos\frac{2n\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2n\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{n\pi}{3} = \cos\frac{2n\pi}{3}$ e $\text{sen}\frac{n\pi}{3} = \text{sen}\frac{2n\pi}{3}$.

A única possibilidade que dois ângulos possuam senos e co-senos iguais é que sejam arcos côngruos.

Desta maneira: $\frac{2n\pi}{3} = \frac{n\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow n = 6k, k \in Z \Rightarrow$ n é múltiplo de 6.

7) (AFA-2005) Considere o número complexo z tal que $\overline{|z| + z} = 2 - i$, onde $i = \sqrt{-1}$ e identifique entre as opções abaixo, as que são corretas.

(01) O afixo de z é ponto do 1º quadrante.

(02) $\left(z - \frac{3}{4}\right)^{1002}$ é real positivo.

(04) O menor inteiro positivo n para o qual $\left(z + \frac{1}{4}\right)^n$ é real negativo pertence ao intervalo]2, 5[

A soma das opções corretas é igual a

a) 6 b) 5 c) 3 d) 2

Solução:

Seja $z = a + bi$, onde a e $b \in \mathbb{R}$. Portanto, temos que:

$\overline{|z| + z} = 2 - i \Rightarrow \overline{\sqrt{a^2 + b^2} + a + bi} = 2 - i \Rightarrow (\sqrt{a^2 + b^2} + a) - bi = 2 - i \Rightarrow b = 1$

Além disso: $2 = a + \sqrt{a^2 + 1} \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = 2 - a \Rightarrow a^2 + 1 = (2 - a)^2 \Rightarrow a^2 + 1 = 4 - 4a + a^2 \Rightarrow$

$4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow z = \frac{3}{4} + i$. Vamos agora analisar as alternativas:

(01) Desde que $\text{Re}(z) > 0$ e $\text{Im}(z) > 0$ então z pertence ao 1º quadrante.

(02) $\left(z - \frac{3}{4}\right)^{1002} = (i)^{1002} = i^{4.500+2} = i^2 = -1 \Rightarrow$ real negativo

(04) $\left(z + \frac{1}{4}\right)^n = (1 + i)^n = \left[\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4})\right]^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{n\pi}{4}) \Rightarrow$

$\text{sen}\frac{n\pi}{4} = 0$ e $\cos\frac{n\pi}{4} = -1 \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi \Rightarrow n = 8k + 4 \Rightarrow n_{min} = 4$.

Portanto, a soma das opções corretas é 1 + 4 = 5.

8) (ITA-96) O valor da potência $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}$ é:

a) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ d) $(\sqrt{2})^{93}i$ e) $(\sqrt{2})^{93}+i$

Solução:

Inicialmente vamos colocar na forma polar: $\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\frac{\sqrt{2}}{1+i}\frac{1-i}{1-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=\cos\frac{7\pi}{4}+i.\text{sen}\frac{7\pi}{4}$

Logo: $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}=\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i.\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right)^{93}=\cos\frac{651\pi}{4}+i.\text{sen}\frac{651\pi}{4}$

Uma vez que $\frac{651\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+81.2\pi$ então $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{93}=\cos\frac{3\pi}{4}+i.\text{sen}\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

9) (IME-2003) Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n}\neq -1$, onde n é um número inteiro positivo. Demonstre que $\frac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

Solução:

Seja $z=\cos 0+i.\text{sen}\,0$: $z.\bar{z}=|z|^2=1 \Rightarrow \bar{z}=z^{-1}$. Portanto:

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}}=\frac{1}{z^{-n}+z^n}=\frac{1}{(\bar{z})^n+z^n}=\frac{1}{\cos(-n\theta)+i.\text{sen}(-n\theta)+\cos(n\theta)+i.\text{sen}(n\theta)}=$$

$$=\frac{1}{\cos(n0)-i.\text{sen}(n0)+\cos(n\theta)+i.\text{sen}(n\theta)}=\frac{1}{2.\cos(n\theta)}$$

que é um número real.

10) (IME-82/83) É dado $2\cos\theta=\frac{1}{x}+x$; demonstre que $2\cos m\theta=\frac{1}{x^m}+x^m$.

Solução:

Desenvolvendo a expressão obtemos que: $2\cos\theta=\frac{1}{x}+x \Rightarrow x^2-(2\cos\theta)x+1=0 \Rightarrow$

$$x=\frac{2\cos 0\pm\sqrt{4\cos^2 0-4}}{2}=\cos 0\pm\sqrt{-\text{sen}^2 0} \Rightarrow x=\cos 0\pm i.\text{sen}\,0$$

Portanto: $x^m=(\cos\theta\pm i.\text{sen}\,\theta)=\cos(m\theta)\pm i.\text{sen}\,(m\theta)$

Por outro lado: $\frac{1}{x^m}=\frac{1}{\cos(m0)\pm i.\text{sen}(m\theta)}=\cos(m0)\mp i.\text{sen}(m0)$

Deste modo: $\frac{1}{x^m}+x^m=\cos(m0)\mp i.\text{sen}(m0)+\cos(m0)\pm i.\text{sen}(m0)=2.\cos(m0)$

11) (ITA-2009) Se $a=\cos\frac{\pi}{5}$ e $b=\text{sen}\frac{\pi}{5}$, então, o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a:

a) $a+bi$. b) $-a+bi$. c) $(1-2a^2b^2)+ab(1+b^2)i$

d) $a-bi$. e) $1-4a^2b^2+2ab(1-b^2)i$.

Solução:

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)^{54}=\cos\frac{54\pi}{5}+i.\text{sen}\frac{54\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}+i.\text{sen}\frac{4\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}+i\text{sen}\frac{\pi}{5}=-a+bi$$

12) (ITA-2010) Se z é uma solução da equação em C, $z - \bar{z} + |z|^2 = -\left[\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12}$, pode –se afirmar que

a) $i(z - \bar{z}) < 0$ b) $i(z - \bar{z}) > 0$ d) $|z| \in [5,6]$. d) $|z| \in [6,7]$. e) $\left|z + \frac{1}{z}\right| > 8$

Solução:

$$Z - \bar{Z} + |Z|^2 = -\left\{\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\sqrt{2}-1-i\sqrt{2}-i\right)\right]\right\}^{12}.$$

Efetuando o produto do segundo membro, obtém-se: $-(1-i)^{12}$

Como $1 - i = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{7\pi}{4} \rightarrow (1-i)^{12} = \left[\sqrt{2}\text{cis}\frac{7\pi}{4}\right]^{12} = 2^6\,\text{cis}\,21\pi = -64$

Daí: $Z - \bar{Z} + |Z|^2 = 64$. Fazendo $Z = a + bi$, com a e b reais: $(a + bi) - (a - bi) + a^2 + b^2 = 64$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 64 \\ 2b = 0 \end{cases} \rightarrow a = \pm 8 \Rightarrow Z = \pm 8 \Rightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right| > 8$$

13) (ITA-2011) Dado $z = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right)$ então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

a) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}i$ b) -1 c) 0 d) 1 e) $\frac{89}{6}\sqrt{3}i$

Solução:

Forma trigonométrica $z = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$

Vemos que $z - z^2 + z^3 = \text{cis}\,\frac{\pi}{3} + \text{cis}\,\frac{4\pi}{3} + \text{cis}\,2\pi = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) - \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3}\right) - (\cos 2\pi - i\text{sen}2\pi) = 0$

A soma de 3 em 3 é zero. Logo $\sum_{1}^{88} z^n = \sum_{1}^{87} z^n + \sum_{88}^{89} z^n = \sum_{88}^{89} z^n\,\text{cis}88.\frac{2\pi}{3} + \text{cis}89.\frac{2\pi}{3} -$

$= \text{cis}\,\frac{2\pi}{3} + \text{cis}\,\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + i\text{sen}\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

14) (ITA-2012) Sejam $z = n^3(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ)$ e $\omega = n(\cos 15^\circ - i\,\text{sen}\,15^\circ)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^3$ é real. Então, $\frac{z}{\omega}$ é igual a

A ( ) $\sqrt{3} + i$. B ( ) $2\left(\sqrt{3}+i\right)$.

C ( ) $2\left(\sqrt{2}+i\right)$ D ( ) $2\left(\sqrt{2}-i\right)$

E ( ) $2\left(\sqrt{3}-i\right)$

Solução:

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\text{sen}\frac{n\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{sen}\frac{n\pi}{4} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi \Rightarrow n = 4k \Rightarrow n_{min} = 4$$

$$\frac{z}{w} = n[\cos(45^\circ - 15^\circ) + i\text{sen}(45^\circ - 15^\circ)] = 4(\cos 30^\circ + i\text{sen}30^\circ) = 2(\sqrt{3}+i)$$

1.9. RADICIAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO (2ª LEI DE MOIVRE)

Teorema: Se $z = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$ e n é um inteiro positivo então existem exatamente n números complexos w de modo que $w = z^{1/n}$ dados por $w_k = z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$, onde $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Demonstração:

Se $w = z^{1/n}$ então $z = w^n \Rightarrow \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta) = [|w|(\cos\alpha + i.\text{sen}\,\alpha)]^n \Rightarrow$

$\rho(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta) = |w|^n(\cos n\alpha + i.\text{sen}\,n\alpha)$

Desta forma concluímos que:

i) $\rho = |w|^n \Rightarrow |w| = \rho^{1/n}$

ii) $\cos\theta = \cos n\alpha$ e $\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,n\alpha \Rightarrow n\alpha_k = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k \in Z$.

Note agora que os valores de α_k se repetem periodicamente quando fazemos k assumir todos os valores inteiros. Como $\alpha_{k+n} = \dfrac{\theta + 2(k+n)\pi}{n} = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + 2\pi = \alpha_k + 2\pi$ e cada valor de α_k representa o argumento de um número complexo (e portanto $0 \le \alpha_k < 2\pi$) então o argumento de w_{k+n} é igual ao argumento de w_k. Assim, os valores de α_k se repetem de n em n, fazendo que seja somente necessário aplicar em $\alpha_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ n valores consecutivos de k para obtermos todos os valores possíveis dos argumentos de $w = z^{1/n}$. Portanto, está demonstrado que existem exatamente n números complexos w tais que $w = z^{1/n}$.

Obs: Na verdade não é obrigatório tomar n números inteiros consecutivos para determinar os valores de α_k. Para tanto basta tomar n números inteiros de modo que cada um deixe um resto diferente da divisão por n. É evidente que a escola de $n = 0, 1, 2, ..., n - 1$ é no sentido de simplificar esta escolha.

Cada um dos valores de z_i ($0 \le i \le n - 1$) que satisfazem a equação $z^n = a + bi$ (a e $b \in \mathbb{R}$) recebe o nome de raiz de ordem n do número complexo $a + bi$.

Por exemplo, vamos calcular os números complexos z de modo que $z^3 = -8i$. Colocando na forma trigonométrica obtemos $z = 8[\cos(3\pi/2) + i.\text{sen}\,(3\pi/2)]$.

Logo:

$$z_k = (8)^{1/3}\left[\cos\left(\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i.\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow z_0 = 2i$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right] \Rightarrow z_1 = -\sqrt{3} - i$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 2\left[\cos\frac{11\pi}{6} + i.\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right] \Rightarrow z_2 = \sqrt{3} - i$$

Desta forma, podemos afirmar que $2i$, $-\sqrt{3} - i$ e $\sqrt{3} - i$ são as raízes de ordem 3 do número complexo $-8i$.

1.9.1. Raízes de Ordem n da Unidade

Um caso particular, mas com uma vasta quantidade de aplicações práticas, é determinar as soluções da equação $z^n = 1$, ou seja, calcular a n raízes de ordem n da unidade. Aplicando a 2ª Lei de Moivre obtemos:

$$z^n = 1 \Rightarrow z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Para $k = 0$: $z_0 = 1$.

Para $k = 1$: $z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Para $k = 2$: $z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right)$

Para $k = 3$: $z_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{6\pi}{n}\right)$

...

Para $k = n-1$: $z_{n-1} = \cos\left(\frac{2(k-1)\pi}{n}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{2(k-1)\pi}{n}\right)$

Porém, que esta não é uma maneira muito prática de trabalhar com estes números. Uma maneira mais prática é observar que $z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^k = (z_1)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Representando-se simbolicamente z_1 pela letra ε, temos que as n raízes de ordem n da unidade podem ser representadas por $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{n-1}$, onde $\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Logo, pode-se concluir que a seqüência das raízes de ordem n da unidade é uma progressão geométrica de n termos.

Esta notação permite calcular rapidamente determinadas expressões envolvendo as raízes de ordem n da unidade, uma vez que as propriedades das progressões geométricas poderão ser utilizadas. Por exemplo, vamos calcular o valor da soma das raízes de ordem n da unidade:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots + \varepsilon^{n-1} = \frac{1(\varepsilon^n - 1)}{\varepsilon - 1} = \frac{1-1}{\varepsilon - 1} = 0$$

Exemplos:

1) (UECE-2001) O valor de $\underline{a}$, no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, para o qual o número complexo $x = \cos a + i.\text{sen}a$ é tal que $x^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, satisfaz:

a) $\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{10} < a < \frac{\pi}{5}$

Solução:

Inicialmente observemos que $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ na forma trigonométrica fica da forma $z = \cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}$.

Portanto, aplicando a 2ª Lei de Moivre: $x_k = \cos\left(\frac{\pi/3 + 2k\pi}{2}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi/3 + 2k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1$.

- $k = 0 \Rightarrow x_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{\pi}{6}$

- $k = 1 \Rightarrow x_1 = \cos\frac{7\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{7\pi}{6}$

Desta forma, dentre os dois valores de argumento encontrados, o único no intervalo [0, π/2] é π/6, que está no intervalo definido pela alternativa d.

2) (UFPB-2003) Encontre os números complexos z, de módulo 1, tais que $\bar{z}.z^2.\bar{z}^3.z^4 = i$, onde $i^2 = -1$ e $\bar{z}$ é o conjugado de z.

Solução:

Aplicando módulo dos dois lados da equação: $\left|\bar{z}.z^2.\bar{z}^3.z^4\right| = |i| \Rightarrow |\bar{z}|.|z^2|.|\bar{z}^3|.|z^4| = 1 \Rightarrow$

$|z|.|z|^2.|z|^3.|z|^4 = 1 \Rightarrow |z|^{10} = 1 \Rightarrow |z| = 1$.

Por outro lado: $\bar{z}.z^2.\bar{z}^3.z^4 = i \Rightarrow z^2.\bar{z}.\bar{z}^3.z^4 = i \Rightarrow z^2.\bar{z}^4.z^4 = i \Rightarrow z^2.(z.\bar{z})^4 = i \Rightarrow$

$z^2.(|z|^2)^4 = i \Rightarrow z^2 = i \Rightarrow z^2 = \cos\frac{\pi}{2} + i.\text{sen}\frac{\pi}{2} \Rightarrow z_k = \cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}\right)$

- $k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4} \Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
- $k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{5\pi}{4} \Rightarrow z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

3) (UFRJ-2004) z é um número complexo tal que $z^7 = 1$, $z \neq 1$. Calcule: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$.

Solução:

Observe que a expressão $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ pode ser interpretada como a soma uma PG de 1º termo 1, 7 termos e razão z. Logo, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z^7 - 1}{z - 1}$. Uma vez que $z^7 = 1$, $z \neq 1$, então temos que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$.

4) (UFF-2006) Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 1$. Encontre, em C, todas as raízes do polinômio p(x).

Solução:

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \cos 0 + i.\text{sen}\,0 \Rightarrow x_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

- $k = 0 \Rightarrow x_0 = \cos 0 + i.\text{sen}\,0 = 1$
- $k = 1 \Rightarrow x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $k = 2 \Rightarrow x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5) (IME-70/71) Seja $F = \sqrt{-15 - 8i}$. Calcule F, escrevendo a resposta sob a forma $a + b.i$, com a e b inteiros.

Solução:

O número complexo – 15 – 8i possui módulo igual a 17 e argumento θ tal que $\cos\theta = -\frac{15}{17}$ e $\text{sen}\theta = -\frac{8}{17}$. Note que não é conhecido nenhum ângulo notável que possua estes valores de co-seno e seno, entretanto isto não impede de resolvermos o problema. Aplicando a 2ª Lei de Moivre:

$F_k = \sqrt{17}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{2}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{2}\right)\right]$, $k = 0, 1$.

- $k = 0 \Rightarrow F_0 = \sqrt{17}\left[\cos\frac{0}{2} + i.\text{sen}\frac{\theta}{2}\right]$
- $k = 1 \Rightarrow F_1 = \sqrt{17}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] \Rightarrow F_1 = -\sqrt{17}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i.\text{sen}\frac{\theta}{2}\right]$

Por relações trigonométricas temos que.

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ e $\text{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \Rightarrow \cos\frac{0}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ e $\text{sen}0 = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

Desde que θ é um arco do 3º quadrante do ciclo trigonométrico, então $\frac{0}{2}$ pertence ao 2º quadrante, ou seja, possui co-seno negativo e seno positivo. Assim: $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ e $\text{sen}\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

Deste modo conclui-se que: $F_0 = -1 + 4i$ e $F_1 = -1 - 4i$.

6) (ITA-2003) Das afirmações abaixo sobre a equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo:

I – A equação possui pelo menos um par de raízes reais.

II – A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.

III – Se $x \in N^*$ e r é uma raiz qualquer desta equação, então $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{r}{3}\right|^k < \frac{1}{2}$.

é (são) verdadeira(s):

a) nenhuma.
b) apenas I.
c) apenas II.
d) apenas III.
e) apenas I e III.

Solução:

Podemos escrever $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ como a soma dos termos de uma P.G., onde $a_1 = 1$ e $q = z$.

Assim, temos que: $1\frac{(z^5 - 1)}{z - 1} = 0$, como $z \neq 1$, teremos $z^5 - 1 = 0 \Rightarrow z^5 = 1 \Rightarrow$

$z = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$ onde $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos 0 + i.\text{sen}\,0 \Rightarrow z_0 = 1$ (não convém)

$k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{5}$

$k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i.\text{sen}\frac{4\pi}{5}$

$k = 3 \Rightarrow z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i.\text{sen}\frac{6\pi}{5}$

$k = 4 \Rightarrow z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i.\text{sen}\frac{8\pi}{5}$

I. Verdadeira: Vemos que todas as raízes são números complexos não reais;

II. Falsa: Como todas são da forma $z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ elas também terão módulo 1.

III. Verdadeira: Como todas tem modulo 1, podemos escrever $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{r}{3}\right|^k = \sum_{k=1}^{n}\frac{|r|^k}{|3|^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$

Portanto:

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...\frac{1}{3^n}$ é uma P.G. com $a_1=\frac{1}{3}$ e $q=\frac{1}{3}$.

Fazendo n tender ao infinito $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

Como $n \in \mathbb{N}$, então há um número finito de termos, daí $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{r}{3}\right|^k<\frac{1}{2}$, portanto é verdadeira.

7) (IME-89/90) Resolva a equação: $z^5=\bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado do número complexo z.

Solução:

Inicialmente podemos observar que $z = 0$ satisfaz a equação.

Aplicando módulo dos dois lados da equação complexa: $|z|^5=|\bar{z}| \Rightarrow |z|^5=|z| \Rightarrow |z|^4=1 \Rightarrow |z|=1$.

Multiplicando os dois lados da equação original por z ($z \neq 0$) obtemos:

$z.z^5=z.\bar{z} \Rightarrow z^6=|z|^2 \Rightarrow z^6=1$

Desta forma, as raízes primitivas de ordem 6 da unidade são raízes da equação $z^5=\bar{z}$. Logo.

$z_k=\cos\frac{2k\pi}{6}+i.\text{sen}\frac{2k\pi}{6}=\cos\frac{k\pi}{3}+i.\text{sen}\frac{k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Portanto, também são raízes da equação os números complexos:

$1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

8) (IME-88/89) Mostre que todas as raízes da equação $(z+1)^5+z^5=0$ pertencem a mesma reta paralela ao eixo imaginário.

Solução:

$(z+1)^5+z^5=0 \Rightarrow (z+1)^5=-z^5 \Rightarrow \frac{(z+1)^5}{z^5}=-1 \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right)^5=-1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{z}\right)^5=-1$.

Desta forma, $1+\frac{1}{z}$ assume cinco valores, que são exatamente as raízes de ordem 5 de -1. Uma vez que o número complexo -1 na pode ser colocado na forma trigonométrica $\cos\pi+i.\text{sen}\,\pi$, então:

$\left(1+\frac{1}{z}\right)^5=\cos\pi+i.\text{sen}\pi \Rightarrow 1+\frac{1}{z}=\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)+i.\text{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Fazendo $\theta_k=\frac{\pi+2k\pi}{5}: \frac{1}{z}=\cos\theta_k-1+i.\text{sen}\theta_k \Rightarrow z=\frac{1}{\cos\theta_k-1+i.\text{sen}\theta_k} \Rightarrow$

$z=\frac{\cos\theta_k-1-i.\text{sen}\theta_k}{(\cos\theta_k-1)^2+(\text{sen}\theta_k)^2}=\frac{\cos\theta_k-1-i.\text{sen}\theta_k}{\cos^2\theta_k-2.\cos\theta_k+1+\text{sen}^2\theta_k}=\frac{\cos\theta_k-1-i.\text{sen}\theta_k}{2(1-\cos\theta_k)}=-\frac{1}{2}-i\frac{\text{sen}\theta_k}{2(1-\cos\theta_k)}$

Uma vez que, para $k = 0, 1, 2, 3$ e 4, temos que $\text{Re}(z)=-\frac{1}{2}$, os cinco valores de z pertencem a uma reta paralela ao eixo imaginário, que é a reta definida pela expressão $\text{Re}(z)=-\frac{1}{2}$.

9) (ITA-2008) Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6+256=0$, na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a $S=\{z \in \mathbb{C}; 1<|z+2|<3\}$.

Solução:

$4Z^6 + 256 = 0 \Rightarrow z^6 = -64 \Rightarrow Z_k = 2\,\text{cis}\,\frac{\pi + 2k\pi}{6}$, $k = 0,1,2,3,4,5 \Rightarrow$

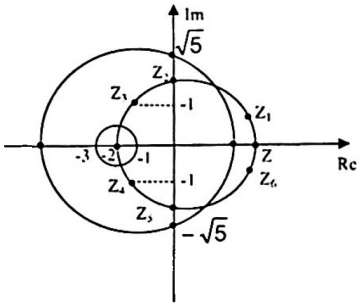
$$\begin{cases} Z_0 = 2\text{cis}\,\frac{\pi}{6}, Z_1 = 2\text{cis}\,\frac{\pi}{2} \\ Z_2 = 2\text{cis}\,\frac{5\pi}{6}, Z_3 = 2\text{cis}\,\frac{7\pi}{6} \\ Z_4 = 2\text{cis}\,\frac{3\pi}{2}, Z_5 = 2\text{cis}\,\frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

$|z_0 + 2| = |z_5 + 2| = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} > 3$

$|z_1 + 2| = |z_4 + 2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \Rightarrow$ pertence a S

$|z_2 + 2| = |z_3 + 2| = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} > 3 \Rightarrow$ pertence a S.

Fazendo o gráfico, temos:



Logo: $S = \{2i, -2i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i\}$

10) (ITA-2013) Considere a equação em C, $(z - 5 + 3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é.

a) ( ) $\sqrt{29}$ b) ( ) $\sqrt{41}$ c) ( ) $3\sqrt{5}$ d) ( ) $4\sqrt{3}$ e) ( ) $3\sqrt{6}$

Solução:

$z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow (z - 5 + 3i)^4 = 1 \Leftrightarrow [(a-5) + (b+3)i]^4 = 1 \Rightarrow a - 5 + (b+3)i = \sqrt[4]{1}$

1) $a - 5 + (b+3)i = 1 \Rightarrow a + bi = 6 - 3i \Rightarrow \text{tg}\theta_1 = -\frac{1}{2}$

2) $a - 5 + (b+3)i = -1 \Rightarrow a + bi = 4 - 3i \Rightarrow \text{tg}\theta_2 = -\frac{3}{4}$

3) $a - 5 + (b+3)i = i \Rightarrow a + bi = 5 - 2i \Rightarrow \text{tg}\theta_3 = -\frac{2}{5}$

4) $a - 5 + (b+3)i = -i \Rightarrow a + bi = 5 - 4i \Rightarrow \text{tg}\theta_4 = -\frac{4}{5}$

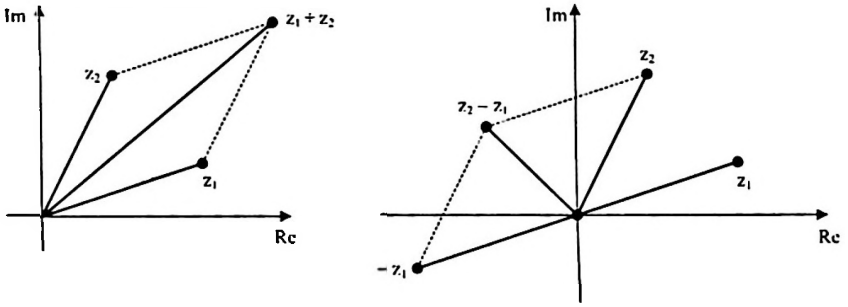
O número complexo de menor argumento é o que possui menor valor de tg θ, que é – 4/5:

$|z_0| = = |5 - 4i| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

1.10. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

1.10.1. Adição e Subtração de Números Complexos

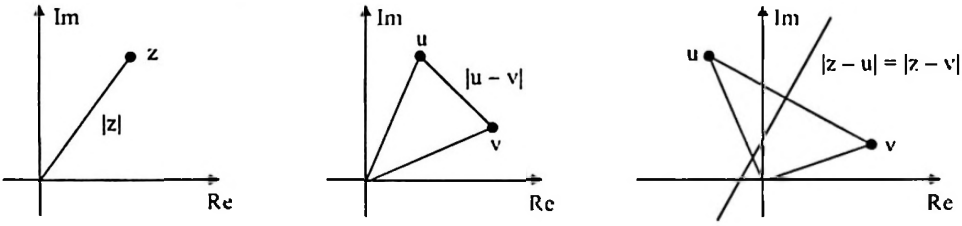
Uma vez que a soma e a subtração de números complexos funcionam de forma idêntica à soma e subtração de vetores, então a interpretação geométrica da soma e subtração de números complexos também respeita à regra do paralelogramo.



Observe que esta interpretação geométrica para a soma de números complexos fornece uma demonstração trivial para a propriedade $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, bastando para isto observar as desigualdades triangulares existentes nos triângulos formados para a determinação de $z_1 + z_2$.

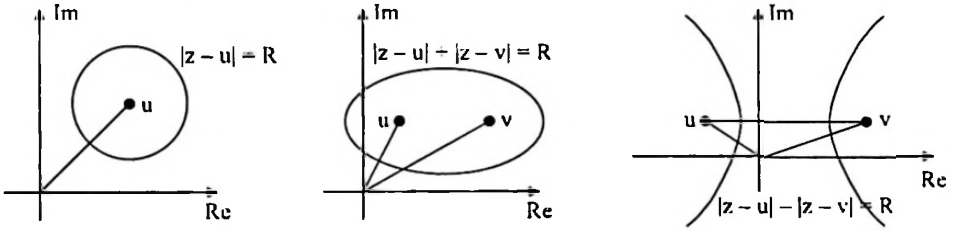
1.10.2. Módulo

Sejam $z = x + yi$ (x e $y \in \mathbb{R}$) um número complexo qualquer, $u = a - bi$ e $v = c + di$ (c, d, m e $n \in \mathbb{R}$) números complexos fixos. Pela similaridade com o sistema de eixos cartesiano, a expressão $|z|$, que vale $\sqrt{x^2 + y^2}$ pode ser interpretada como a distância do número complexo z à origem do plano complexo. Analogamente, a expressão $|u - v| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ representa a distância entre os afixos dos números complexos u e v. Podemos observar, então, que o módulo de um número complexo está intimamente ligado a idéia de distância no plano complexo. De acordo com este raciocínio, a expressão $|z - (a + bi)| = |z - (c + di)|$ significa que z está a uma igual distância de dos afixos de u e v. Logo, os números complexos z que satisfazem esta expressão formam a mediatriz do segmento de reta que une os afixos de u e v.



Pode-se afirmar, portanto, que o lugar geométrico, no plano complexo, dos números complexos $z = x + yi$ tais que $|z - (a + bi)| = R$ ($R \in \mathbb{R}_+^*$) é a circunferência de centro em $a + bi$ e raio R. Na forma analítica, a expressão $|z - (a + bi)| = R$ se transforma em $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, que é a equação de uma circunferência. Analogamente, os complexos z que satisfazem $|z - (a + bi)| \leq R$ formam um círculo de raio R no plano complexo.

Perceba que a expressão $|z - (a + bi)| + |z - (c + di)| = R$ ($R \in \mathbb{R}_+^*$) representa os pontos no plano complexo cuja soma das distâncias aos afixos de u e v é constante, ou seja, os pontos z formam uma elipse de focos em u e v. Do mesmo modo, os pontos z que satisfazem $|z - (a + bi)| - |z - (c + di)| = R$ formam uma hipérbole com focos em u e v.



1.10.3. Produto e Divisão de Números Complexos

A expressão da multiplicação de dois números complexos na forma trigonométrica

$$z_1.z_2 = \rho_1(\cos\alpha + i.\text{sen}\,\alpha)\,\rho_2(\cos\beta + i.\text{sen}\,\beta) = \rho_1.\rho_2[\cos(\alpha + \beta) + i.\text{sen}\,(\alpha + \beta)],$$

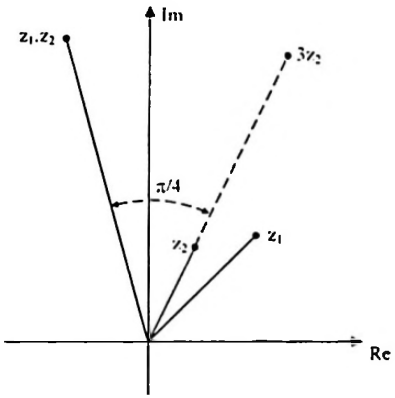
analisada do ponto de vista de z_1, pode ser geometricamente interpretada da seguinte maneira:

i) a distância à origem, que valia ρ_1, passa a ser agora $\rho_1.\rho_2$;

ii) o segmento que liga o afixo de z_1 à origem é rotacionado no sentido anti-horário de um ângulo β.

Desta maneira, a multiplicação de dois complexos pode ser interpretada, no plano complexo, como uma translação do afixo e como uma rotação do argumento de cada um dos números complexos em função do módulo e do argumento do outro número.

Por exemplo, sejam $z_1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$ e $z_2 = \sqrt{3} + i$. Colocando na forma trigonométrica temos que $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. Pela interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos, analisando $z_1.z_2$ do ponto de vista de z_2, o resultado $z_1.z_2$ representa uma translação do afixo de z_2 de três vezes o seu tamanho e uma rotação de $\pi/4$ no sentido anti-horário. A figura ao lado mostra como obter $z_1.z_2$ aplicando uma translação de uma rotação sobre z_2.

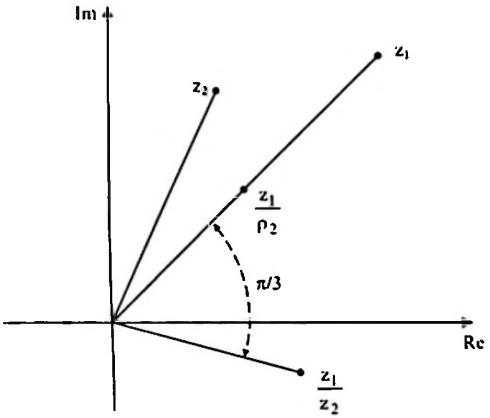


Se $z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i.\text{sen}\,\alpha)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\beta - i.\text{sen}\,\beta)$ ($z_2 \neq 0$) sabe-se que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\alpha - \beta) + i.\text{sen}(\alpha - \beta)]$$

Utilizando o mesmo raciocínio usado na interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos, podemos concluir que a interpretação geométrica da divisão de dois números complexos se baseia em uma translação e uma rotação de um número complexo em função do módulo e argumento do outro, respectivamente. Baseando a análise em z_1, pode-se afirmar que obtém-se geometricamente a distância de z_1/z_2 à origem transladando o afixo de z_1 de um fator $1/\rho_2$ e obtém-se o argumento de z_1/z_2 rotacionando o argumento de z_1 de um ângulo β no sentido horário.

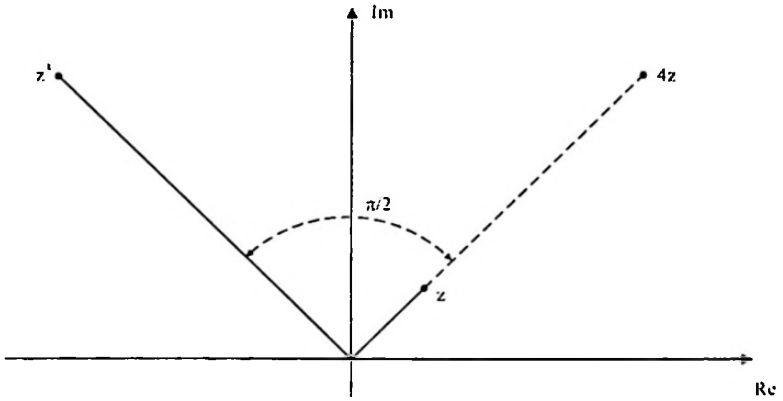
Tomando os mesmo números complexos do exemplo anterior, $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, podemos obter $\frac{z_1}{z_2}$ da seguinte maneira:



1.10.4. Potenciação e Radiciação de Números Complexos

Uma vez que, se $z = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$, então $z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i.\text{sen}(n\theta)]$, pode-se observar que a interpretação geométrica da potenciação de um número complexo é a mesma da multiplicação de dois complexos. Portanto, para determinarmos geometricamente z^n basta fazer uma translação do afixo (de um fator ρ^{n-1}) e uma rotação no sentido horário de um ângulo $(n-1)\theta$.

Por exemplo, seja $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, que forma trigonométrica fica $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4})$. O valor de z^3 pode ser geometricamente obtido transladando o afixo de z de modo que sua distância à origem aumente 4 vezes e rotacionando (no sentido anti-horário) seu argumento de um valor $\pi/2$.



A interpretação geométrica da radiciação de um número complexo é um pouco mais trabalhosa pois temos como resultado desta operação vários complexos. Sabe-se que existem exatamente n números complexos distintos que satisfazem a equação $z^n = \rho(\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)$. Estes n números complexos podem ser colocados da seguinte forma:

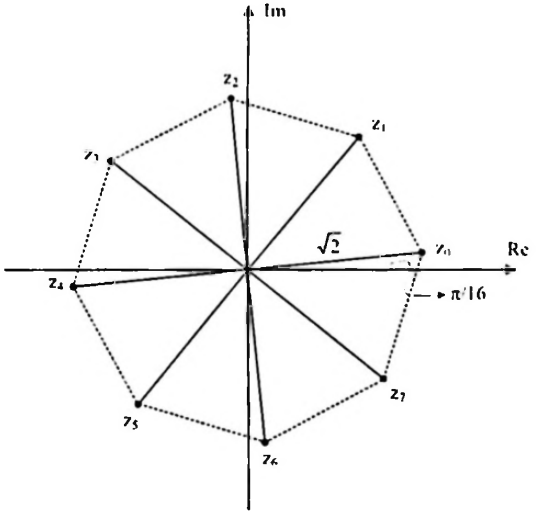
$$z_0 = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta}{n} + i.\text{sen}\frac{\theta}{n}\right],\ z_1 = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i.\text{sen}\frac{\theta+2\pi}{n}\right],\ z_2 = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+4\pi}{n} + i.\text{sen}\frac{\theta+4\pi}{n}\right],\ \ldots,$$

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i.\text{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right],\ \ldots,\ z_{n-1} = \rho^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i.\text{sen}\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right].$$

Uma rápida observação destes números nos permite concluir que:

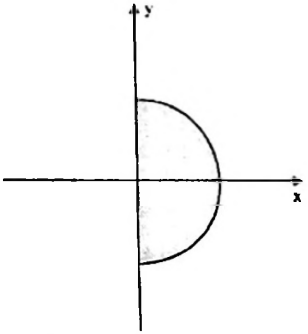
- Os módulos (distâncias até a origem) de todos os z_i, $i \in \mathbb{N}$, $0 \le i \le n-1$, são iguais;
- A diferença entre os argumentos de dois números complexos consecutivos na seqüência acima vale $\arg(z_{i+1}) - \arg(z_i) = \frac{2\pi}{n}$.
- Lembrando que $z_n = z_0$, temos também que $\arg(z_{n-1}) - \arg(z_n) = \frac{2\pi}{n}$.

Estas três observações implicam que os afixos destes números complexos formam um polígono regular de n vértices com centro na origem. Por exemplo, suponha que $z^8 = 16i$. Colocando na forma trigonométrica temos que $z^8 = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i.\text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$. A interpretação geométrica dos 8 números complexos que satisfazem esta equação são os 8 vértices de um octógono regular com centro na origem. Além disso, temos que $|z_1| = \rho^{1/8} = 16^{1/8} = \sqrt{2}$ e o argumento de z_0 vale $\frac{0}{8} = \frac{\pi}{16}$.



Exemplos:

1) (Unesp-2006) A figura representa, no plano complexo, um semicírculo de centro na origem e raio 1.



Indique por Re(z), Im(z) e | z | a parte real, a parte imaginária e o módulo de um número complexo z = x + yi, respectivamente, onde i indica a unidade imaginária. A única alternativa que contém as condições que descrevem totalmente o subconjunto do plano que representa a região sombreada, incluindo sua fronteira, é

a) $Re(z) \geq 0$, $Im(z) \geq 0$ e $|z| \leq 1$.
b) $Re(z) \geq 0$, $Im(z) \leq 0$ e $|z| \leq 1$.
c) $Re(z) \geq 0$ e $|z| \geq 1$.
d) $Im(z) \geq 0$ e $|z| \geq 1$.
e) $Re(z) \geq 0$ e $|z| \leq 1$.

Solução:

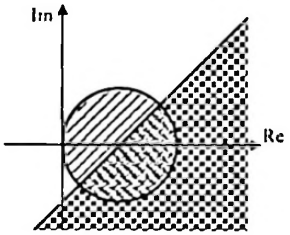
Sabe-se que, no plano complexo, o lugar geométrico dos pontos que pertencem ao círculo de centro na origem e raio unitário é representado pela expressão $|z| \leq 1$. No caso de os pontos que interessam pertencem somente ao 1º e 4º quadrante, devemos acrescentar a restrição $IRe(z) \geq 0$.

2) (Mackenzie-99) Dentre os complexos z = (x, y) tais que $\begin{cases} |z-1| \leq 1 \\ x - y \geq 1 \end{cases}$, aquele de maior módulo tem:

a) $x > 0$ e $y = 0$
b) $x < 0$ e $y = 0$
c) $x > 0$ e $y < 0$
d) $x > 0$ e $y > 0$
e) $x = 0$ e $y > 0$

Solução:

O lugar geométrico dos afixos dos números complexos que satisfazem $|z - 1| \leq 1$ é o círculo centrado em z = 1 e raio igual a 1. Por outro lado, o lugar geométrico dos afixos de z = x + yi que satisfazem a equação $x - y \geq 1$ é o semi-plano formado pelos pontos que estão abaixo da reta y = x – 1. O esquema abaixo representa no plano complexo estas regiões.



Pela figura, fica claro que o número complexo que pertence à interseção do círculo com o semi-plano que apresenta maior módulo (ou seja, mais distante da origem do plano complexo) é o número z = 2 + 0.i
Logo, para este número temos que x = 2 e y = 0 (Alternativa A)

3) (Cefet/PR-2003) O número complexo, cujas raízes sextas estão representadas a seguir, é:

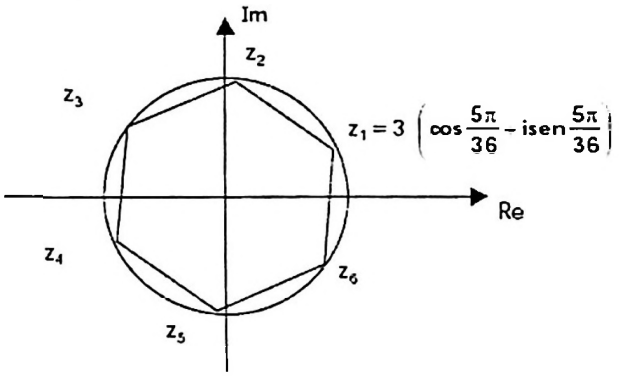
a) $729\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i.\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

b) $27\left(\cos\frac{5\pi}{216}+i.\text{sen}\frac{5\pi}{216}\right)$

c) $729\left(\cos\frac{5\pi}{36}+i.\text{sen}\frac{5\pi}{36}\right)$

d) $81\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i.\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

e) $27\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i.\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$



Solução:

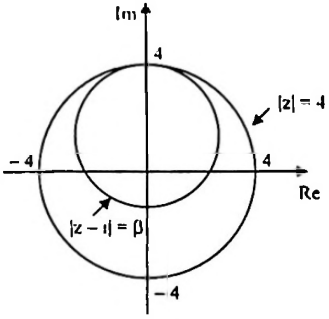
Uma vez que os afixos de z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6 formam um hexágono regular centrado na origem, estes seis números complexos são raízes de uma equação da forma $z^6 = w$.

Portanto, pela 1ª Lei de Moivre: $w = z_1^6 = \left[3\left(\cos\frac{5\pi}{36}+i\,\text{sen}\frac{5\pi}{36}\right)\right]^6 = 729\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i.\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$

4) (UFMG-2004) Seja z um número complexo. Considere este sistema $\begin{cases} |z|=4 \\ |z-i|=\beta \end{cases}$. Determine β para que esse sistema tenha solução única.

Solução:

Sabemos que os números complexos z que satisfazem a equação $|z| = 4$ formam uma circunferência centrada na origem e raio 4. Analogamente, os números complexos que satisfazem $|z - i| = \beta$ formam uma circunferência centrada em $z_0 = i$ e raio β. De modo que apenas um número complexo pertença a ambas circunferências, devemos ter que estas duas circunferências sejam tangentes (interiores ou exteriores).



Entretanto, como $z_0 = 1$ pertence ao interior da circunferência definida por $|z| = 4$, existe apenas uma configuração possível, que consiste nas duas circunferências sendo tangentes internas, que pode ser separada em dois casos, dependendo de qual circunferência está interna. Para que isto ocorra, a distância entre os centros deve ser igual à subtração dos raios:

1º caso ($|z| = 4$ externa): $1 - 0 = 4 - \beta \Rightarrow \beta = 3$.

2º caso ($|z| = 4$ interna): $1 - 0 = \beta - 4 \Rightarrow \beta = 5$

5) (ITA-97) Considere no plano complexo, um hexágono regular centrado em $z_0 = i$. Represente $z_1, z_2, \ldots z_6$ seus vértices, quando percorridos no sentido anti-horário. Se $z_1 = 1$ então $2z_3$ é igual a:

a) $2 + 4i$ b) $(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 3)i$ c) $\sqrt{6} + (\sqrt{2} + 2)i$

d) $(2\sqrt{3} - 1) + (2\sqrt{3} + 3)i$ e) $\sqrt{2} + (\sqrt{6} + 2)i$

Solução:

Os seis números complexos cujos afixos formam o hexágono regular centrado em $z_0 = i$ são raízes de uma equação da forma $(z - z_0)^6 = w$:

i) $(z-i)^6 = w \Rightarrow (1-i)^6 = w \Rightarrow w = 8i$

ii) $(z-i)^6 = 8i = 8(\cos \pi/2 + i.\text{sen}\, \pi/2) \Rightarrow z = i + \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{\pi/2+2k\pi}{6}\right)$

Note que $z_1 = 1$ para $k = 5$. Assim, z_3 corresponde a $k = 7$, que por sua vez equivale a $k = 1$:

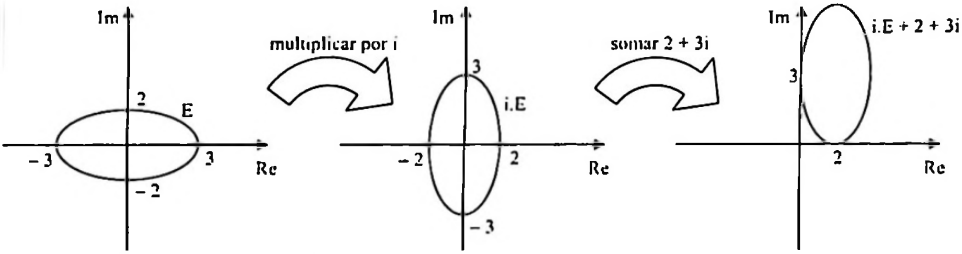
$$2z_3 = 2i + 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2i + 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right) \Rightarrow$$

$$2z_3 = 2i + 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} + \frac{i\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\right) = 2i + \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3}+1) \Rightarrow 2z_3 = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3}+3)i$$

6) (IME-78/79) Seja $g: C \to C$ a função definida por $g(x + yi) = i(x + yi) + 2 + 3i$. Dada a elipse $E = \{x + iy \,|\, x^2/9 + y^2/4 = 1; x, y \in \Re\}$. Determine sua imagem $g(E)$ pela função g.

Solução:

Da geometria analítica sabe-se que o conjunto os afixos dos números complexos que compõe o conjunto E formam uma elipse centrada na origem, possuindo semi-eixo maior sobre o eixo real (com valor 3) e semi-eixo menor sobre o eixo imaginário (com valor 2). Observe que multiplicar cada número complexo de E por i consiste em rotacionar cada um deles de 90° no sentido anti-horário. Por outro lado, somar 2 + 3i a cada número complexo de i.E equivale a transladar 2 unidades para a direita e 3 para cima todos os complexos de pertencem a i.E. A figura abaixo representa geometricamente as duas operações.



Desta maneira, a imagem de g(E) é uma elipse centrada em 2 + 3i, com semi-eixo maior paralelo ao eixo imaginário valendo 3 unidades e com semi-eixo menor paralelo ao eixo real valendo 2 unidades. Logo, a imagem de g(E) é dada por $\{x + iy \,|\, (x-2)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1;\ x, y \in \mathbb{R}\}$

7) (IME-70/71) Determine os pontos do plano complexo que satisfazem simultaneamente às equações:

$$|z - 2| = |z + 4| \quad \text{e} \quad |z - 3| + |z + 3| = 10.$$

Solução:

Os afixos que satisfazem $|z - 2| = |z + 4|$ formam a mediatriz do segmento cujos extremos são os números complexos $z_1 = 2$ e $z_2 = -4$, ou seja, formado pelos afixos de $z = x + yi$ que satisfazem a relação $x = -1$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$.

Os afixos que satisfazem $|z - 3| + |z + 3| = 10$ forma uma elipse de focos em $z_3 = 3$ e $z_4 = -3$.

Nesta elipse temos: $2c = 6$ e $2a = 10 \Rightarrow c = 3$ e $a = 5 \Rightarrow b = 4$.

Como os focos pertencem ao eixo real e estão a mesma distância da origem, o centro da elipse coincide com a origem do plano complexo. Logo, a equação da elipse é dada por: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

As interseções desta elipse com a reta $x = -1$ podem ser calculadas sa seguinte forma:

$$\frac{(-1)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} = \frac{24}{25} \Rightarrow y = \pm\frac{8\sqrt{6}}{5}$$

Deste modo, os números complexos que satisfazem as duas equações são $-1 + \frac{8\sqrt{6}}{5}i$ e $-1 - \frac{8\sqrt{6}}{5}i$.

1.11. FÓRMULA DE EULER

Pela expansão em série de Taylor (*) das funções sen x e cos x temos que:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Expandindo agora a função e^x em série de Taylor obtemos.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Assim, trocando x por i.x na expansão em série de Taylor de e^x obtemos:

$$e^{i.x} = 1 + i.x + \frac{(i.x)^2}{2!} + \frac{(i.x)^3}{3!} + \frac{(i.x)^4}{4!} + \frac{(i.x)^5}{5!} + \frac{(i.x)^6}{6!} + \frac{(i.x)^7}{7!} + \ldots \Rightarrow$$

$$e^{i.x} = 1 + i.x - \frac{x^2}{2!} - \frac{i.x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{i.x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{i.x^7}{7!} + \ldots \Rightarrow$$

$$e^{i.x} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i.\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) \Rightarrow \boxed{e^{i.x} = \cos x + i.\operatorname{sen} x}$$

Esta expressão é conhecida como fórmula de Euler. Ela nos permite calcular a exponencial de qualquer número complexo, uma vez que, se $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, temos que:

$$e^{a+bi} = e^a.e^{bi} = e^a(\cos b + i.\operatorname{sen} b)$$

(*) Procure por um livro universitário sobre série de funções para ter mais detalhes de como calcular a expansão em série de Taylor de uma função.

Exemplos:

1) (IME-80/81) Calcule i^i.

Solução:

Inicialmente podemos observar que $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}i} = i$.

Assim: $i^i = (e^{\frac{\pi}{2}i})^i = e^{\frac{\pi}{2}i^2} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

2) (IME-55/56) Determine n natural para que $(x + k)^n - x^n - k^n = 0$, onde k é um real diferente de zero e $x = ke^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Solução:

Determinando x: $x = ke^{\frac{2\pi}{3}i} = k(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow x = k\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Logo: $(x + k)^n = x^n + k^n \Rightarrow k^n\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = k^n\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n + k^n \Rightarrow$

$$(\cos\frac{\pi}{3} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{3})^n = (\cos\frac{2\pi}{3} + i.\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3})^n + 1 \Rightarrow \cos\frac{n\pi}{3} + i.\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} = \cos\frac{2n\pi}{3} + i.\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3} + 1 \Rightarrow$$

$$\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right) + i.\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}\right) = 1$$

Assim, devemos ter:

$$\text{(i) } \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2n\pi}{3} = \frac{n\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow n = 6k \\ \text{ou} \\ \frac{2n\pi}{3} = \pi - \frac{n\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\text{(ii) } \cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3} = 1 \Rightarrow -2.\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}).\operatorname{sen}(-\frac{n\pi}{6}) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}).\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{6}) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Observe que $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$ somente pode assumir os valores 0, 1 e – 1. Observe que destes valores somente 1 e – 1 convém, uma vez que se sen $(n\pi/2) = 0$, a expressão (1) não valeria. Assim:

- $\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}) = \pm 1 \Rightarrow \frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow n = 2k+1$
- $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow n = 6k+1 \\ \text{ou} \\ \frac{n\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Rightarrow n = 6k+5 \end{cases}$

Fazendo a interseção de (i) e (ii) obtemos que $n = 6k + 1$ ou $n = 6k + 5$, $k \in Z$.

3) (IME-68/69) Sejam:
i) A e B números reais, $B \neq 0$.
ii) n e k, inteiros, maiores que zero.
iii) Para cada n, seja r_n a raiz principal (menor determinação) de índice n do número $i^{4n+1} + i^{4n}$.

Admitamos que $\dfrac{A.c^{4.\pi.i} + B.c^{\frac{3.\pi.i}{4}}}{r_n} = k$. Determinar o valor de n de tal forma que A/B seja mínimo.

Solução:

Claramente: $z = i^{4n+1} + i^{4n} = 1 + i = 2^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})$

A raiz principal de z é igual a $z_0^{1/n} = 2^{\frac{1}{2n}}(\cos\frac{\pi}{4n} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n})$

Pela fórmula de Euler temos que:
i) $e^{4\pi i} = \cos 4\pi + i.\operatorname{sen} 4\pi = 1$;
ii) $e^{\frac{3\pi i}{4}} = \cos(3\pi/4) + i.\operatorname{sen}(3\pi/4) = -1 + i$.

$$k = \frac{A.c^{4.\pi.i} + B.c^{\frac{3.\pi.i}{4}}}{r_n} = \frac{A + B(-1+i)}{2^{\frac{1}{2n}}(\cos\frac{\pi}{4n} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n})} = \frac{[(A-B) + Bi]\left[\cos\frac{\pi}{4n} - i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}\right]}{2^{\frac{1}{2n}}}$$

Uma vez que k é inteiro, temos que $\operatorname{Im}(k) = 0$:

$$B.\cos\frac{\pi}{4n} - (A-B).\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n} = 0 \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\cos\frac{\pi}{4n} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}} = 1 + \cot\frac{\pi}{4n}$$

Portanto, concluímos que A/B é mínimo quando $\cot(\pi/4n)$ é mínimo. Observe agora que para $n \in \mathbb{N}^*$ temos que $0 < \pi/4n \leq \pi/4$. Desde que a função cotangente é decrescente no 1º quadrante trigonométrico, o menor valor de $\cot(\pi/4n)$ ocorre para $n = 1$. Substituindo $n = 1$ obtemos $A/B = 2$ e $k = A$.

1.12. SOMATÓRIOS E IDENTIDADES

Os números complexos, se aplicados de forma inteligente, podem ser utilizados para calcular alguns somatorios e demonstrar certas identidades que envolvam expressões trigonométricas ou fatoriais de números inteiros. Como não há uma maneira universal de atacar cada problema, estas aplicações serão feitas através de exemplos, separando em dois casos: aplicações na trigonometria e em números binomiais.

1.12.1. Aplicações na trigonometria

Exemplo 1: Calcule o valor de S = sen x + sen 2x + ... + sen nx.

Solução:

Seja z um número complexo com módulo 1 e argumento x, ou seja, z = cos x + i.sen x.

Da 1ª Lei de Moivre tem-se que $z^2 = \cos 2x + i.\text{sen } 2x$, $z^3 = \cos 3x + i.\text{sen } 3x$, ..., $z^n = \cos nx + i.\text{sen } nx$.

Assim, S é igual à soma das partes imaginárias de z, z^2, z^3, ..., z^n. Portanto, pode-se reescrever S:

$S = \text{Im}(z) + \text{Im}(z^2) + ... + \text{Im}(z^n) = \text{Im}(z + z^2 + z^3 + ... + z^n)$

Observando que $z + z^2 + z^3 + ... + z^n$ é uma soma de uma progressão geométrica de n termos, onde o primeiro termo é igual a z e a razão é também igual a z:

$$S = \text{Im}\left(\frac{z(z^n - 1)}{z - 1}\right) \Rightarrow S = \text{Im}\left(\frac{z^{n+1} - z}{z - 1}\right) \Rightarrow S = \text{Im}\left(\frac{\cos(n+1)x + i.\text{sen}(n+1)x - \cos x - i.\text{sen}x}{\cos x + i.\text{sen}x - 1}\right) \Rightarrow$$

$$S = \text{Im}\left(\frac{[\cos(n+1)x - \cos x] + i[\text{sen}(n+1)x - \text{sen}x]}{(\cos x - 1) + i.\text{sen}x}\right) \Rightarrow$$

$$S = \text{Im}\left(\frac{[\cos(n+1)x - \cos x] + i[\text{sen}(n+1)x - \text{sen}x]}{(\cos x - 1) + i.\text{sen}x} \cdot \frac{(\cos x - 1) - i.\text{sen}x}{(\cos x - 1) - i.\text{sen}x}\right) \Rightarrow$$

Como está-se interessado somente na parte imaginária do numerador deste produto, basta então multiplicar a parte real do 1º número com a parte imaginária do 2º número e somar com o produto da parte imaginária do 1º número com a parte real do 2º número, dividindo tudo pelo denominador, que é um número real:

$$S = \frac{(\cos(n+1)x - \cos x)(-\text{sen}x) + (\text{sen}(n+1)x - \text{sen}x)(\cos x - 1)}{(\cos x - 1)^2 + \text{sen}^2 x} \Rightarrow$$

$$S = \frac{-\cos(n+1)x.\text{sen}x + \text{sen}x.\cos x + \text{sen}(n+1)x.\cos x - \text{sen}(n+1)x - \text{sen}x.\cos x + \text{sen}x}{1 - 2.\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x} \Rightarrow$$

$$S = \frac{-\cos(n+1)x.\text{sen}x + \text{sen}(n+1)x.\cos x - \text{sen}(n+1)x + \text{sen}x}{2 - 2.\cos x}$$

Note agora que o termo sen (n + 1)x.cos x – cos (n + 1)x.sen x pode ser encarado com sendo a expressão do seno da subtração dos arcos (n + 1)x e x, ou seja:

sen (n + 1)x.cos x – cos (n + 1)x.sen x = sen[(n + 1)x – n] = sen nx

O denominador na última expressão determinada para S também pode ser transformado. Uma vez que $\text{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$, então tira-se que $2(1 - \cos x) = 4.\text{sen}^2\frac{x}{2}$.

Desta forma: $S = \frac{\text{sen}(nx) - \text{sen}(n+1)x + \text{sen}x}{4.\text{sen}^2\frac{x}{2}} = \frac{-2.\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right).\text{sen}\frac{x}{2} + 2.\text{sen}\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}}{4.\text{sen}^2\frac{x}{2}} \Rightarrow$

$$S = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2.\text{sen}\frac{x}{2}}$$

Exemplo 2: Exprima cos 5x como função somente de cos x.
Solução:
Seja z = cos x + i.sen x. Usando a 1ª Lei de Moivre tem-se que:
$(\cos x + i.\text{sen } x)^5 = \cos 5x + i.\text{sen } 5x \Rightarrow \cos 5x = \text{Re}[(\cos x + i.\text{sen } x)^5]$
Expandindo $(\cos x + i.\text{sen } x)^5$ usando o binômio de Newton:

$$(\cos x + i.\text{sen}x)^5 = \binom{5}{0}\cos^5 x + \binom{5}{1}\cos^4 x.(i.\text{sen}x) + \binom{5}{2}\cos^3 x.(i.\text{sen}x)^2 + \binom{5}{3}\cos^2 x.(i.\text{sen}x)^3 +$$

$$+\binom{5}{4}\cos x.(i.\text{sen}x)^4 + \binom{5}{5}(i.\text{sen}x)^5$$

Uma vez que somente interessa a parte real de $(\cos x + i \text{ sen } x)^5$, os termos em que a unidade imaginária aparece elevada a um expoente impar somente contribuem para o cálculo da parte imaginária. Logo:
$\cos 5x = \cos^5 x - 10.\cos^3 x.\text{sen}^2 x + 5.\cos x.\text{sen}^4 x \Rightarrow$
$\cos 5x = \cos^5 x - 10.\cos^3 x(1 - \cos^2 x) + 5.\cos x.(1 - \cos^2 x)^2 \Rightarrow$
$\cos 5x = \cos^5 x - 10.\cos^3 x - 10.\cos^5 x + 5.\cos x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \Rightarrow$
$\cos 5x = 11.\cos^5 x - 10.\cos^3 x + 5.\cos x - 10.\cos^3 x + 5.\cos^5 x \Rightarrow$
$\cos 5x = 16.\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5.\cos x$

1.12.1. Aplicações nos números binomiais

Exemplo 1: (ITA-95) Para cada $n \in N$, temos que $1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \ldots - \binom{4n}{4n-2} + 1$ é igual a:

a) $(-1)^n 2^{2n}$. b) 2^{2n}. c) $(-1)^n 2^n$. d) $(-1)^{n-1} 2^{2n}$. e) $(-1)^{n-1} 2^n$.

Solução:

Considere o número complexo $z = 1 + i$, que na forma trigonométrica é escrito $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{\pi}{4})$.

Pela 1ª Lei de Moivre tem-se que: $(1 + i)^{4n} = 2^{2n}(\cos n\pi + i.\text{ sen } n\pi)$
Expandido em binômio de Newton $(1 + i)^{4n}$ tem-se que:

$$(1+i)^{4n} = \binom{4n}{0}i^0 + \binom{4n}{1}i^1 + \binom{4n}{2}i^2 + \binom{4n}{3}i^3 + \binom{4n}{4}i^4 + \binom{4n}{5}i^5 + \binom{4n}{6}i^6 + \binom{4n}{7}i^7 + \ldots + \binom{4n}{4n}i^{4n} \Rightarrow$$

$$(1+i)^{4n} = \binom{4n}{0} + \binom{4n}{1}i - \binom{4n}{2} - \binom{4n}{3}i + \binom{4n}{4} + \binom{4n}{5}i - \binom{4n}{6} - \binom{4n}{7}i + \ldots + \binom{4n}{4n} \Rightarrow$$

$$(1+i)^{4n} = \left[\binom{4n}{0} - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \binom{4n}{6} + \ldots + \binom{4n}{4}\right] + i\left[\binom{4n}{1} - \binom{4n}{3} + \binom{4n}{5} - \binom{4n}{7} + \ldots - \binom{4n}{4n-1}\right]$$

Logo, a soma pedida é igual à parte real de $(1 + i)^{4n}$: $1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \ldots - \binom{4n}{4n-2} + 1 = 2^{2n}.\cos(n\pi)$

Se n é par então $\cos(n\pi) = 1$ e se n é ímpar então $\cos(n\pi) = -1$. Assim:

$$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \ldots - \binom{4n}{4n-2} + 1 = (-1)^n 2^{2n}$$

Exemplo 2: (IME-2006) Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por:
$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3[n/3]}$
$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$
Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de n, sabendo que [r] representa o maior inteiro menor ou igual ao número r.

Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1 + \cos\frac{2\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^n$.

Solução:

Inicialmente podemos observar que $1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, ou seja,

$\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^n=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$. Assim:

$$\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)+\binom{n}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^3+$$
$$+\binom{n}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^4+\binom{n}{5}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^5+\ldots+\binom{n}{n}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^n=$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)+\binom{n}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)-\binom{n}{3}(\cos 2\pi+i\operatorname{sen}2\pi)+$$
$$+\binom{n}{4}\left(\cos\frac{8\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{8\pi}{3}\right)+\binom{n}{5}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{10\pi}{3}\right)+\ldots+\binom{n}{n}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}\right)-$$

$$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)+\binom{n}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)+$$
$$+\binom{n}{5}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)+\ldots+\binom{n}{n}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}\right)=$$

$$=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{3[n/3]}\right]+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{3[(n-1)/3]+1}\right]+$$
$$+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{3[(n-1)/3]+2}\right]$$

Como $\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}-i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}$

então: $\cos\frac{n\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}=\left[\binom{n}{0}-\frac{1}{2}\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\frac{1}{2}\binom{n}{4}-\frac{1}{2}\binom{n}{5}+\ldots\right]+\frac{\sqrt{3}i}{2}\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\ldots\right]\Rightarrow$

$\cos\frac{n\pi}{3}=\binom{n}{0}-\frac{1}{2}\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}-\binom{n}{3}-\frac{1}{2}\binom{n}{4}-\frac{1}{2}\binom{n}{5}-\ldots$ e $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\ldots\right]$

Sabendo-se que $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$ e $2\cos\frac{n\pi}{3}=2\binom{n}{0}-\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}-\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\ldots$ temos que

$$2^n+2.\cos\frac{n\pi}{3}=3\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{3}-\binom{n}{6}+\ldots+\binom{n}{3[n/3]}\right]\Rightarrow S_0=\frac{2^n+2.\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$$

Por outro lado como $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$ e $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}=\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\ldots$ então

$$2^n+\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+2\binom{n}{4}+\ldots=S_0+2S_1=\frac{2^n+2.\cos\frac{n\pi}{3}}{3}+2S_1\Rightarrow$$

$$2S_1=\frac{2^{n+1}+2\sqrt{3}.\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}-2.\cos\frac{n\pi}{3}}{3}-\frac{2^{n+1}-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}-\frac{1}{2}.\cos\frac{n\pi}{3}\right)}{3}-\frac{2^{n+1}+4.\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}{3}\Rightarrow$$

$$S_1=\frac{2^n+2.\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{6}}{3}-\frac{2^n+2.\cos\frac{(n-2)\pi}{3}}{3}$$

Questões de Vestibulares

1) (UEMS-2002) Os valores reais de x que tornam a parte real do número complexo $z = \frac{x-i}{x+i}$ negativa são:
a) $-1 < x < 1$ b) $1 < x < -1$
c) $2 < x < 1$ d) $-2 < x < -1$
e) $-1 < x < 2$

2) (UEG-2003) Seja C o conjunto dos números complexos, isto é, se $z \in C$, então $z = x + yi$, sendo x e y reais e $i = \sqrt{-1}$.
a) Mostre que $(x + yi)^2 = (x + y)(x - y) + 2xy$.
b) Determine $z \in C$, tal que $z^2 = 9 - 40i$.

3) (PUC-RJ-98) Se i for um dos vértices de um hexágono regular centrado na origem, então quais são os outros vértices?

4) (UFPB-98) A representação cartesiana dos números complexos $1 + 2i$, $-2 + i$ e $-1 - 2i$ são vértices de um quadrado. O quarto vértice desse quadrado corresponde a:
a) $1 - i$ b) $2 - i$ c) $1 + i$ d) $1 - 2i$ e) $-2 - 2i$

5) (UFC-99) Considere o número complexo $z = (1 + i).(\sqrt{3} - i)$. Assinale a opção na qual consta o menor inteiro positivo n, tal que z^n seja um número real positivo.
a) 6. b) 12. c) 18. d) 24. e) 30.

6) (UFRJ-89) Dados os números complexos $a = 2.(\cos 30° + i.\text{sen } 30°)$ e $b = 3.(\cos \alpha + i.\text{sen } \alpha)$, determine o menor valor positivo de α, de modo que o produto a.b seja um número real.

7) (UFRJ-93) Um número complexo z é representado por um ponto que pertence à reta de equação $x - 2y = 5$ e possui módulo igual a $\sqrt{5}$. Determine z.

8) (UEM-98) Com relação aos números complexos x e y que satisfazem $\begin{cases} x + yi = -2 \\ xi + y = 2 + 2i \end{cases}$ é correto afirmar que:
01) o conjugado de y é $2i - 1$.
02) x^2 é um número real.
04) $x - yi + 2 = 0$.
08) $xy = 2 - x$.
16) $x + y = i + 1$.
32) y^2 é um número real.

9) (UFV-98) Determine o número complexo z que satisfaça às igualdades:
$\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$ e $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$.

10) (UFMT-97) Seja o número complexo $z = \frac{x-2}{i-x}$, onde x é um número real e i é a unidade imaginária. Determine o maior valor inteiro de x para o qual a parte real de z é não negativa.

11) (UFRN-2003) Um *quadrado mágico* é um quadriculado com n^2 quadrados menores que contêm números de forma que a soma desses números em cada linha, em cada coluna e nas duas diagonais é a mesma. Para responder às solicitações propostas, considere o número complexo $i = \sqrt{-1}$ e o quadrado abaixo.

i	i^2	i^3	i^4
i^5	i^6	i^7	i^8
i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}
i^{13}	i^{14}	i^{15}	i^{16}

A) Calcule i^2, i^3, i^4, ..., i^{16}.
B) Verifique se o quadrado acima é mágico.
C) Calcule a soma de todos os números que compõem o quadrado acima.

12) (FEI-2004) O número complexo $z = \frac{1+i-a}{2-i}$ é imaginário puro. Sabendo que $a \in \Re$ e i é a unidade imaginária, podemos afirmar que:
a) a = 0,25 b) a = 0,5 c) a = 1
d) a = 1,5 e) a = 2

13) (UFMS-2005) Sejam z_1 e z_2 números complexos tais que $z_1^2 - z_2^2 = 2 + 16i$ e $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = 5 + i$. Calcule a soma da parte real com a parte imaginária do número complexo $26(z_1 - z_2)$.

14) (Unirio-2004) O número complexo $z = a + bi$, $i = \sqrt{-1}$, com a e b inteiros, é tal que (a, b) pertence à reta $x - 2y + 1 = 0$. Dado que $z.\bar{z} = 2$.

15) (IBMEC-2002) Seja $V(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + ... + x^3 + x^2 + x$ e i a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$. Logo, podemos afirmar que V(i) é igual a:
a) 1 b) 0 c) – 1 d) i e) – i

16) (UFPB-2000) Sabendo-se que $5 + i = (1 + i)(3 - 2i)$ e $239 - i = -(1 + i)(3 - 2i)^4$, mostre que $z = (5+i)^{16}(239-i)^4$ é um número real.

17) (UFMA-99) Seja o polinômio $P(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x$, $n \in N^*$. Se $P(i) = 0$, onde i é a unidade imaginária, então, necessariamente:
a) n é múltiplo de 4 b) n é múltiplo de 3
c) n é múltiplo de 2 d) n é múltiplo de 6
e) n é múltiplo de 8

18) (Fatec/SP-2005) Se i é a unidade imaginária, a soma $2 + 4.i^2 + 6.i^3 + ... + 100.i^{98}$ é um número
a) primo b) divisível por 4
c) múltiplo de 6 d) negativo
e) quadrado perfeito

19) (UEL-2004) Qual é o valor de a, real, para que $\frac{2 + a.i}{1 - i}$ seja um imaginário puro?
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

20) (UFRJ-2003) Seja z o número complexo $\frac{2+3i}{\alpha+i}$. Determine o valor de α para que z seja um imaginário puro.

21) (UFV-2003) A representação no plano complexo dos números z tais que a parte real de z^2 é igual a 2 é uma:
a) hipérbole. b) elipse. c) circunferência.
d) reta. e) parábola.

22) (UFLA-2003) Seja $z = x + iy$ um número complexo. Resolva a equação $z + (3 + i)\bar{z} = \frac{1}{i}$

23) (UFMA-2001) Determine o módulo do número complexo $\frac{i^{2002} - 1}{3 + 4.i^{2001}}$.

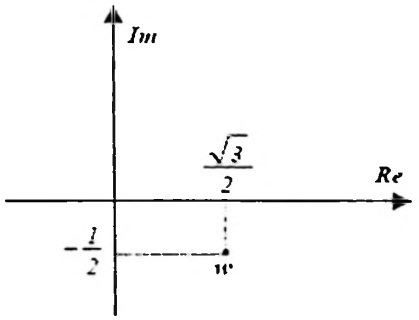
24) (UFMA-2001) Quatro números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 têm seus argumentos não nulos e em progressão geométrica. Sabendo-se que todos esses números têm módulo 1 e que os produtos (z_1z_2) e (z_3z_4) conduzem a números reais, determine uma possível solução para os valores desses números.

25) (UFMG-2000) Por três pontos não-colineares do plano complexo, z_1, z_2 e z_3, passa uma única circunferência. Sabe-se que um ponto z está sobre essa circunferência se, e somente se, $(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)(z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z})(z_2 - z)$ for um número real. Seja C a única circunferência que passa pelos pontos $z_1 = 1$, $z_2 = -3i$ e $z_3 = -7 + 4i$ do plano complexo. Assim sendo, **DETERMINE** todos os pontos do plano complexo cuja parte real é igual a -1 e que estão sobre a circunferência C.

26) (Mackenzie-2002) Se os pontos que representam os complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com a,b,c,d $\neq 0$, pertencem a uma mesma reta que passa pela origem, então z/w é sempre igual a:
a) a/c b) a/(2c – 1) c) a(c – 1)
d) c/2a e) 2ac

27) (UFMS-99) Sobre o número complexo z que satisfaz a equação $2\bar{z} + iz + 1 - i = 0$, onde $i = \sqrt{-1}$, e $\bar{z}$ é o conjugado do número complexo z, é correto afirmar que
(01) $|z| = \sqrt{z}$, onde $|z|$ é o módulo do número complexo z.
(02) a soma da parte real com a parte imaginária vale 0 (zero).
(04) $\bar{z} = -1 + i$
(08) z é um número real.
(16) $z^2 = i$

28) (UFMS-2001) Considere a equação no campo complexo $z^3 = -i\bar{z}$, onde i é a constante imaginária, isto é, $i^2 = -1$ e z é o conjugado de z. É correto afirmar que
(01) o número complexo – i é uma solução da equação dada.
(02) se $z \neq 0$ e z é uma solução da equação dada, então $z = 1$, onde z denota o módulo de z.
(04) o número complexo w, representado no plano complexo abaixo, é solução da equação dada.



(08) o número 0 não é uma solução da equação dada.
(16) a equação dada possui exatamente 4 soluções.

29) (EEAR-2002) Um quadrado ABCD está inscrito num círculo com centro na origem do plano de Gauss. O vértice "A" é imagem do complexo $3 + 4i$. Os afixos dos outros três vértices são os complexos:
a) $-3 + 4i$; $-3 - 4i$; $3 - 4i$.
b) $-4 + 3i$; $-3 - 4i$; $4 - 3i$.
c) $-4 + 3i$; $-3 - 4i$; $3 - 4i$.
d) $-3 + 4i$; $-3 - 4i$; $4 - 3i$.

30) (UFMA-99) Dados: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. Então a área da figura de vértices z_1, $\overline{z}_1$, z_2 e $\overline{z}_2$ é numericamente igual a:
a) 12 b) 8 c) $4\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) 4

31) (UFRRJ-2004) Determine o número de raízes reais que possui o sistema $\begin{cases} \text{Re}(z) + \text{Im}(z) = -i^2 \\ z.\overline{z} + |z|^2 = 2 \end{cases}$.

32) (UFC-2000) Sejam x, y, z e w números complexos tais que suas representações geométricas coincidem com os vértices de um quadrado inscrito em uma circunferência com centro na origem. Se $x = \sqrt{3} + i$, determine y, z e w.

33) (UFMT-2002) O número complexo $z = a + bi$ é representado geometricamente por um ponto P(a, b) no plano de Argand-Gauss que se denomina afixo. Seja $z = 2 + 3i$ e $\overline{z}$ seu conjugado. Os afixos de z, $\overline{z}$, $-z$ e $-\overline{z}$, representados no plano de Argand-Gauss, são os vértices de um quadrilátero Q. Determine o perímetro de Q.

34) (Mackenzie-99) Considere o complexo $z = a + bi$, $a > 0$ e $b > 0$, e o polígono dado pelos afixos de z, $-z$ e $-b\,i$. Se a área desse polígono é 5, então z pode ser:
a) $1/2 + 8i$ b) $1/2 + 4i$ c) $1/3 + 9i$
d) $1/3 + 15i$ e) $1/2 + 14i$

35) (IBMEC-2002) O valor máximo de $f(z) = |z + i|$ quando $|z - 2| = 1$, $z \in C$, é:
a) 1 b) $\sqrt{5}$ c) $-\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5} - 1$ e) $\sqrt{5} + 1$

36) (Mackenzie-2001) O complexo $z = a + bi$, de módulo 1, que satisfaz a condição $z - i = 2$ é um número:
a) da forma bi, com $b > 0$
b) da forma bi, com $b < 0$
c) tal que $a > 0$ e $b > 0$
d) tal que $a < 0$ e $b > 0$
e) tal que $a > 0$ e $b < 0$

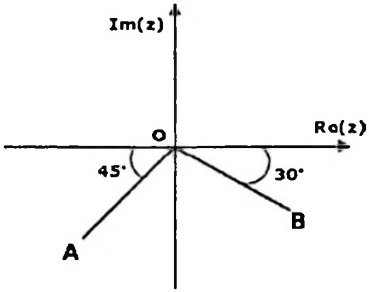
37) (UFU-2000) O conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x + i.y = (-5 + 2.\cos t) + i(3 + 2.\text{sen } t)$, para $t \in \mathbb{R}$, com $i^2 = -1$, é descrito como
a) uma reta que passa pelo ponto $(-5, 3)$ e tem declividade 2.
b) uma circunferência de centro em $(-5, 3)$ e raio 2.
c) um par de retas concorrentes que se interceptam no ponto $(-5, 3)$.
d) uma parábola cujo vértice é o ponto $(-5, 3)$.

38) (UFMG-2003) sejam n um número inteiro positivo e z um número complexo tal que $|z| = 1$ e $1 + z^{2n} \neq 0$. Calcule a parte imaginária de $\frac{z^n}{1 + z^{2n}}$.

39) (UFRGS-2005) O ângulo formado pelas representações geométricas dos números complexos $z = \sqrt{3} + i$ e z^4 é:
a) $\pi/6$ b) $\pi/4$ c) $\pi/3$ d) $\pi/2$ e) π

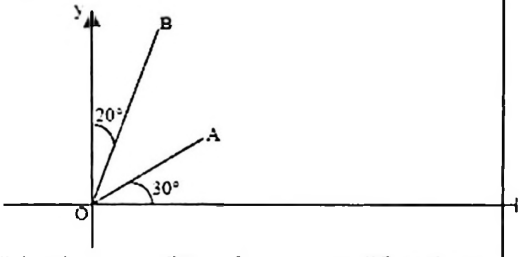
40) (Cefet/PR-2003) Sejam os números complexos $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i.\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$. O valor de $y = (z_1 + 3z_2)^{135}$ é:
a) 1. b) $-1 - i$. c) i. d) $-i$. e) $1 + i$.

41) (Cefet/PR-2004) No plano de Gauss abaixo, os pontos A e B são imagens dos números complexos z_1 e z_2, respectivamente. Se OA = 7 e OB = 2, então $z_1^3 + z_2^3$ é igual a:



a) – 1. b) 1. c) i.
d) – i. e) 1 + i.

42) (UFU-2002) Sejam z_1 e z_2 dois números complexos representados geometricamente, na figura abaixo, pelos pontos A e B, respectivamente.



Sabendo-se que OA = 3 cm e que OB = 6 cm, pode-se afirmar que

a) $\frac{z_2}{z_1}$ tem módulo igual a 2 cm.

b) $z_1 + z_2$ tem módulo igual a 9 cm.

c) o argumento de $z_2 - z_1$ é igual a 40°.

d) o argumento de $z_2.z_1$ é igual a 50°.

43) (UFU-2001) Seja o número complexo z = cos 15° + i.sen 15°, onde $i^2 = -1$. Se w é um outro número complexo tal que |w| = |z| = |w – z|, então pode-se afirmar que um valor possível para w nessas condições é

a) w = cos 315° + i.sen 315°
b) w = cos 60° + i.sen 60°
c) w = cos 165° + i.sen 165°
d) w = cos 225° + i.sen 225°

44) (UFU-99) As representações gráficas dos números complexos z_1 = cos 30° + i.sen 30° e z_2 = cos 102° + i.sen 102° no plano complexo correspondem a vértices consecutivos de um polígono regular inscrito em uma circunferência com centro na origem. O número de lados desse polígono é igual a

a) 12 b) 6 c) 5 d) 10

45) (UFPI-2003) Sejam M = {z ∈ C; |z + 3| = 2} e N = {z + 3i; z ∈ M}. O elemento do conjunto N de maior módulo é:

a) $-3-\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})i$

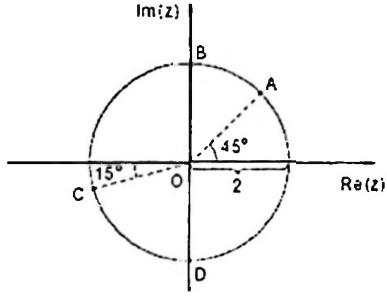
b) $-3+(3+\sqrt{2})i$

c) $\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})i$

d) $-3-\sqrt{2}+3i$

e) $-3+\sqrt{2}+(3-\sqrt{2})i$

46) (UFSE-2004) Na figura abaixo, os pontos A, B, C e D, pertencentes a uma circunferência de centro na origem do plano de Gauss, são as imagens dos números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4, respectivamente.



Considere os dados da figura para analisar as proposições que seguem.

(0) O complexo z_1 é uma das raízes quartas de – 16.

(1) A forma algébrica de $\frac{z_2}{z_1}$ é $\frac{\sqrt{2}}{2} - i.\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) O produto $z_1.z_3$ é igual a $-2-2i\sqrt{3}$.

(3) Calculando-se $(z_2 - z_4)^{22}$ obtém-se um imaginário puro.

(4) Se x e y são números reais tais que $z_3^6 = x + y.i$ então x + y = 64.

47) (UFBA-99) Sendo z = a + bi o número complexo tal que a, b, |z| são números naturais consecutivos, pode-se afirmar:

(01) Uma forma trigonométrica de z é $5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$.

(02) $z \cdot \bar{z} = 15$

(04) $z + \bar{z} = 6$

(08) $2(z - \bar{z})^{-1} = 4i$

(16) $2z^2 - 25\frac{z}{\bar{z}} = -7 + 24i$

(32) Os afixos dos números complexos z, $\bar{z}$, $-z$, $-\bar{z}$ são os vértices de um retângulo cuja diagonal mede 5 u.c.

(64) A equação da circunferência que passa pelos afixos de z e de $\bar{z}$ e tem centro na origem dos eixos coordenados é $x^2 + y^2 = 25$.

48) (UFU-2004) Sejam z_1 e z_2 números complexos tais que $|z_1| = |z_2| = 1$ e $z_1 + z_2 + i = 0$, em que $i^2 = -1$. Determine a área do triângulo cujos vértices são as representações geométricas de i, z_1 e z_2.

49) (UERJ-97) Se z é um número complexo e $\bar{z}$ seu conjugado, resolva a equação: $z^3 = \bar{z}$.

50) (UFU-2000) Sejam z_1 e z_2 os dois números complexos de parte imaginária não nula que são soluções da equação $z^2 = \bar{z}$. Determine $z_1 + z_2$.

51) (PUC/RS-2001) Se as imagens geométricas dos números complexos 0, z e $\bar{z}$ no plano de Argand-Gauss são os vértices de um triângulo eqüilátero, então a medida do segmento que une as imagens de z e $\bar{z}$ é

a) $|z|/2$ b) $|\bar{z}|/2$ c) $|z|$ d) $2\text{Re}(z)$ e) $\text{Im}(z)$

52) (UFRN-95) Se a e b são números reais tais que o número complexo $z = \frac{a - bi}{4 - 2i}$ tem módulo igual a 1, então:

a) $a = 2b$ b) $a - b = 2$ c) $a + b = 6$

d) $a^2 - b^2 = 12$ e) $a^2 + b^2 = 20$

53) (PUC/RS-2003) No plano de Argand - Gauss os números complexos z, w, −z, −w são vértices de um quadrilátero. Se z = a + b.i , a > 0 , b > 0, a ≠ b e w é o conjugado de z, então a área desse quadrilátero é

A) 2ab B) 4ab C) $2a^2 + 2b^2$

D) a^2 E) b^2

54) (UFC-2005) Seja z um número complexo diferente de zero tal que $z + \frac{1}{z} = -1$. Determine o valor de $z^{2005} + \frac{1}{z^{2005}}$.

55) (UFV-2001) Seja i a unidade imaginária, $i = \sqrt{-1}$. O valor da expressão $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$ é:

a) 1 b) -2 c) $2i$

d) $-2i$ e) 2

56) (UFAL-2002) Sabe-se que, para um certo número real x, o complexo $z = \frac{3 - 4.i}{2 + 3.x.i}$ é um imaginário puro. Nesse caso, qual é o módulo de z?

57) (UFAL-2004) Seja o número complexo z = x + y.i, em que x e y são números reais. Se $\bar{z}$ é o conjugado de z e $i.z + 2.\bar{z} = -1 + i$, determine a forma trigonométrica de z.

58) (UFAM-2002) Seja $z = x + iy$ um complexo, onde $x > 0$ e $y > 0$, e seja $\bar{z}$ o seu conjugado. A área do quadrilátero de vértices é: $z, \bar{z}, -z, e -\bar{z}$ é:

a) $2x^2y^2$ b) $x^2 + y^2$ c) $(x + y)^2$

d) $4xy$ e) $4\sqrt{xy}$

59) (UFG-2000) Representando, no plano, as raízes complexas da equação $z^3 + 8 = 0$, obtém-se um triângulo. Calcule a área desse triângulo.

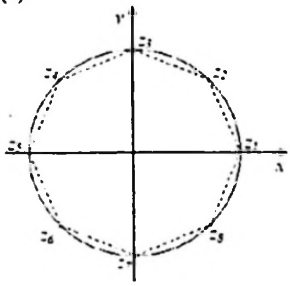
60) (UERJ-2001) Os afixos de três números complexos são eqüidistantes de (0, 0) e vértices de um triângulo eqüilátero. Um desses números é $1 + \sqrt{3}.i$. Calcule os outros números na forma a + bi.

61) (UERJ-2004) Considere o seguinte número complexo $z = \frac{1 - i}{1 + i\sqrt{3}}$. Ao escrever z na forma trigonométrica, os valores do módulo e do argumento serão, respectivamente, de:

a) $\sqrt{2}$ e $25\pi/12$ b) $\sqrt{2}$ e $17\pi/12$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $25\pi/12$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $17\pi/12$

62) (UFMS-2005) A figura ao lado mostra, no plano complexo, uma circunferência de centro na origem e raio 1, e as imagens de oito números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 e z_8, que estão sobre os vértices de um octógono regular inscrito nessa circunferência. Considerando essas informações, assinale a(s) proposição(ões) verdadeira(s).



(001) $\overline{z}_2 = z_8$
(002) $z_3.z_7 = -1$
(004) $z_2.z_3.z_4 = \overline{z}_3$
(008) $z_4 = \cos 135° - i\,\text{sen}\,135°$
(016) $z_2 + z_6 = 0$

63) (UFC-2003) A área do polígono cujos vértices são as representações geométricas das raízes do polinômio $p(x) = x^6 - 1$ é:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

64) (UEMS-2003) Seja $z_1 = \sqrt{3} + i$ uma das raízes quartas de z, isto é; $z_1^4 = z$. Qual é a soma das outras raízes quartas de z.

a) 0 b) 1 c) $-\sqrt{3} - i$
d) $\sqrt{2} + i$ e) $2\sqrt{3} + 3i$

65) (UFC-2006) Seja $z \neq 1$ um número complexo tal que $z^7 = 1$. Determine o valor numérico da expressão:

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \frac{z^3}{1-z^6} + \frac{z^4}{1-z} + \frac{z^5}{1-z^3} + \frac{z^6}{1-z^5}$$

66) (UECE-2003) Se $i = \sqrt{-1}$, então o quarto termo no desenvolvimento de $(1+i)^6$ é:

a) 15i b) – 15i c) 20i d) – 20i

67) (UEMS-2004) No plano complexo, o conjunto dos pontos $z = x + iy$ que satisfazem a igualdade $|z-1| = |z+i|$ é. .

a) uma reta b) uma circunferência
c) um círculo d) um quadrado
e) um triângulo

68) (Ciaba-94) Reduzindo o complexo: $z = \frac{\sqrt{1+m} + i\sqrt{1-m}}{\sqrt{1+m} - i\sqrt{1-m}} - \frac{\sqrt{1-m} + i\sqrt{1+m}}{\sqrt{1-m} - i\sqrt{1+m}}$ a uma forma simples, teremos:

a) z = i b) z = 1 + mi c) z = 2m
d) z = 1 – mi e) z = – 2m

69) (Ciaba-2003) Dado o número complexo Z = 1 – i e considerando ser ele uma das raízes da equação $x^{10} - p = 0$ o valor de p é:

a) 8i b) – 4i c) – 8i
d) – 16i e) – 32i

70) (AFA-99) Os valores reais de x, para os quais a parte real do número complexo $z = \frac{x-2i}{x+i}$ é negativa, pertencem ao conjunto (intervalo)

a) $\{\}$. b) $\{0\}$. c) $(-1,1)$. d) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

71) (AFA-99) Seja $\overline{z}$ o conjugado do número complexo $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$. A seqüência de todos os valores de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(\overline{z})^{-n}$ seja um imaginário puro, é uma progressão

a) aritmética com primeiro termo igual a 2 e razão 8.
b) geométrica com primeiro termo igual a 2 e razão 2.
c) aritmética com primeiro termo igual a 2 e razão 4.
d) geométrica com primeiro termo igual a 2 e razão 1.

72) (AFA-99) A representação trigonométrica do conjugado do número complexo $z = (1 + \sqrt{3}\,i)^5$, sendo i a unidade imaginária e $k \in \mathbb{Z}$, é

a) $32\cos(\pi/3 + 2k\pi) - 32i\,\text{sen}(\pi/3 + 2k\pi)$.
b) $32\cos(5\pi/4 + 10k\pi) - 32i\,\text{sen}(5\pi/4 + 10k\pi)$.

c) $32\cos(5\pi/6 + 10k\pi) - 32i\,\text{sen}(5\pi/6 + 10k\pi)$.
d) $32\cos(5\pi/3 + 10k\pi) - 32i\,\text{sen}(5\pi/3 + 10k\pi)$.

73) (AFA-2003) Analise as alternativas e marque a correta.
a) Dado o complexo $z = m + mi$, onde $m \in \Re^*$ e i é a unidade imaginária, pode-se dizer que o afixo de $(\bar{z})^2$ é, em relação à origem, simétrico do afixo $(-2m^2, 0)$.
b) No plano de Argand-Gauss os complexos z, tais que $|z - 1| \leq 1$, são representados pelos pontos do círculo de centro (0, 1) e raio unitário.
c) Se $n \in \text{IN}$ e i é a unidade imaginária, então $(i^{n-1} + i^n)^8$ é um número real maior do que zero.
d) Se $z = a + bi$ ($a \in \Re^*$, $b \in \Re$ e i é a unidade imaginária) é um complexo, então $z - \bar{z}$ é sempre um número complexo imaginário puro.

74) (AFA-2004) Analise as sentenças abaixo, classificando-as em VERDADEIRAS(S) ou FALSAS(S), considerando $i = \sqrt{-1}$. A seguir, assinale a alternativa que apresenta a seqüência correta.

– A representação geométrica dos números complexos z tais que $|z - (1 - i)| \leq 2$ é um círculo de centro C(1, –1) e raio 2.

II – A forma trigonométrica de $z = \dfrac{1+i}{i}$ é $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

III – Se $z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$, então $z.\bar{z} = -i^2$, $\forall\ \alpha \in \text{IR}$.

a) V, V, V b) V, V, F
c) F, F, V d) V, F, V

75) (Escola Naval-97) As soluções da equação $(z - 1 + i)^4 = 1$ pertencem a curva:
a) $x^2 - x + y^2 + y = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 1$
e) $x^2 - x + y^2 - y = 0$

76) (Escola Naval-97/98) Sendo i a unidade imaginária dos números complexos, o valor do número natural n tal que $(2i)^n - (1 + i)^{2n} = 64i$ é:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 9

77) (Escola Naval-2001) O valor do menor inteiro positivo n, tal que $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^n$ seja um imaginário puro, com coeficiente negativo é
a) 3 b) 5 c) 6 d) 9

78) (Escola Naval-2004) Seja $z = \dfrac{2+3i}{1-i} + (i - \sqrt{3})^3$. Se θ é o argumento de z, podemos afirmar cu tg θ é igual a
a) – 23 b) – 21 c) – 19 d) 17 e) 19

79) (Fuvest-94) a) Se $z_1 = \cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1$ e $z_2 = \cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2$, mostre que o produto z_1z_2 é igual a $\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$.
b) Mostre que o número complexo $z = \cos 48^\circ + i\,\text{sen}\,48^\circ$ é raiz da equação $z^{10} + z^5 + 1 = 0$.

80) (Fuvest-95) Sabendo que α é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\dfrac{2+i}{\alpha + 2i}$ é zero, então α é:
a) – 4 b) – 2 c) 1 d) 2 e) 4

81) (Fuvest-95) Determine os números complexos z tais que $z + \bar{z} = 4$ e $z.\bar{z} = 13$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de z.

82) (Fuvest-96) Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ qual é o menor valor do inteiro $n \geq 1$ para o qual z^n é um número real?
a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

83) (Fuvest-97) Sendo i a unidade imaginária ($i^2 = -1$) pergunta-se: quantos números reais a existem para os quais $(a + i)^4$ é um número real?
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) infinitos

84) (Fuvest-98) Dentre os números complexos $z = a + bi$, não nulos, que têm argumento igual a π/4, aquele cuja representação geométrica está sobre a parábola $y = x^2$ é:
a) $1 + i$ b) $1 - i$ c) $-1 + i$
d) $\sqrt{2} + 2i$ e) $-\sqrt{2} + 2i$

85) (Unicamp-87) Dado o número complexo $w = \dfrac{1+i}{1-i}$, determine o valor do número complexo $z = (1 + w)^4$.

86) (Unicamp-94) Seja $\alpha \neq -1$ um número tal que $\alpha^n = 1$, onde n é um número inteiro positivo. Prove que, se n for par, a expressão $1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \ldots + (-\alpha)^n$ é igual a 1; e, se n for impar, essa expressão é igual a $(1 - \alpha)/(1 + \alpha)$.

87) (Unicamp-97) Um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo $\sqrt{3} + i$
a) Que numeros complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo? Faça a figura desse triângulo.
b) Qual a medida do lado desse triângulo?

88) (Unicamp-98) Se $z = x + iy$ é um número complexo, o número real x é chamado parte real de z e é indicado por Re(z), ou seja, $Re(x + iy) = x$.
a) Mostre que o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem à equação $Re\left(\frac{z + 2i}{z - 2}\right) = \frac{1}{2}$, ao qual se acrescenta o ponto (2, 0), é uma circunferência.
b) Ache a equação da reta que passa pelo ponto (–2, 0) e é tangente àquela circunferência.

89) (UNICAMP-99) Dado um número complexo $z = x + iy$, o seu conjugado é o número complexo $z = x - iy$.
a) Resolva as equações: $z\bar{z} = 4$ e $(\bar{z})^2 = z^2$.
b) Ache os pontos de interseção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações.

90) (ITA-52) Provar que todo número complexo de módulo unitário pode ser colocado sob a forma: $\frac{a + i}{a - i}$ $(a \in \Re)$.

91) (ITA-79) Estudando a equação $32z^5 = (z + 1)^5$ no plano complexo, podemos afirmar que:
a) A equação possui todas as raízes imaginárias, situadas numa circunferência de raio 1.
b) A equação possui 4 raízes imaginárias situadas uma em cada quadrante.
c) A equação possui 2 raízes imaginárias, uma do 1º quadrante e outra no 4º quadrante.
d) A equação possui 4 raízes imaginárias, duas no 2º quadrante e outras duas no 3º quadrante.
e) A equação tam 4 raízes imaginárias, duas do 1º quadrante e outras duas no 4º quadrante.

92) (ITA-81) Sejam a e k constantes reais, sendo $a > 0$ e $0 < k < 1$. De todos os números complexos z que satisfazem a relação $|z - ai| \leq ak$, qual é o menor argumento?
a) $z = ak\sqrt{1 - k^2} + ia(i - k^2)$.
b) $z = k\sqrt{1 - k^2} - ia(i - k^2)$.
c) $z = k\sqrt{1 - k^2} - i\sqrt{1 - k^2}$.
d) $z = -k\sqrt{1 - k^2} - ia(i - k^2)$.
e) $z = a + ik$.

93) (ITA-81) O conjunto A definido por $A = \{z \in C;\ (z - i)\overline{(z - i)} = 4\}$ representa no plano complexo:
a) uma elipse cujos focos se encontram nos pontos i e –i
b) uma circunferência de centro no ponto (0, 1) e raio 2
c) uma circunferência de centro no ponto (0, 0) e raio 4
d) um par de retas que se cortam no ponto (1, 1)
e) nenhuma das anteriores

94) (ITA-2012) Se $\arg z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para arg (-2iz) é
A ( ) $-\frac{\pi}{4}$. B ( ) $\frac{\pi}{4}$. C ( ) $\frac{\pi}{2}$.
D ( ) $\frac{3\pi}{4}$. E ( ) $\frac{7\pi}{4}$.

95) (ITA-84) Sabendo-se que n é um número natural tal que $\frac{(\sqrt{3} + i)^n}{3i}$ é um número real, podemos afirmar que:
a) $n = 6k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$
b) $n = 3(2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
c) $n = 3k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
d) $n = k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$
e) não existe valor de n natural tal que o número dado seja real.

96) (ITA-85) Seja a um número real. Os valores de $z \in C$ que satisfazem $\left(\frac{a + z^{10}}{1 + i}\right)\left(\frac{a + (\bar{z})^{10}}{1 - i}\right) \in \Re$ são:
a) $z = -a + i\sqrt[10]{|a|}$

b) Não é possível determiná-los
c) $z = -i\sqrt[n]{|a|}$
d) Não existe $z \in C$ tal que isto aconteça
e) todo $z \in R$

97) (ITA-86) No conjunto C dos números complexos seja a tal que $|a| < 1$. O lugar geométrico dos pontos $z \in C$ que satisfazem a igualdade $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1$ é:
a) Uma circunferência de centro na origem e raio 1.
b) Uma hipérbole.
c) Uma elipse de semi-eixo maior igual a 1.
d) Uma parábola.
e) Formado por duas retas concorrentes.

98) (ITA-87) Seja S a coleção de todos os números complexos z, que são raízes da equação $|z| - z = 1 - 2i$, onde i é a unidade imaginária. Então podemos garantir que:
a) $S = \{3/2 - 2i\}$
b) $S = \{1/2 + 2i, -1/2 - 2i\}$
c) $S = \{1/2 + 4k\pi; k = 1, 2, 3\}$
d) $S = \{1/4 + 3i\}$
e) $S = \{1 + 2ki; k = 1, 2, 3\}$

99) (ITA-2008) Sejam $\alpha \in C$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a
a) -2 b) 0 c) 1 d) 2 e) 2i

100) (ITA-88) O número natural n tal que $(2i)^n + (1 + i)^{2n} = -16i$, onde i é a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, vale:
a) n = 6 b) n = 3 c) n = 7
b) d) n = 4 e) não existe n nestas condições

101) (ITA-89) O valor da expressão $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$, sendo z um número complexo, é:
a) 5, se $|z| \leq 1$ d) 2, para todo z
b) 4, se $|z| = 1$ e) 3, se $Re(z) = 0$
c) 0, se $Im(z) = 0$

102) (ITA-89) Considerando que a imagem da função arc sen é o intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ e $i = \sqrt{-1}$, podemos garantir que arc sen $\left|\frac{1+xi}{1-xi}\right|$ está definida:
a) apenas para $x = 0$ e vale $\pi/2$
b) para todo $x \in \Re$ e vale $\pi/2$
c) apenas para $x \in \Re$ tal que $|x| < 1$ e seu valor depende do valor de x.
d) apenas para $x \in \Re$ tal que $x \geq 1$ e seu valor é π
e) apenas para $x \in \Re$ tal que $x \leq -1$ e seu valor depende do valor de x.

103) (ITA-89) O produto dos números complexos $z = x + yi$, que têm módulo igual a $\sqrt{2}$ e se encontram sobre a reta $y = 2x - 1$ contida no plano complexo, é igual a:
a) $\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$ b) $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $-\frac{8}{5} - \frac{8}{5}i$ d) $2 + 2i$
e) não existe nenhum número complexo que pertença à reta $y = 2x - 1$ e cujo módulo seja $\sqrt{2}$.

104) (ITA-90) Considere as equações $z^3 = i$ e $z^2 + (2 - i)z + 2i = 0$, onde z é complexo. Seja S_1 o conjunto das raízes da primeira equação e S_2 o da segunda. Então
a) $S_1 \cap S_2$ é vazio;
b) $S_1 \cap S_2 \subset R$;
c) S_1 possui apenas dois elementos distintos;
d) $S_1 \cap S_2$ é unitário;
e) $S_1 \cap S_2$ possui dois elementos.

105) (ITA-90) A igualdade $1 + |z| = |1 + z|$, onde $z \in C$, é satisfeita:
a) Para todo $z \in C$ tal que $Re z = 0$ e $Im z < 0$;
b) Para todo $z \in C$ tal que $Re z \geq 0$ e $Im z = 0$;
c) Para todo $z \in C$ tal que $|z| = 1$;
d) Para todo $z \in C$ tal que $Im z = 0$;
e) Para todo $z \in C$ tal que $|z| < 1$.
Nota : C denota o conjunto dos números complexos, Re z a parte real de z e Im z a parte imaginária de z.

106) (ITA-91) Sejam $w = a + bi$ com $b \neq 0$ e a, b, c $\in \Re$. O conjunto dos números complexos z que verificam a equação $wz + \overline{wz} + c = 0$, descreve:
a) Um par de retas paralelas.
b) Uma circunferência.
c) Uma elipse.
d) Uma reta com coeficiente angular $m = \frac{a}{b}$.
e) n.d.a.

107) (ITA-92) Sabe-se que $2(\cos \pi/20 + i \operatorname{sen} \pi/20)$ é uma raiz quíntupla de w. Seja S o conjunto

de todas as raízes de $z^4 - 2z^2 + \frac{w - 16\sqrt{2}i}{8\sqrt{2}} = 0$.

Um subconjunto de S é:
a) $\{2^{1/2}(\cos 7\pi/8 + i \text{ sen } 7\pi/8), 2^{1/2}(\cos \pi/8 + i \text{ sen } \pi/8)\}$
b) $\{2^{1/2}(\cos 9\pi/8 + i \text{ sen } 9\pi/8), 2^{1/2}(\cos 5\pi/8 + i \text{ sen } 5\pi/8)\}$
c) $\{2^{1/4}(\cos 7\pi/8 + i \text{ sen } 7\pi/4), 2^{1/4}(\cos \pi/4 + i \text{ sen } \pi/4)\}$
d) $\{2^{1/4}(\cos 7\pi/8 + i \text{ sen } 7\pi/8), 2^{1/4}(\cos \pi/8 + i \text{ sen } \pi/4)\}$
e) n.d.a.

108) (ITA-92) Considere o número complexo $z = a + 2i$ cujo argumento está no intervalo $(0, \pi/2)$. Sendo S o conjunto dos valores de a para os quais z^6 é um número real, podemos afirmar que o produto dos elementos de S vale:
a) 4 b) $4\sqrt{3}$ c) 8 d) $8\sqrt{3}$ e) n.d.a.

109) (ITA-94) Sejam x e y números reais, com $x \neq 0$, satisfazendo $(x + iy)^2 = (x + y)i$, então:
a) x e y são números irracionais.
b) $x > 0$ e $y < 0$.
c) x é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$
d) $x < 0$ e $y = z$.
e) $x^2 + xy + y^2 = 1/2$

110) (ITA-95) Sejam z_1 e z_2 números complexos com $|z_1| = |z_2| = 4$. Se 1 é uma raiz da equação $z_1z^6 + z_2z^3 - 8 = 0$ então a soma das raízes reais é igual a:
a) -1 b) $-1 + 2^{1/2}$ c) $1 - 2^{1/3}$
d) $1 + 3^{1/2}$ e) $-1 + 3^{1/2}$

111) (ITA-95) Seja z um número complexo satisfazendo $\text{Re}(z) > 0$ e $(\bar{z} + i)^2 + |\bar{z} + i|^2 = 6$. Se n é o menor natural para o qual z^n é um número imaginário puro, então n é igual a:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

112) (ITA-93) Seja a o módulo do número complexo $\left(2 - 2\sqrt{3}i\right)^{10}$. Então o valor de x que verifica a igualdade $(4a)^x = a$ é:
a) 10/11 b) -2 c) 5/8 d) 3/8 e) /15

113) (ITA-97) Considere os números complexos $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $w = 1 + i\sqrt{3}$.

$m = \left|\frac{w^6 + 3z^4 + 4i}{z^2 + w^3 + 6 - 2i}\right|^2$, então m vale

a) 34 b) 26 c) 16 d) 4 e) 1

114) (ITA-98) Sejam x e y números reais tais que:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Então, o número complexo $z = x + iy$ é tal que z^3 e $|z|$, valem respectivamente:
a) $1 - i$ e $\sqrt[6]{2}$ b) $1 + i$ e $\sqrt[6]{2}$
c) i e 1 d) $-i$ e 1
e) $1 + i$ e $\sqrt[3]{2}$

115) (ITA-98) Considere, no plano complexo, um polígono regular cujos vértices são as soluções da equação $z^6 = 1$. A área deste polígono, em unidades de área, é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) 5 c) π d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e) 2π

116) (ITA-99) Sejam a_k e b_k números reais com $k = 1, 2, ..., 6$. Os números complexos $z_k = a_k + ib_k$ são tais que $|z_k| = 2$ e $b_k \geq 0$, para todo $k = 1, 2, ..., 6$. Se $(a_1, a_2, ..., a_6)$ é uma progressão aritmética de razão $-1/5$ e soma 9, então z_3 é igual a:

a) $2i$ b) $\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$ c) $\sqrt{3} + i$
d) $\frac{-3\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{73}}{5}i$ e) $\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{17}}{5}i$

117) (ITA-99) O conjunto de todos os números complexos z, $z \neq 0$, que satisfazem à igualdade $|z + 1 + i| = ||z| - |1 + i||$ é:
a) $\{z \in C: \arg z = 5\pi/4 + 2k\pi, k \in Z\}$
b) $\{z \in C: \arg z = \pi/4 + 2k\pi, k \in Z\}$
c) $\{z \in C: |z| = 1 \text{ e } \arg z = \pi/6 - k\pi, k \in Z\}$
d) $\{z \in C: |z| = \sqrt{2} \arg z = \pi/4 + 2k\pi, k \in Z\}$
e) $\{z \in C: \arg z = \pi/4 + k\pi, k \in Z\}$

118) (ITA-2000) Seja z_0 o número complexo $1 + i$. Sendo S o conjunto solução no plano complexo de $|z - z_0| = |z + z_0| = 2$, então o produto dos elementos de S é igual a:
a) $4(1 - i)$ b) $2(1 + i)$ c) $2(i - 1)$
d) $-2i$ e) $2i$

119) (ITA-2001) Se $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z.\bar{w} = 1$ e $\alpha \in [0, 2\pi]$ é um argumento de z, w, então α é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{3\pi}{2}$

120) (ITA-2001) A parte imaginária de $((1 - \cos 2x) + i \operatorname{sen} 2x)^k$, k inteiro positivo, x real é

a) $2 \operatorname{sen}^k x . \cos^k x$ b) $\operatorname{sen}^k x . \cos^k x$

c) $2^k \operatorname{sen} kx . \cos^k x$ d) $2^k \operatorname{sen}^k x . \cos^k x$

e) $\operatorname{sen} kx . \cos^k x$

121) (ITA-2002) Sejam a e b dois números complexos não-nulos, tais que $a^2 + b^2 = 0$. Se z, w $\in$ C satisfazem

$$\begin{cases} \bar{z}w + z\bar{w} = 6a \\ \bar{z}w - z\bar{w} = 8b \end{cases}$$

determine o valor de |a| de forma que $|zw| = 1$.

122) (ITA-2002) Seja a equação em C $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Qual dentre as alternativas abaixo é igual à soma de duas das raízes dessa equação?

a) $2\sqrt{3}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $+\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-i$ e) $\frac{i}{2}$

123) (ITA-2003) Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número $\omega = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$ pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

124) (ITA-2004) Considere todos os números $z = x + iy$ que têm módulo $\frac{\sqrt{7}}{2}$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a:

a) $\frac{25}{9}$ b) $\frac{49}{16}$ c) $\frac{81}{25}$ d) $\frac{25}{7}$ e) 4

125) (ITA-2004) A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$, $z \in \mathbb{C}$, é igual a:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

126) (ITA-2004) Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, calcule:

$$\left| \sum_{n=1}^{60} z^n \right| - \left| z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{60} \right|.$$

127) (IME) A parte real de um número complexo é $x^2 - 2$ e a parte imaginária $x\sqrt{2}$. Determine o valor mínimo do módulo desse complexo.

128) (IME) Determine os valores máximos e mínimos de $|z - 4|$, sabendo-se que $|z + 3i| \leq 1$.

129) (IME) Sejam 1, x_2, x_3, ..., x_n as raízes de $x^n = 1$. Calcule: $(1 - x_2)(1 - x_3) \ldots (1 - x_n)$

130) (IME) Sejam x_1, x_2, x_3, ..., x_n as raízes de $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0$. Calcule:

$$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \frac{1}{x_3 - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - 1}.$$

131) (IME) Dados dois pontos do plano complexo, $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 + 5i$, determine e esboce o L.G. dos pontos que satisfazem a relação

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = 0, \text{ com } z_1 \neq z_2$$

132) (IME) Seja o conjunto $A = \{z \in C / |z| = 1\}$. Determine a imagem de A pela função g, complexa de variável complexa, tal que $g(z) = (4 + 3i).z + 5 - i$.

133) (IME) Resolva a equação $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = 0$, $n \in N$, $n \geq 2$.

134) (IME) Os complexos a, b, c têm como imagem os vértices de um triângulo equilátero. Calcule $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$.

135) (IME-53) Resolver a equação binômia $x^6 - 64 = 0$, com o emprego de números complexos.

136) (IME-60) Calcular $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$.

137) (IME-65) Escreva sob a forma cartesiana o resultado da expressão $\frac{6e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3} - i}$.

138) (IME-71) Seja $F = \sqrt{-15 - 8.i}$ Calcule F, escrevendo a resposta sob a forma a + b.i, com a e b inteiros.

139) (IME-71) Seja $A = \left(\sqrt{3} + i\right)^{2\alpha}$, onde α é um número real, inteiro e positivo. Sendo A um número real, calcule o valor de α para que as raízes da equação: $(\alpha + i)^2 x + (3 + i)^2 y = 0$ sejam também reais.

140) (IME-74) Determine o conjunto dos pontos z do plano complexo tais que $\frac{z+2}{z(z+1)}$ representa um número real.

141) (IME-75) Considere o conjunto dos números reais $\Re$ e o conjunto dos números complexos C. Sabendo que $a \in \Re$, $b \in \Re$, $z_1 \in C$, $z_2 \in C$ e que $z_1^2 + az_1 + b = 0$, e $z_2^2 + az_2 + b = 0$, determine a relação $r = a^2/b$ para que os pontos z_1, z_2 e z_0 (0, 0) no plano complexo formem um triângulo equilátero, esboçando as soluções no plano complexo.

142) (IME-76) Considere três números complexos z_0, z_1 e z_2. Sabendo que $z_0 \neq z_1 \neq z_2$ e que $z_0^3 = z_1^3 = z_2^3 = 1$, calcule $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2$.

143) (IME-77) Seja $f: C \to C \quad z \to iz + 2 + 3i$. Seja o conjunto $A = \{x + iy \in C \mid x^2/9 + y^2/4 = 1\}$. Determine o conjunto B imagem de A pela função f.

144) (IME-77) Seja $z = a + bi$ $(a, b \in \Re)$. Determine a e b tais que $z^2 = 3 - 4i$.

145) (IME-78) Sendo $H = \{z \in C / z^8 = 1\}$ e $G = \{z \in C / z^{12} = 1\}$ e $S = G \cap H$, determine todos os pares $(a_m, b_m) \in R^2$ tais que $a_m + b_m i \in S$.

146) (IME-79) Seja $g: C \to C$ a função definida por: $g(x + yi) = i(x + yi) + 2 + 3i$. Dada a elipse $E = \{x + iy \mid x^2/9 + y^2/4 = 1;\ x, y \in \Re\}$. Determine sua imagem g(E) pela função g.

147) (IME-82) Determine o número complexo z de menor argumento tal que $|z - 30i| \leq 15$.

148) (IME-84) Sejam C uma constante real positiva e z um número complexo. Determine os dois lugares geométricos que satisfazem a equação: $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = C$

149) (IME-85) Sejam z_1 e z_2 complexos de raios vetores OP_1 e OP_2, respectivamente. Mostre que OP_1 e OP_2 são perpendiculares se e somente se $z_1\bar{z}_2$ é um imaginário puro.

150) (IME-86) Sabendo-se que x é um número real, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$ e n é um número inteiro positivo, mostre que a expressão $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ pode ser desenvolvida como polinômio em x, de grau n, cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 2^{n-1}.

151) (IME-88) Seja z um número complexo. Mostre que $z + \frac{1}{z}$ é um número real se e somente se z é um número real ou $|z| = 1$.

152) (IME-89) Sejam z e w números complexos tais que $|z| = 1$ e $|w| \neq 1$. Calcule $\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$.

153) (IME-89) Mostre que todas as raízes da equação $(z + 1)^5 + z^5 = 0$ pertencem a mesma reta paralela ao eixo imaginário.

154) (IME-94) Considere os números complexos $z = x + y.i$ e $w = y - x.i$, cujos módulos são tais que $|z| = e^{|w|\cdot\frac{\sqrt{3}}{x}}$ e $|w| = e^{|z|\cdot\frac{1}{y}}$, onde e é base dos logaritmos neperianos. Obter a forma polar de z^2.

155) (IME-95) Dado $Z = \frac{1}{\sqrt{7 + 24i}}$, calcule as partes real e imaginária de Z.

156) (IME-96) Sejam $w_0 = 1$, $w_1 = j$, $w_2 = j^2$ as raízes cúbicas da unidade no plano complexo (considere w_1 o número complexo de módulo 1 e argumento $2\pi/3$). Sabendo-se que se $c \in C$, a rotação R em torno do ponto c e amplitude igual a $\pi/3$ é dada por $R(z) = -j^2 Z - jc$, $\forall c \in C - \{c\}$, pede-se:

a) determinar as relações existentes entre a, b, c, j, j^2, onde a, b $\in$ C, de modo que o triângulo a, b, c seja equilátero.

b) determinar z para que o triângulo i, z, iz seja equilátero.

157) (IME-99) Determine as raízes de $z^2 + 2iz + 2 - 4i = 0$ e localize-as no plano complexo, sendo $i = \sqrt{-1}$.

158) (ITA-2011) Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ e $z_1, z_2, ..., z_n$ as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$, i, j = 1,2,...,n com $i \neq j$, distintos entre si.

159) (IME-2011) Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, onde i é a unidade imaginária, e z um número complexo tal que $\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}$, determine o módulo do número complexo $z - 7 - 9i$.

160) (IME-2008) Considere os números complexos $z_1 = \text{sen } \alpha + i.\cos \alpha$ e $z_2 = \cos \alpha + i.\text{sen } \alpha$, onde α é um número real. Mostre que, se $z = z_1 z_2$, então $-1 \leq R_e(Z) \leq 1$ e $-1 \leq I_m(Z) \leq 1$, onde $R_e(Z)$ e $I_m(Z)$ indicam, respectivamente, as partes real e imaginária de Z.

161) (IME-2001) Dois números complexos são ortogonais se suas representações gráficas forem perpendiculares entre si. Prove que dois números complexos z_1 e z_2 são ortogonais se e somente se: $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 0$

Obs. $\overline{z}$ indica o conjugado de um número complexo z.

Exercícios

1) Dados $z_1 = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})i$ e $z_2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})i$. Calcule $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

2) Se z e w são dois números complexos quaisquer tais que $|z| = |w| = 1$ e $1 + zw \neq 0$, determine se $\frac{z + w}{1 + zw}$ é real, imaginário ou imaginário puro.

3) Dados os números complexos $z_1 = \rho(\cos \theta + i.\text{sen } \theta)$ e $z_2 = \rho(\text{sen } \theta - i.\cos \theta)$, determine se $z_1 - i.z_2$ é real, imaginário ou imaginário puro.

4) Represente geometricamente o conjunto dos números complexos tais que $|z - (1 + i)| \leq 1$.

5) Determine o número complexo de menor argumento tal que $|z - 25i| \leq 15$.

6) Provar que se a soma e o produto de dois números complexos são ambos números reais, então ou os dois complexos são reais ou um é o conjugado do outro.

7) Um ponto z_1 no plano complexo move-se de acordo com a equação $|z_1 - z_0| = |z_1|$, onde z_0 é um ponto fixo que não é a origem. Um segundo ponto z move-se de acordo com a equação $z_1 z = -1$. Prove que o lugar geométrico dos pontos z no plano complexo é uma circunferência com centro em $-1/z_0$ e raio $1/|z_0|$.

8) Provar que $\frac{1 + \sin x + i.\cos x}{1 - \sin x - i.\cos x} = (\tan x + \sec x)i$ para todo x real, $x \neq \pi/2 + k\pi$.

9) Utilizando a fórmula de Moivre, expressar sen 3θ e cos 3θ em função de sen θ e cos θ.

10) Seja $z = x + iy$, $x^2 + y^2 \neq 0$ ($i^2 = -1$, x e y reais). Determine as condições para que $z + \frac{1}{z}$ seja real.

11) Se $A = i^m + i^{-m}$, onde i é a unidade imaginária e m é um número inteiro, então o número total de valores distintos possíveis de A é:

12) Se $b = 2(\cos 30° + i.\text{sen } 30°)$ e $z = \rho(\cos \theta + i.\text{sen } \theta)$, os afixos correspondentes a b, b + z, b + z + iz, b + iz são vértices de qual poliedro?

13) Sendo $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule $\sum_{k=1}^{11} z^k$

14) Calcule i^i.

15) Dados os números complexos: $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i.\text{sen } \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i.\text{sen } \theta_2)$, determine $|z_1 + z_2|$ e mostre que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

16) Qual é a representação geométrica dos números complexos $z = x + yi$ tais que $\frac{z}{\bar{z}} = -i$

17) Determinar os números complexos z tais que $\frac{z}{1-i} + \frac{z-1}{1+i} = \frac{5}{2} + i.\frac{5}{2}$.

18) Os números complexos z_1 e z_2 satisfazem $|z_1 + z_2| = 3$ e $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$. Prove que $\log_3 |(z_1\bar{z}_2)^{2000} + (\bar{z}_1 z_2)^{2000}| = 4000$?

19) Se $z = \rho.(\cos\theta + i.\sin\theta)$, provar que $\frac{z}{z^2 + \rho^2}$ é real e que $\frac{\rho - i.z}{\rho + i.z}$ é imaginário puro.

20) Qual é o número complexo z que verifica a equação: $i.z + 2\bar{z} + 1 - i = 0$?

21) Provar que se a equação $x^2 + (a + bi)x + (c + di) = 0$, onde a, b, c, d $\in \Re$, admite uma raiz real, então $abd = d^2 + b^2c$.

22) Encontre todos os números complexos z satisfazendo simultaneamente as equações: $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ e $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$

23) Determine quanto vale o produto: $\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right]\ldots\left[1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^n}\right]$

24) Calcule o maior valor que pode assumir o módulo do número complexo z satisfazendo a equação: $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$

25) Calcule: $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$

26) Demonstre que a fórmula para resolver a equação biquadrada $x^4 + px^2 + q = 0$, com coeficientes reais, no caso em que $\frac{p^2}{4} - q < 0$ é dada por $x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2} - \frac{p}{4}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2} + \frac{p}{4}}$

27) Prove que: $(1 + \cos\alpha + i.\sin\alpha)^n - 2^n \cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2} + i.\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$

28) Prove que: $\left(\frac{1 + i.\tan\alpha}{1 - i.\tan\alpha}\right)^n = \frac{1 + i.\tan n\alpha}{1 - i.\tan n\alpha}$.

29) Encontre todos os números complexos que satisfazem a equação $\bar{z} = z^{n-1}$.

30) Sejam z_1 e z_2 números complexos tais que $|z_1| = 3$, $|z_2| = 5$ e $|z_1 + z_2| = 7$. Prove que $\arg\frac{z_2^3}{z_1^3} = \pi$?

31) Prove que se a, b e c são números complexos tais que $a + b + c = 0$ e $|a| = |b| = |c|$, então $a^3 = b^3 = c^3$.

32) Prove que se $(a + bi)^n = c + di$ onde n é número inteiro positivo, então $c^2 + d^2 = (a^2 + b^2)^n$.

33) Dado $w^3 = 1$, $w \neq 1$ (isto é, w é um complexo raiz cúbica da unidade), determine o valor de: $(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^4)(1 - w^5)(1 - w^7)(1 - w^8)$

34) Se z, z' são números complexos, demonstrar que: $|z + z'| = |z - z'| \Rightarrow \frac{iz}{z'}$ é um número real.

35) Seja F: C → C tal que, para todo $z = x + yi$ (x, $y \in \Re$), $F(z) = iz + 2 + 3i$. Determine o conjunto dos complexos z cujas imagens por F estão na reta de equação $3x + 2y = 5$.

36) Qual o lugar geométrico que descreve o afixo do número complexo z para que os afixos de z, iz e i estejam alinhados?

37) Demonstrar que se dois números inteiros são somas de dois quadrados, o produto desses números também será soma de dois quadrados.

38) Prove que o lugar geométrico descrito pela imagem do complexo $z = x + iy$ se $|z - 2| + |z| = 4$

é uma elipse, com os focos nos pontos (2, 0) e (0, 0).

39) Verificar que se $|z_1| = |z_2|$ e $\arg z_1 + \arg z_2 = 0$; então z_1 e z_2 são números complexos conjugados.

40) Suponhamos que $z_1 = a + i.x$ e $z_2 = a + i.y$, ($a \neq 0$, $x \neq 0$) são dois números complexos tais que $z_1.z_2 = 2$. Prove que $z_1 = \overline{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = (2)^{1/2}$.

41) Designando por w uma raiz cúbica imaginária, da unidade, positiva, prove que $(a + b)(a + bw)(a + bw^2) = a^3 + b^3$

42) Concluir que a soma das raízes de índice n, de um número qualquer é sempre zero.

43) Provar que sendo $\varepsilon_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i.\sin\frac{2\pi}{n}$, as n raízes de índice n da unidade são $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$.

44) Calcular as raízes de $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$, utilizando a fórmula de Moivre.

45) Demonstre que três pontos z, w e v estão em linha reta (no plano complexo) se, e somente se, $\frac{z-w}{z-v}$ é real, logo, a equação da reta que passa por z, w e v é $\mathrm{Im}\frac{z-w}{z-v} = 0$.

46) Prove que $|1 + i.z| = |1 - i.z|$ se e somente se z é real.

47) Sendo n um múltiplo de 4, demonstre que

$$1 + 2.i + 3.i^2 + 4.i^3 + \ldots + (n+1).i^n = \frac{n + 2 - n.i}{2}$$

48) Utilizando propriedades dos números complexos, prove que:

a) $1 + a.\cos\theta + a^2.\cos 2\theta + \ldots = \frac{1 - a.\cos\theta}{1 - 2a.\cos\theta + a^2}$

b) $a.\sin\theta + a^2.\sin 2\theta + \ldots = \frac{a.\sin\theta}{1 - 2a.\cos\theta + a^2}$

c) $\frac{\sin\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 3\theta}{8} + \ldots = \frac{2\sin\theta}{5 - 4\cos\theta}$

49) Prove que $\tan(\arg z + \arg w) = \frac{\mathrm{Im}(zw)}{\mathrm{Re}(zw)}$.

50) Seja w uma raiz primitiva da n-ésima da unidade ($w \neq 1$). Prove que $1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 0$.

51) Seja w uma raiz primitiva da unidade de grau 2n ($w \neq 1$).
a) Prove que $w^n = -1$
b) Prove que $1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 2/(1 - w)$

52) Prove que $1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \ldots + nw^{n-1} = -n/(1 - w)$
, onde w é uma enésima raiz da unidade ($w \neq 1$).

53) Seja C o corpo dos números complexos. Considere $f: C \to C$ dada por $f(x + yi) = e^x(\cos y + i.\sin y)$ onde $x \in \Re$, $y \in \Re$ e i é a unidade imaginária.
a) Mostre que a reta $x = x_0$ é levada por f sobre uma circunferência com centro na origem e raio e^{x_0}.
b) Mostre que a imagem por f da reta $y = y_0$ é uma semi-reta que passa pela origem e possui coeficiente angular igual a tg y_0 ($y_0 \neq \pi/2$) ou uma reta vertical passando pela origem ($y_0 = \pi/2$).

54) Demonstre que as raízes de $(x + 1)^m - (x - 1)^m = 0$ são da forma $x_k = i.\cot k\pi/m$, $k = 1, 2, \ldots, m - 1$.

55) Demonstre que as raízes de $(x + i)^m - (x - i)^m = 0$ são da forma $x_k = \cot k\pi/m$, $k = 1, 2, \ldots, m - 1$.

56) Defini-se a seqüência de números complexos $\{a_n\}$, $n > 1$, por

$$a_n = (1+i)(1+\frac{i}{\sqrt{2}})(1+\frac{i}{\sqrt{3}})\ldots\ldots(1+\frac{i}{\sqrt{n}})$$

Analisar se existe um número natural m tal que:

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n - a_{n+1}| = 2002$$

57) Um estudante usou a primeira fórmula de Moivre incorretamente como:

$$(\text{sen}\,\alpha + i.\cos\alpha)^n = \text{sen}\,n\alpha + i.\cos n\alpha$$

Para quais valores de n a equação acima é verdadeira para todo α?

Polinômios

2.1. DEFINIÇÃO:

Se A é um número complexo e n um número natural, denomina-se a expressão $A.x^n$ como parcela polinomial ou termo polinomial. Nesta parcela polinomial, A recebe o nome de coeficiente e n de expoente. Dá-se o nome de polinômio à soma de uma ou mais parcelas polinomiais. Em linguajar matemático, dada a seqüência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, chamamos de polinômio ou função polinomial a qualquer função $p: C \to C$ da forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

Os números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são denominados coeficientes do polinômio e a letra x chama-se variável independente. São exemplos de polinômios as seguintes funções:

$f(x) = x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 8x - 1$; $g(x) = x^{100} + 1$; $h(x) = 9$

2.2. VALOR NUMÉRICO:

O valor numérico de um polinômio $p(x)$, para $x = a$, é o número que se obtém substituindo x por a e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio.

Por exemplo, se $p(x) = 2x^4 - 4x^2 - 6x + 7$, então temos que:

i) $p(0) = 2(0)^4 - 4(0)^2 - 6(0) + 7 = 7$

ii) $p(2) = 2(2)^4 - 2(2)^2 - 6(2) + 7 = 32 - 8 - 12 + 7 = 19$

iii) $p(1 - i) = 2(1 - i)^4 - 2(1 - i)^2 - 6(1 - i) + 7 = -8 + 4i - 6 + 6i + 7 = -7 + 10i$

2.2.1. Soma dos Coeficientes

Desde que todo polinômio pode ser escrito da forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ então para calcular a soma dos seus coeficientes $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ basta aplicar $x = 1$ em $p(x)$, pois $p(1) = a_0 + a_1.1 + a_2.1^2 + \ldots + a_n.1^n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Isto pode ser feito independentemente de como $p(x)$ está escrito, por mais que $p(x)$ apareça escrito como soma, multiplicação ou até divisão de outros polinômios.

Por outro lado, quando aplicamos $x = -1$ em um polinômio, obtemos:

$p(-1) = a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 + \ldots + a_n(-1)^n \Rightarrow p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n$

Como $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, temos que $p(1) + p(-1)$ é igual a duas vezes a soma dos coeficientes dos termos de expoente par, que denominaremos por S_{par}. Logo, segue diretamente que $S_{par} = \dfrac{p(1) + p(-1)}{2}$. Através de cálculos análogos chegamos a $S_{impar} = \dfrac{p(1) - p(-1)}{2}$.

Exemplos:

1) (ESPM-2003) Um polinômio P é tal que $P(x) + x.P(x - 2) = x^2 + 1$ para qualquer x real. O valor de P(4) é:

a) 3 b) 5 c) 7 d) 10 e) 12

Solução:

Fazendo $x = 0$ obtemos: $P(0) + 0.P(-2) = 0^2 + 1 \Rightarrow P(0) = 1$

Fazendo $x = 2$ obtemos: $P(2) + 2.P(0) = 2^2 + 1 \Rightarrow P(2) = 3$

Fazendo $x = 4$ obtemos: $P(4) + 4.P(2) = 4^2 + 1 \Rightarrow P(4) = 5$

2) (UFRN-95) A soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = \left(4x^2 - 6x + 1\right)^5 (3x - 1)^4$ é:

a) 20 b) 18 c) 12 d) – 8 e) – 16

Solução:

Sabe-se que a soma dos coeficientes de qualquer polinômio é igual a p(1). Portanto:

$S_{coeficientes} = p(1) = (4.1^2 - 6.1 + 1)^5 (3.1 - 1)^4 = -16$.

3) (Unisul-2004) Considerando o polinômio $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 49x^{48} + 50x^{49}$, analise as proposições abaixo.

(I) P(1) = 1275
(II) P(-1) = 25
(III) P(0) = 0
(IV) A soma dos coeficientes dos termos de expoente ímpar de x é 650.
Estão corretas, somente:
a) I - II - IV b) I - IV c) II – III d) I – II e) III - IV
Solução:

(I) $P(1) = 1 + 2.1 - 3.1^2 + ... + 49.1^{48} + 50.1^{49} = 1 + 2 + 3 + ... + 49 + 50 = \frac{(1+50).50}{2} = 1275$, ou seja, o item é verdadeiro.

(II) $P(-1) = 1 + 2.(-1) + 3.(-1)^2 + ... + 49.(-1)^{48} + 50.(-1)^{49} = 1 - 2 + 3 - ... + 49 - 50 \Rightarrow$

$P(-1) = (1 + 3 + ... + 49) - (2 + 4 + ... + 50) = \frac{(1+49).25}{2} - \frac{(2+50).25}{2} = 625 - 650 = -25$, ou seja, o item é falso.

(III) $P(1) = 1 + 2.0 + 3.0^2 + ... + 49.0^{48} + 50.0^{49} = 1$, logo o item é falso.

(IV) Pelo que foi exposto no item 2.1. sabemos que a soma dos coeficientes de expoente ímpar de x vale $S_{impar} = \frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{1275 - (-25)}{2} = 650$, conseqüentemente o item é verdadeiro.

Assim, a alternativa correta é a letra B.

1) (UEMS-2004) Assinale a alternativa correta referente ao valor de a e b, para que o polinômio $P(x) = x^2 + bx + 2$ obedeça às relações $P(a) = -b$ e $P(a+1) = 0$

a) $a = -1$, $b = -\frac{9}{2}$ b) $a = 0$, $b = -1$ c) $a = 0$, $b = 0$

d) $a = -1$, $b = 2$ e) $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{9}{2}$

Solução:

$P(a) = -b \Rightarrow (a)^2 + b(a) + 2 = -b \Rightarrow a^2 + ab + b + 2 = 0$

$P(a+1) = 0 \Rightarrow (a+1)^2 + b(a+1) + 2 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 + ab + b + 2 = 0 \Rightarrow$

$a^2 + ab + b + 2 = -2a - 1 \Rightarrow -2a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Logo: $P(a+1) = 0 \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{b}{2} + 2 = 0 \Rightarrow b = -\frac{9}{2}$.

5) (ITA-2010) Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficiente $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + i\, a_{n-1}$, $n = 1, 2, ..., 15$. Das afirmações:

I. $p(-1) \notin R$,

II. $|p(x)| \leq 4\,(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$, $\forall x \in [-1,1]$,

III. $a_8 = a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I b) II c) III d) I e II e) II e III.

Solução (Alternativa E):

Seja $P(x) = \sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com $a_0 = -1$ e $a_n = 1 + i a_{n-1}$; $n = 1, 2, ...,15$. Então:

$a_0 = -1$ $a_1 = 1 - i$ $a_2 = 1 + i(1 - i) = 2 + i$ $a_3 = 1 + i(2 + i) = 2i$ $a_4 = 1 + 2i.i = -1$ ...

Logo $a_{4k+p} = a_p$, com k e p naturais. Assim: $P(x) = [-1 + (1 - i)x + (2 + i)x^2 + 2ix^3].(1 + x^4 + x^8 + x^{12})$

Portanto:

I - Falsa

$P(-1) = [-1 + (1-i)(-1) + (2+i)(-1)^2 + 2i(-1)^3].[1 + (-1)^4 + (-1)^8 + (-1)^{12}] \Rightarrow P(-1) = 0 \Rightarrow P(-1) \in R$

II – Verdadeira

$|P(x)| = |-1 + 2ix^3 + (1-i)x + (2+i)x^2|.|1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \Rightarrow$

$P(x)| \leq [|-1 + 2ix^3| + |(1-i)x| + |(2+i)x^2|].|1 + x^4 + x^8 + x^{12}|$

Para $x \in [-1,1]$, tem-se que: $|-1 + 2ix^3| \leq 3$, $|(1-i).x| \leq \sqrt{2}$, $|(2+i)x^2| \leq \sqrt{5}$, $|1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \leq 4$

Logo: $|P(x)| \leq (3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}).4$

III – Verdadeira

Como visto anteriormente: $a_{4k+p} = a_p$. Tomando P = 4 e k = 1, tem-se: $a_8 = a_4 = -1$

6) (Olimpíada da Rússia-62) Prove que não existem inteiros a, b, c, d tais que o polinômio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ é igual a 1 para x = 19 e igual a 2 para x = 62.

Solução:

$P(19) = 1 \Rightarrow a.19^3 + b.19^2 + c.19 + d = 1$

$P(62) = 2 \Rightarrow a.62^3 + b.62^2 + c.62 + d = 2$

Subtraindo a segunda da primeira temos que $a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19) = 1 \Rightarrow$

$a(62-19)(62^2 + 19^2 + 62.19) + b(62-19)(62+19) + c(62-19) = 1 \Rightarrow$

$43[a(62^2 + 19^2 + 62.19) + b.81 + c] = 1$

que não possui soluções inteiras para a, b, c, pois 43 não divide 1.

7) (Olimpíada da Rússia-2001) Os valores da função quadrática $f(x) = x^2 + ax + b$ para dois inteiros consecutivos são os quadrados de dois inteiros também consecutivos. Mostre que os valores da função quadrática são quadrados perfeitos para todos os inteiros.

Solução:

O que o enunciado propõe é que existem inteiros c e k tais que: $f(c) = k^2$ e $f(c+1) = (k+1)^2$

Assim: $k^2 = c^2 + ac + b$ (1) $k^2 + 2k + 1 = c^2 + 2c + 1 + ac + a + b$ (2)

Subtraindo: $2k = 2c + a \Rightarrow a = 2k - 2c$ (3)

Aplicando (3) em (1): $k^2 = c^2 + 2(k-c)c + b \Rightarrow k^2 = c^2 - 2c^2 + 2kc + b \Rightarrow k^2 - 2kc + c^2 = b \Rightarrow$

$(k-c)^2 = b \Rightarrow b = a^2/4$

Portanto: $f(x) = x^2 + ax + b = x^2 + ax + a^2/4 = (x + a/2)^2$

2.3. RAIZ DE UM POLINÔMIO

Se $p(a) = 0$, o número a é denominado raiz ou zero de $p(x)$. Observe que em $q(x) = x^3 - 1$ temos que $q(1) = 1^3 - 1 = 0$, ou seja, podemos afirmar que 1 é raiz de $q(x)$. No capítulo que trata de equações polinomiais serão apresentados teoremas sobre a quantidade e as relações entre as raízes de um polinômio.

Exemplos:

1) (UPF-2002) Dados os polinômios $P(x) = x^4 - 2x^2 + 4x + 5$ e $D(x) = x^2 + 4$, a alternativa correta é

a) $P(1) = D(1)$ b) $\frac{P(3)}{D(-1)} = 16$ c) 3 é raiz de $P(x)$ d) $\frac{P(2)}{D(-1)} = 7$

Solução:

Vamos analisar item por item:

a) $P(1) = 1^4 - 2.1^2 + 4.1 + 5 = 8$ e $D(1) = 1^2 + 4 = 5$. FALSO

b) $P(3) = 3^4 - 2.3^2 + 4.3 + 5 = 80$ e $D(-1) = (-1)^2 + 4 = 5$. VERDADEIRO

c) Pelo item anterior $P(3) = 80 \neq 0$. FALSO

d) $P(2) = 2^4 - 2.2^2 + 4.2 + 5 = 21$ e $D(-1) = 5$. FALSO

2) (Univale-2006) O valor de m para que uma das raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 4x + 2k$ seja $1 + i$ é:

a) $-3 + i$ b) $-3 - i$ c) $1 - 3i$ d) $1 + 3i$ e) $3 + i$

Solução:

Se $1 + i$ é raiz de $P(x)$ então $P(1 + i) = 0 \Rightarrow (1 + i)^3 - 4(1 + i) + 2k = 0 \Rightarrow$

$1 + 3.1^2.i + 3.1.i^2 + i^3 - 4 - 4i + 2k = 0 \Rightarrow 1 + 3i - 3 - i - 4 - 4i + 2k = 0 \Rightarrow k = 3 + i$

3) (Unioste-2004) A respeito do polinômio $p(x) = x^4 - 1$, é correto afirmar que

(01) o gráfico de $p(x)$ é uma parábola.

(02) $p(x)$ possui raízes reais.

(04) o gráfico de $p(x)$ passa pelo ponto $(0, 0)$.

(08) $2i$ é raiz de $p(x)$.

(16) o gráfico de $p(x)$ intercepta o gráfico de $-p(x)$ em apenas um ponto.

Solução:

(01) Polinômios cujos gráficos são representados por uma parábola são da forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ou seja, o item é falso.

(02) Perceba que $p(1) = 1^4 - 1 = 0$, portanto 1 é raiz de $p(x)$. Como $1 \in \mathbb{R}$, o item é verdadeiro.

(04) Para que o gráfico de $p(x)$ passe pelo ponto $(0, 0)$ teríamos $p(0) = 0$, que não ocorre, uma vez que $p(0) = 0^4 - 1 = -1$. Item falso.

(08) $p(2i) = (2i)^4 - 1 = 16 - 1 = 15$, logo $2i$ não é raiz de $p(x)$. Item falso.

(16) As interseções de $p(x)$ e $-p(x)$ ocorrem quando $p(x) = -p(x) \Rightarrow 2p(x) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$. Como $p(1) = 1^4 - 1 = 0$ e $p(-1) = (-1)^4 - 1 = 0$, então os gráficos de $p(x)$ e $-p(x)$ interceptam-se em mais de um ponto. Item falso.

4) (ITA-2005) No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é igual a

a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{3}{2}$

Solução:

Como a soma dos coeficientes é igual a $p(1)$: $(a - 2b + c + 1)^5 = 32$

Supondo que os coeficientes são todos reais: $a - 2b + c + 1 = 2 \Rightarrow a - 2b + c = 1$ **(1)**

$p(0) = 0 \Rightarrow c = -1$ **(2)**

$p(-1) = 0 \Rightarrow a + 2b + c = -1$ **(3)**

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1), (2) e (3):

$a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = -1$. Assim: $a + b + c = -\frac{1}{2}$.

5) (ITA-2003) Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, cujos coeficientes 2, a_2, ... , a_n formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2) = 5460$, tem-se que o valor de $\frac{n^2 - q^3}{q^4}$ é igual a:

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{11}{6}$ e) $\frac{15}{8}$

Solução:

Como os coeficientes formam uma PG podemos escrever: $P(x) = 2x + 2qx^2 + 2q^2x^3 + ... + 2q^{n-1}x^n \Rightarrow$
Onde temos uma nova PG, formada pelos termos de P(x), cujo 1º termo é 2x e a razão é qx.

Assim: $P(x) = \frac{2x \cdot [(qx)^n - 1]}{qx - 1} \Rightarrow P(x) = \frac{2x(q^n x^n - 1)}{qx - 1}$

Como $-1/2$ é raiz: $P(-1/2) = 0$, ou seja: $\frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(q^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{q\left(-\frac{1}{2}\right) - 1} = 0 \Rightarrow q^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1 = 0 \Rightarrow$

$q^n = \frac{2^n}{(-1)^n}$, como $q > 0 \Rightarrow q = 2$ e n é par.

Como P(2) é igual a 5460 segue que:

$\frac{2.2[(2q)^n - 1]}{2q - 1} = 5460 \Rightarrow \frac{4(4^n - 1)}{3} = 5460 \Rightarrow 4^n = 4096 \Rightarrow 2^{2n} = 2^{12} \Rightarrow n = 6.$

Daí: $\frac{n^2 - q^3}{q^4} = \frac{6^2 - 2^3}{2^4} = \frac{7}{4}$

6) (IME-56) Dadas as equações
(i) $x^4 - 16x^3 + 89x^2 - 206x + 168 = 0$
(ii) $x^4 - 16x^3 + 91x^2 - 216x + 180 = 0$
(iii) $x^4 - mx^3 + nx^2 - 462x + 432 = 0$
Determinar:
a) As raízes comuns das equações (i) e (ii)
b) Os valores de m e n da equação (iii), sabendo que ela admite as raízes determinadas no item (a).

Solução:

a) Seja a uma raiz comum de (1) e (2). Logo:
$a^4 - 16a^3 + 89a^2 - 206a + 168 = 0$ e
$a^4 - 16a^3 + 91a^2 - 216a + 180 = 0$
Subtraindo estas duas equações: $2a^2 - 10a + 12 = 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a - 3) = 0 \Rightarrow$
$a = 2$ ou $a = 3$ são a raízes comuns de (i) e (ii).
b) Se 2 é raiz de (iii): $2^4 - m.2^3 + n.2^2 - 462.2 + 432 = 0 \Rightarrow 16 - 8m + 4n - 924 + 432 = 0 \Rightarrow$
$n - 2m = 119$
Se 3 é raiz de (iii): $3^4 - m.3^3 + n.3^2 - 462.3 + 432 = 0 \Rightarrow 81 - 27m + 9n - 1386 + 432 = 0 \Rightarrow$
$n - 3m = 97$
Resolvendo o sistema linear obtido temos que: $m = 22$ e $n = 163$.

7) (ITA-2008) Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então p (-2) é igual a

a) -25 b) -27 c) -36 d) -39 e) -40

Solução:

Como -1 é raiz: $-a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4$ (1)

Como a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam uma PA:

$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$ (2)

Substituindo a relação (2) em (1): $3a_3 = 2a_3 \Rightarrow a_3 = 0$

Uma vez que $a_4 = 1/2$ a razão r da PA vale $a_4 - a_3 = 1/2$

Portanto: $a_1 = -1$, $a_2 = -1/2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1/2$ e $a_5 = 1 \Rightarrow p(x) = x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 1$

Logo: $p(-2) = (-2)^5 + \frac{(-2)^4}{2} - \frac{(-2)^2}{2} - 2 + 1 = -32 + 8 - 2 + 1 = -25$

8) (ITA-2009) O polinômio de grau 4: $(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a:

a) $3 + \sqrt{3}$. b) $2 + 3\sqrt{3}$. c) $2 + \sqrt{2}$. d) $1 + 2\sqrt{2}$. e) $2 + 2\sqrt{2}$.

Solução:

Para que a função seja par os coeficientes dos termos de expoente ímpar devem ser nulos:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = -2c \text{ e } a = 2b$$

Substituindo na função:

$(a + a - \frac{3a}{2})x^4 - (a - \frac{a}{2})x^2 + 2(a - \frac{3a}{2}) = 0 \Rightarrow \frac{a}{2}x^4 - \frac{a}{2}x^2 - a = 0 \Rightarrow a(x^4 - x^2 - 2) = 0 \Rightarrow$

$a(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0$

I – se $a = 0$, a função é o polinômio identicamente nulo, que não é permitido pois o enunciado afirma que o polinômio possui grau 4.

II – se $a \neq 0$, as raízes são $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ i, e $-i$

Assim, a soma dos módulos das raízes vale:

$|\sqrt{2}| + |\sqrt{2}| + |i| + |-i| = 2\sqrt{2} + 2$

9) (ITA-2005) No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é igual a

a) $-\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{3}{2}$

Solução:

Do enunciado $p(x) = (ax^2 - 2bx + c + 1)^5$.

Como a soma dos coeficientes é igual a $p(1)$: $(a - 2b + c + 1)^5 = 32$

Supondo que os coeficientes são todos reais: $a - 2b + c + 1 = 2 \Rightarrow a - 2b + c = 1$ (1)

$p(0) = 0 \Rightarrow c = -1$ (2)

$p(-1) = 0 \Rightarrow a + 2b + c = -1$ (3)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1), (2) e (3): $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = -1$.

Assim: $a + b + c = -\frac{1}{2}$

2.4 SOMA E MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

2.4.1. Soma de Polinômios

Inicialmente, podemos observar que se duas parcelas polinomiais possuem mesmo expoente, então a soma destas parcelas é realizada da seguinte maneira: $Ax^n + Bx^n = (A + B)x^n$

A soma de polinômios funciona de forma semelhante, onde devemos somar os coeficientes das parcelas de mesmo expoente. Por exemplo, sejam os polinômios f e g, ambos de C→C, definidos por $f(x) = x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 3x - 8$ e $g(x) = 7x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 1$.

Assim: $f(x) + g(x) = (x^5 + 0.x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 3x - 8) + (0.x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 1) \Rightarrow$

$f(x) + g(x) = (1 + 0)x^5 + (6 + 7)x^4 + (-9 + 7)x^2 + (3 + 0)x + (-8 + 1) \Rightarrow$

$f(x) + g(x) = x^5 + 13x^4 - 2x^2 + 3x - 7$

2.4.1.1. Propriedades da Soma de Dois Polinômios

i) Associativa: Se f, g e h são polinômios, então $f + (g + h) = (f + g) + h$

Demonstração:

Sejam: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ e $h(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$.

Assim: $f + (g + h) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} (b_i + c_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i + c_i) x^i$

$(f + g) + h = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right) + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i + c_i) x^i$

ii) Comutativa: $f + g = g + f$

Demonstração:

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = g(x) + f(x)$$

iii) Elemento Neutro: $p(x) + 0 = p(x)$

Demonstração:

$p(x) + 0 = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 + 0 = a_n x^n + ... + a_1 x + (a_0 + 0) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = p(x)$

iv) Inverso Aditivo: $p(x) + (-p(x)) = 0$

Demonstração:

$p(x) + (-p(x)) = (a_n x^n + ... + a_1 x + a_0) + (-a_n x^n - ... - a_1 x - a_0) = (a_n - a_n)x^n + ... + (a_1 - a_1)x + (a_0 - a_0) = 0.x^n + ... + 0.x + 0 = 0$

Denomina-se $-p(x)$ de polinômio oposto de $p(x)$.

Do exposto acima podemos concluir que para subtrairmos dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ basta fazer a soma de $p(x)$ com o oposto de $q(x)$: $p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x))$

2.4.2. Multiplicação de Polinômios

Se Ax^n e Bx^m são duas parcelas polinomiais, então define-se a multiplicação destas duas parcelas da seguinte maneira: $(Ax^n).(Bx^m) = A.B.x^{n+m}$

Desta forma, a multiplicação de dois polinômios, $P(x).Q(x)$, é obtida somando as parcelas obtidas pela multiplicação de cada parcela de P com cada parcela de Q. Em linguajar matemático, se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ então:

$$P(x).Q(x) = a_n b_m x^{n+m} + a_n b_{m-1} x^{n+m-1} + a_n b_{m-2} x^{n+m-2} + ... + a_0 b_1 x + a_0 b_0$$

Entretanto, perceba que algumas destas parcelas possuem mesmo expoente de x, fazendo com que seus coeficientes possam ser somados. Logo:

$P(x).Q(x) = a_nb_mx^{m+n} + (a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + (a_nb_{m-2} + a_{n-1}b_{m-1} + a_{n-2}b_m)x^{n+m-2} + ... + (a_nb_1 + a_1b_n)x + a_nb_n$.

ou seja, o coeficiente de x^k é igual a $\sum a_i.b_j$, onde $i + j = k$, com $i, j \in IN$.

Escrevendo em forma de somatório: $\boxed{P(x).Q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} x^{m+n-i}\left(\sum_{j=0}^{i} a_{n-j}.b_{m+j-i}\right)}$

Por exemplo, se $P(x) = 3x^2 - 7x + 2$ e $Q(x) = 2x^5 - 5x^4 + 6x - 5$ então o produto P.Q é dado por:

$P(x).Q(x) = (3x^2 - 7x + 2)(2x^5 - 5x^4 + 6x - 5) \Rightarrow$

$P(x).Q(x) = (3x^2)(2x^5) + (3x^2)(-5x^4) + (3x^2)(6x) + (3x^2)(-5) + (-7x)(2x^5) + (-7x)(-5x^4) + (-7x)(6x) + (-7x)(-5) + (2)(2x^5) + (2)(-5x^4) + (2)(6x) + (2)(-5) \Rightarrow$

$P(x).Q(x) = 6x^7 - 15x^6 + 18x^3 - 15x^2 - 14x^6 + 35x^5 - 42x^2 + 35x + 4x^5 - 10x^4 + 12x - 10 \Rightarrow$

$P(x).Q(x) = 6x^7 - 29x^6 + 39x^5 - 10x^4 + 18x^3 - 57x^2 + 46x - 10$

2.4.2.1. Propriedades da Multiplicação de Polinômios

Nas demonstrações abaixo suponha que $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$ e $h(x) = \sum_{i=0}^{p} c_ix^i$.

i) Associativa: f.(g.h) = (f.g).h

Demonstração:

O polinômio g.h é da forma $\sum_{i=0}^{m+p} d_ix^i$, onde o coeficiente de x^r é igual a $\sum b_i.c_j$ com $i + j = r$, sendo $i, j \in IN$. Desta forma, o polinômio f(g.h) é da forma $\sum_{i=0}^{m+n+p} e_ix^i$ onde o coeficiente de x^r vale:

$$a_r\sum_{i-j=0} b_ic_j + a_{r-1}\sum_{i+j=1} b_ic_j + a_{r-2}\sum_{i+j=2} b_ic_j + ... + a_0\sum_{i+j=r} b_ic_j = \sum_{i+j+k=r} a_ib_jc_k, \text{ onde } i, j \text{ e } k \in IN.$$

O polinômio f.g é da forma $\sum_{i=0}^{m+n} u_ix^i$, onde o coeficiente de x^r é igual a $\sum a_i.b_j$ com $i + j = r$, sendo $i, j \in IN$. Desta forma, o polinômio (f.g).h é da forma $\sum_{i=0}^{m+n+p} v_ix^i$ onde o coeficiente de x^r vale:

$$\left(\sum_{i-j=0} a_ib_j\right)c_r + \left(\sum_{i-j=1} a_ib_j\right)c_{r-1} + \left(\sum_{i-j=2} a_ib_j\right)c_{r-2} + ... + \left(\sum_{i+j=r} a_ib_j\right)c_0 = \sum_{i+j+k=r} a_ib_jc_k, \text{ onde } i, j \text{ e } k \in IN.$$

Desta maneira, encontramos expressões polinomiais idênticas para f.(g.h) e (f.g).h.

ii) Comutativa: f.g = g.f

Demonstração:

Observe que: $f(x).g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_ix^i\right) = \sum_{i=0}^{m+n} d_ix^i$, onde $d_r = \sum_{i+j=0}^{i+j=r} a_i.b_j$, onde $i, j \in IN$.

Analogamente temos que: $g(x).f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} b_ix^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} a_ix^i\right) = \sum_{i=0}^{m+n} e_ix^i$, onde $e_r = \sum_{i+j=0}^{i+j=r} b_i.a_j = \sum_{i+j=0}^{i+j=r} a_j.b_j$, onde $i + j = r$, sendo $i, j \in IN$. Desta maneira, concluímos que f.g = g.f.

iii) Elemento Neutro: f.1 = 1.f = f

Demonstração:

$f(x).1 = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0).1 = a_n.1x^n + a_{n-1}.1x^{n-1} + ... + a_1.1x + a_0.1 =$

$= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = f(x)$

$1.f(x) = 1.(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0) = 1.a_nx^n + 1.a_{n-1}x^{n-1} + ... + 1.a_1x + 1.a_0 =$
$= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = f(x)$
Logo, concluímos que 1 é o elemento neutro da multiplicação de polinômios.

iv) Distributiva: $f.(g + h) = f.g + f.h$
Demonstração:

O coeficiente de x^r em $g(x) + h(x)$ vale $b_r + c_r$. Assim, o coeficiente de x^s em $f.(g + h)$ vale:
$$\sum_{i+j=s} a_i(b_j + c_j) = \sum_{i+j=s} a_i.b_j + a_ic_j = \sum_{i+j=s} a_i.b_j + \sum_{i+j=s} a_ic_j$$
O coeficiente de x^s em $f(x).g(x)$ vale $\sum_{i+j=s} a_i.b_j$ e o coeficiente de x^s em $f(x).h(x)$ vale $\sum_{i+j=s} a_i.c_j$.
Assim, o coeficiente de x^s em $f(x).[g(x) + h(x)]$ é igual a $\sum_{i+j=s} a_i.b_j + \sum_{i+j=s} a_i.c_j$.
Portanto, encontramos expressões algébricas idênticas tanto para $f.g$ quanto para $f.h$.

Exemplos:

1) (UFMG-99) Considere o polinômio $p(x) = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 - x^5 + x^4)$. O polinômio $p(x)$ é igual a
a) $x^4(x^3 - 1)(x^3 + 1)$ b) $x^4(x^6 - 2x^4 - 1)$ c) $x^4(x^3 - 1)^2$ d) $x^4(x^6 - 2x^2 + 1)$
Solução:
$p(x) = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4) \Rightarrow$
$p(x) = x.x^9 + x.x^8 + x.x^7 + x.x^6 + x.x^5 - x.x^4 - 1.x^9 - 1.x^8 - 1.x^7 - 1.x^6 - 1.x^5 - 1.x^4 \Rightarrow$
$p(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 - x^9 - x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 = x^{10} - x^4 = x^4(x^6 - 1) \Rightarrow$
$p(x) = x^4(x^3 - 1)(x^3 + 1)$

2) (UFSE-2005) Analise a afirmação abaixo.
Se p é o produto dos polinômios $2x^3 - x^2 + 1$ e $x^2 - x - 2$, então $p = 2x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x - 2$.
Solução:
$p = (2x^3 - x^2 + 1)(x^2 - x - 2) \Rightarrow$
$p = 2x^3.x^2 + (2x^3)(-x) + (2x^3)(-2) + (-x^2)(x^2) + (-x^2)(-x) + (-x^2)(-2) + 1.x^2 + 1(-x) + 1(-2) \Rightarrow$
$p = 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 - x^4 + x^3 + 2x^2 + x^2 - x - 2 \Rightarrow p = 2x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x - 2$
Portanto, a afirmativa é verdadeira.

3) O produto $(1 + x + x^2 + ... + x^{100})(1 + x + x^2 + ... + x^{25})$ é um polinômio na variável x. O coeficiente de x^{50} é:
Solução:
Pela definição de multiplicação de polinômios, cada uma das parcelas polinomiais do produto é obtida multiplicando-se cada parcela do primeiro polinômio por cada parcela do segundo polinômio. Assim, a parcela de x^{50} aparece quando multiplicamos $x^r.x^s$, com $r + s = 50$ (com x^r do 1º polinômio e x^s do 2º polinômio). Logo, a parcela de x^{50} surge da seguinte maneira:
$$x^{25}.x^{25} + x^{26}.x^{24} + x^{27}.x^{23} + ... + x^{50}.1 = 26.x^{50}$$
Assim, o coeficiente de x^{50} é 26.

2.5. GRAU DE UM POLINÔMIO

Definição:

Grau de um polinômio $p(x)$ é o maior expoente de x entre todos os termos não nulos deste polinômio. Ou seja, se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$, então $\partial p = n$.

Por exemplo, se $p(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ então $\partial p = 3$ e se $p(x) = 4x^{99} + 5x^{56} + 2x$ então $\partial p = 99$.

2.5.1. Grau da soma de dois polinômios:

Se p_1, p_2, $p_1 + p_2$ são polinômios não nulos, então o grau de $p_1 + p_2$ é menor ou igual ao maior grau dos números ∂p_1 e ∂p_2. Ou seja, $\partial(p_1 + p_2) \leq$ máx $\{\partial p_1, \partial p_2\}$.

Demonstração:

Separemos nossa demonstração em dois casos:

1) $\partial p_1 = \partial p_2 = n$

Neste caso podemos escrever p_1 e p_2 da seguinte maneira:

$p_1(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ e $p_2(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$, com $a_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$.

Assim: $p_1(x) + p_2(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

Se $a_n \neq -b_n$ teremos $\partial(p_1 + p_2) = n =$ máx $\{\partial p_1, \partial p_2\}$

Se $a_n = -b_n$ teremos $\partial(p_1 + p_2) \leq n =$ máx $\{\partial p_1, \partial p_2\}$

2) $\partial p_1 \neq \partial p_2$

Suponhamos, sem perda de generalidades que $n = \partial p_1 > \partial p_2$.

Desta forma, quando somarmos p_1 e p_2 a parcela com maior expoente de x será a_nx^n, fazendo com que $\partial(p_1 + p_2) = n =$ máx $\{p_1, p_2\}$.

Exemplo:

1) Determine o grau do polinômio $p_1(x) + p_2(x)$ nos seguintes casos:

I) $p_1(x) = x^3 + 3x + 1 \quad p_2(x) = x^2 + 5x - 2$,

II) $p_1(x) = x^4 + x - 3 \quad p_2(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 5$,

Solução:

I) $\partial p_1 = 3$ e $\partial p_2 = 2 \Rightarrow$ máx $\{\partial p_1, \partial p_2\} = 3$

$p_1(x) + p_2(x) = x^3 + x^2 + 8x - 1 \Rightarrow \partial(p_1 + p_2) = 3$, ou seja, $\partial(p_1 + p_2) =$ máx $\{\partial p_1, \partial p_2\}$

II) $\partial p_1 = 4$ e $\partial p_2 = 4 \Rightarrow$ máx $\{\partial p_1, \partial p_2\} = 4$

$p_1(x) + p_2(x) = 2x^3 - 4x + 2 \Rightarrow \partial(p_1 + p_2) = 3$, ou seja, $\partial(p_1 + p_2) <$ máx $\{\partial p_1, \partial p_2\}$

2) (UESC-2005) Sejam os polinômios $P(x) = (m^2 - 2)x^4 + \frac{m}{2}x^3 - x^2 - 1$ e $Q(x) = x^4 - \frac{x^3}{2} + 10x - n$, sendo m e n números reais tais que o grau de $P(x) + Q(x)$ é igual a 3, e 1 é uma raiz de $P(x) + Q(x)$. Com base nesses dados, pode-se afirmar que $m + n$ é igual a:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Solução:

Somando as expressões de P e Q obtemos: $P(x) + Q(x) = (m^2 - 1)x^4 + \frac{(m-1)}{2}x^3 - x^2 + 10x - (n + 1)$

Se $\partial(P + Q) = 3 \Rightarrow m^2 - 1 = 0$ e $m - 1 \neq 0 \Rightarrow m = -1$.

Logo: $P(x) + Q(x) = -x^3 - x^2 + 10x - (n + 1)$

Se 1 é raiz de $P(x) + Q(x)$ então $P(1) + Q(1) = 0 \Rightarrow -1 - 1 + 10 - n - 1 = 0 \Rightarrow n = 7$

2.5.2. Grau do produto de dois polinômios:

Se p_1 e p_2 são polinômios não nulos, então o grau de $p_1.p_2$ é igual à soma dos graus de p_1 e p_2.

Ou seja, $\partial(p_1.p_2) = \partial p_1 + \partial p_2$.

Demonstração:

Suponhamos que $\partial p_1 = n$ e $\partial p_2 = m$. Neste caso podemos escrever p_1 e p_2 da seguinte maneira:

$p_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $p_2(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$.

Assim: $p_1(x).p_2(x) = a_n.b_m.x^{n+m} + (a_n.b_{m-1} + a_{n-1}.b_m)x^{n+m-1} + ... + (a_1.b_0 + a_0.b_1)x + a_0.b_0$

Desde que $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$ então $\partial(p_1.p_2) = n + m = \partial p_1 + \partial p_2$.

Exemplos:

1) (PUC/PR-2001) Considere as afirmações que seguem:

I - Se P(x) e Q(x) são polinômios de grau n, então P(x) + Q(x) é um polinômio de grau 2n;

II - Se P(x) e Q(x) são polinômios de grau n, então P(x).Q(x) é um polinômio de grau n^2;

III - Se P(x) e Q(x) são polinômios de grau n, então o grau de P(x) – Q(x) é igual ao grau de Q(x) – P(x);

IV - existem polinômios P(x) e Q(x), ambos de grau 3, tais que o grau de P(x) – Q(x) é 3.

Podemos afirmar:

A) I e III são falsas; B) III e IV são verdadeiras; C) I e IV são verdadeiras;

D) I, II e IV são falsas; E) II e III são verdadeiras.

Solução:

I – Se $\partial(P) = n$ e $\partial(Q) = n$, a única informação que possuímos sobre $\partial(P + Q)$ é que $\partial(P + Q) \leq n$. Afirmação falsa.

II – Se $\partial(P) = n$ e $\partial(Q) = n$ então $\partial(P.Q) = \partial(P) + \partial(Q) = n + n = 2n$. Afirmação falsa.

III – Uma vez que $P - Q = -(Q - P)$ os coeficientes de $P - Q$ possuem o mesmo módulo dos coeficientes de $Q - P$. Assim, se algum coeficiente de $P - Q$ for 0, o coeficiente relativo ao mesmo expoente de x em $Q - P$ também é 0, implicando que $\partial(P - Q) = \partial(Q - P)$. Afirmação verdadeira.

IV – Se $P(x) = 2x^3$ e $Q(x) = x^3$ então $P(x) - Q(x) = x^3$. Afirmação verdadeira.

Portanto, a alternativa correta é a B.

2) (Unifor-99) Se os polinômios p, q, r têm graus 2, 3, 4, respectivamente, calcule o grau do polinômio $p.q + r$.

Solução:

Sabe-se que: $\partial(p.q) = \partial p + \partial q = 2 + 3 = 5$. Como $\partial(p.q) > \partial r$ então $\partial(p.q + r) = \partial(p.q) = 5$

3) (Fuvest-91) Considere um polinômio não-nulo p(x) tal que $(p(x))^3 = x^2 p(x) = xp(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Qual é o grau de p(x)?; b) Determine p(x)

Solução:

a) Se $\partial[p(x)^3] = \partial[x^2.p(x)] \Rightarrow 3.\partial[p(x)] = 2 + \partial[p(x)] \Rightarrow \partial[p(x)] = 1$

b) Como $\partial[p(x)] = 1$ então $p(x) = ax + b$

Se $(p(x))^3 = xp(x^2) \Rightarrow a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 = ax^3 + bx \Rightarrow a = 1$ e $b = 0$

Logo, $p(x) = x$

4) (ITA-2008) Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

a) 30 b) 32 c) 34 d) 36 e) 38

Solução:

Como $\partial(p.q) = \partial(p) + \partial(q)$, então o grau de P é igual à soma dos graus dos 5 polinômios.

Portanto: $\partial P = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 62 = \dfrac{2(q^5 - 1)}{q - 1} \Rightarrow q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = 31 \Rightarrow q(q^2 + 1)(q - 1) = 2.3.5$

Uma vez que q deve ser inteiro, então a única possibilidade é $q = 2$. Assim, $a_5 = a_1 q^4 = 2.2^4 = 32$

2.6. IGUALDADES ENTRE POLINÔMIOS

2.6.1. Polinômio Identicamente Nulo

Defini-se polinômio identicamente nulo como sendo a função polinomial p: C→C tal que para todo x complexo temos p(x) = 0. Vamos demonstrar que todos os coeficientes de polinômio identicamente nulo são iguais a zero. Suponhamos que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$ seja um polinômio identicamente nulo. Se $x_1, x_2, ..., x_n$ são números complexos distintos:

$p(x_1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^{n-1} = 0$

$p(x_2) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + ... + a_nx_2^{n-1} = 0$

$p(x3) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + ... + a_nx_3^{n-1} = 0$

...

$p(x_n) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_{n-1}x_n^{n-1} = 0$

As n equações acima formam um sistema linear homogêneo com n equações e n variáveis cuja matriz principal é igual a $A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & ... & x_3^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Podemos observar que esta é uma matriz de Vandermonde, cujo determinante pode ser calculado por:

$$\det A = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)...(x_n - x_{n-1}) = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Como para $i \neq j$ temos $x_i \neq x_j$, então $\det A \neq 0$, fazendo com que o sistema linear homogêneo apenas admita como solução $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_{n-1} = 0$.

Desta forma, demonstramos que se p(x) é um polinômio identicamente nulo então todos os seus coeficientes são iguais a zero.

Da demonstração acima podemos concluir uma importante propriedade sobre o polinômio p(x) identicamente nulo:

Propriedade: Se p(x) possui grau menor ou igual a n ($n \in \mathbb{N}^*$) e conclui-se que p(x) possui n + 1 raízes, então pode-se afirmar que p(x) é o polinômio identicamente nulo.

Obs: Não defini-se grau para o polinômio identicamente nulo.

2.6.2. Polinômios Idênticos

Dois polinômios p(x) e q(x) são considerados iguais se e somente se para todo número complexo x temos p(x) = q(x). Vamos agora demonstrar que <u>se dois polinômios são idênticos então os coeficientes relativos aos mesmos expoentes são iguais</u>. Suponhamos que $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ e $q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0$ são polinômios idênticos. Considere agora o polinômio h(x) = p(x) – q(x). Assim:

$h(x) = (a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0) - (b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0) \Rightarrow$

$h(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$

Por outro lado, como p(x) = q(x), então h(x) = 0, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, h(x) é o polinômio identicamente nulo, fazendo com que todos seus coeficientes sejam iguais a zero.

$$\boxed{a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ ....,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0}$$

Por exemplo, se os polinômios $p(x) = 6x^2 + 2ax + b$ e $q(x) = cx^3 + 3dx^2 - 10x + 5$ são idênticos então podemos afirmar que c = 0, d = 2, a = – 5 e b = 5.

2.6.2.1. Polinômios Equivalentes

Dois polinômios P(x) e Q(x) são considerados equivalentes quando P(x) = k.Q(x), com $k \neq 0$, qualquer que seja x complexo. Por exemplo, os polinômios $P(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3$ e $Q(x) = 5x^3 - 25x^2 + 5x + 15$ são equivalentes uma vez que P(x) = 5.Q(x).

De acordo com a definição, se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ são polinômios equivalentes então existe $k \neq 0$ tal que P(x) = k.Q(x):

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = k(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0) \Rightarrow$

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = k.b_n x^n + k.b_{n-1}x^{n-1} + ... + k.b_1 x + k.b_0 \Rightarrow$

$a_n = k.b_n,\ a_{n-1} = k.b_{n-1},\ ...,\ a_1 = k.b_1,\ a_0 = k.b_0 \Rightarrow \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = ... = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_0}{b_0}$ (supondo a_i e $b_i \neq 0$)

Portanto, se dois polinômios são idênticos, então os coeficientes respectivos aos mesmos expoentes são proporcionais. Perceba que se dois polinômios são idênticos então estes dois polinômios também são equivalente.

Observe que polinômios equivalentes possuem as mesmas raízes, pois:

$Q(\alpha) = 0 \Leftrightarrow k.P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(a) = 0$, pois $k \neq 0$.

Exemplos:

1) Determine *a*, *b* e *c* para que seja identicamente nulo o polinômio $p(x) = (a-1)x^3 + (b+2)x + c$

Solução:

Para que p(x) possua todos os seus coeficientes nulos: $a - 1 = 0$, $b + 2 = 0$ e $c = 0$

(note que o coeficiente de x^2 é zero). Portanto, $a = 1$, $b = -2$ e $c = 0$.

2) (PUCCAMP-2002) Se a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, na qual a, b, c, d são coeficientes racionais, é equivalente à equação $(2x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$, então

a) a = 3/2 b) b = 6 c) c = – 7 d) d = 0 d) d = – 3/2

Solução:

$[(2x-1)(x+1)][(x+3)(x-2)] = (2x^2 + x - 1)(x^2 + x - 6) = 2x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = 0$

Se esta última equação é equivalente à $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ então:

$$\frac{2}{1} = \frac{3}{a} = \frac{-12}{b} = \frac{-7}{c} = \frac{6}{d} \Rightarrow a = \frac{3}{2},\ b = -6,\ c = -\frac{7}{2},\ d = 3.$$

3) (Cefet/PR-2003) O polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 + nx - 8$ é um cubo perfeito. Então os valores de "m" e "n" são, respectivamente, iguais a:

a) – 6 e 12. b) – 6 e – 12. c) 3 e 6. d) 6 e – 12. e) 12 e 3.

Solução:

Se P(x) é um cubo perfeito: $x^3 + mx^2 + nx - 8 = (ax + b)^3 \Rightarrow$

$x^3 + mx^2 + nx - 8 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$

i) $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$;

ii) $-8 = b^3 \Rightarrow b = -2$

iii) $m = 3a^2b = 3.1^2.(-2) \Rightarrow m = -6$

iv) $n = 3ab^2 = 3.1.(-2)^2 \Rightarrow n = 12$

4) (UFPE-2000) Determine p, q reais tais que $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2 + px + q)^2$. Indique $p^2 + q^2$.

Solução:

$[x(x+1)][(x+2)(x+3)] + 1 = (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) + 1 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

$(x^2 + px + q)^2 = (x^2 + px + q)(x^2 + px + q) = x^4 + 2px^3 + (2q + p^2)x^2 + 2pqx + q^2$

Como as duas expressões são idênticas:

i) $2p = 6 \Rightarrow p = 3$;

ii) $2pq = 6 \Rightarrow q = 1$;

Conferindo se os outros coeficientes ficam idênticos:

i) $2q - p^2 = 2 + 9 = 11$ (confere)
ii) $q^2 = 1^2 = 1$ (confere)
Desta forma, $p^2 + q^2 = 9 + 1 = 10$.

5) (UFOP-2001) O polinômio $P(x) = -2x^3 + Ax^2 + Bx + C$ é tal que $P(x) = -P(-x)$, $\forall x \in \Re$ e $P(2) = 0$. Calcule o valor de $A^2 + B^2 + C^2$.
Solução:
$-P(-x) = -[-2(-x)^3 + A(-x)^2 + B(-x) + C] = -2x^3 - Ax^2 + Bx - C$
Para que ocorra $P(x) = -P(-x)$ devemos ter $A = 0$ e $C = 0 \Rightarrow P(x) = -2x^3 + Bx$
$P(2) = 0 \Rightarrow -16 + 2B = 0 \Rightarrow B = 8 \Rightarrow A^2 + B^2 + C^2 = 64$.

6) (AFA-95) Um polinômio $P(x)$ do terceiro grau que, para todo número real, satisfaz a expressão $P(x) = P(x-1) + x^2$ é:
a) $x^3/3 + x^2/2 - x/6$ b) $x^3/3 - x^2/2 + x/6$ c) $x^3/3 + x^2/2 + x/6$ d) $x^3/3 - x^2/2 - x/6$
Solução:
Se $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ então $P(x) = P(x-1) + x^2 \Rightarrow$
$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d + x^2 \Rightarrow$
$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a - bx^2 - 2bx + b + cx - c + d + x^2 \Rightarrow$
$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - (3a - b + 1)x^2 + (3a - 2b + c)x + (-a + b - c + d)$
i) $b = -3a + b + 1 \Rightarrow a = 1/3$
ii) $c = 3a - 2b + c \Rightarrow b = 1/2$
iii) $d = -a + b - c + d \Rightarrow c = 1/6$
Portanto: $P(x) = x^3/3 + x^2/2 + x/6 + d \Rightarrow$ Alternativa C.

7) (IME-74) Determine os parâmetros reais m, n, p de modo que as equações $(m+1)x^3 + (n-1)x^2 - (m+n-p)x + 1 = 0$ e $(m-1)x^3 + (n+2)x^2 - (m-n+p)x + 3 = 0$ tenham as mesmas raízes.
Solução:
Para que os dois polinômios tenham as mesmas raízes estes devem ser equivalentes. Portanto:
$$\frac{m+1}{m-1} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{-(m+n-p)}{-(m-n+p)} = \frac{1}{3}$$
i) $3(m-1) = m-1 \Rightarrow 3m - 3 = m - 1 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = -2$
ii) $3(n-1) = n+1 \Rightarrow 3n - 3 = n + 1 \Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$
iii) $3(m+n-p) = m - n + p \Rightarrow -3p = -4 + p \Rightarrow p = 1$

8) (ITA-94) A identidade: $\dfrac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ é válida para todo real $x \neq -1$.
Então $a + b + c$ é igual a:
a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1
Solução:
$$1 + \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1) + a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$
$$= \frac{x^3 + 1 + ax^2 - ax + a + bx^2 + (b+c)x + c}{x^3+1} = \frac{x^3 + (a+b)x^2 + (-a+b+c)x + a + c + 1}{x^3+1}$$
Logo, pela identidade de polinômios: $\begin{cases} a+b=0 \\ -a+b+c=0 \\ a+c+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a+c=0 \\ a+c=3 \end{cases} \Rightarrow a = 1$ e $c = 2 \Rightarrow b = -1$
Desta forma: $a + b + c = 1 - 1 + 2 = 2$.

9) (Olimpíada da Rússia-63) Determine todos os números reais p, q, a, b, que para todo x a equação é verdadeira: $(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{10}$.

Solução:

Comparando os coeficientes de x^{20} temos que: $2^{20} - a^{20} = 1 \Rightarrow a = (2^{20}-1)^{1/20}$.

Aplicando $x = 1/2$, temos que: $-(ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{10}$ e como o termo da direita é negativo e o da direita é positivo, temos que os dois devem ser iguais a 0.

$(a/2+b)^{20} = 0 \Rightarrow b = -a/2 \Rightarrow b = -[(2^{20}-1)^{1/20}]/2$

$(x^2+px+q)^{10} \Rightarrow 1/4 + p/2 + q = 0 \Rightarrow 2p + 4q = -1$

Aplicando $x = 0$ temos que: $q^{10} = 1 - b^{20}$

$b^{20} = (2^{20}-1)/2^{20} \Rightarrow b^{20} = 1 - 1/2^{20} \Rightarrow 1 - b^{20} = 1/2^{20} \Rightarrow q^{10} = 1/2^{20} \Rightarrow q = 1/4$ ou $q = -1/4$

Se $q = 1/4 \Rightarrow p = -1$ e se $q = -1/4 \Rightarrow p = 0$

Calculando o coeficiente de x^{19} da expressão do lado esquerdo da igualdade temos:

$-20.2^{19} - 20.a^{19}.b = 20[-2^{19} + a^{20}/2] = 20[-2^{19} + 2^{19} - 1/2] = -10$

Do lado direito temos:

Se $q = -1/4$ e $p = 0 \Rightarrow 10(-1/4) = -5/2$

Se $q = 1/4$ e $p = -1 \Rightarrow 10(-1) = -10$

Assim, temos que $p = -1$ e $q = 1/4$.

Ou seja, temos que os valores são $a = (2^{20}-1)^{1/20}$, $b = b = -[(2^{20}-1)^{1/20}]/2$, $p = -1$, $q = 1/4$.

2.7. DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Dados dois polinômios p(x) e h(x) ≠ 0, definimos a divisão de p(x) por h(x) da seguinte maneira: dividir p(x) por h(x) é equivalente a determinar dois outros polinômios q(x) e r(x) de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

I) p(x) = q(x).h(x) + r(x);

II) $\partial[r(x)] < \partial[h(x)]$.

Assim, na expressão p(x) = q(x).h(x) + r(x), p(x) recebe o nome de dividendo, h(x) é o divisor, q(x) o quociente da divisão e r(x) o resto da divisão. Por exemplo, como $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 - 5x + 6)(x + 4) + (15x - 25)$, e $1 = \partial(15x - 25) < \partial(x^2 - 5x + 6) = 2$, podemos afirmar que na divisão de $x^3 - x^2 + x - 1$ por $x^2 - 5x + 6$ obtemos quociente x + 4 e resto 15x – 25.

Entretanto não é toda expressão da forma p(x) = q(x).h(x) + r(x) que representa uma divisão polinomial. Na expressão $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 - 5x + 6)(x + 4) + (15x - 25)$ não podemos afirmar que se trata da divisão de $x^3 - x^2 + x - 1$ por x – 4 pois o grau do resto encontrado (15x – 25) não é menor que o grau do divisor.

Quando ocorrer r(x) = 0 afirmamos que **p(x) é divisível por h(x)** ou que h(x) divide p(x). Por exemplo, $p(x) = x^2 + 3x + 2$ é divisível por x + 1 pois existe q(x) = x + 2 de modo que p(x) = q(x).h(x).

2.7.1. Casos Especiais de Divisão de Polinômios

1) p(x) = 0: Neste caso teremos q(x) = 0 e r(x) = 0 e a expressão da divisão será da forma 0 = 0.h(x) + 0.

2) $\partial p < \partial h$: Neste caso teremos h(x) = 0 e r(x) = p(x). Por exemplo, na divisão de $x^2 + 5x - 1$ por $x^3 + 8$, teremos a seguinte expressão: $x^2 + 5x + 1 = 0(x^3 + 8) + x^2 + 5x + 1$.

Exemplos:

1) (FGV-2005) Dividindo o polinômio P(x) por $x^2 + x - 1$ obtém-se quociente igual a x – 5 e resto igual a 13x + 5. O valor de P(1) é:

a) 12 b) 13 c) 15 d) 16 e) 14

Solução:

Pela definição da divisão de polinômios: $P(x) = Q(x).H(x) + R(x) = (x - 5)(x^2 + x - 1) + 13x + 5 \Rightarrow$

$P(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 5 + 13x + 5 \Rightarrow P(x) = x^3 - 4x^2 + 7x + 10$

Logo, $P(1) = 1^3 - 4.1^2 + 7.1 + 10 \Rightarrow P(1) = 14$

2) (UFMG-2005) Sejam $p(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = mx^2 + nx - 3$ polinômios com coeficientes reais. Sabe-se que p(x) = (2x – 6)q(x) + x – 10. Considerando-se essas informações, é INCORRETO afirmar que

a) se 10 é raiz de q(x), então 10 também é raiz de p(x).

b) p(3) = – 7.

c) d = 18.

d) m = 2.

Solução:

$p(x) = (2x - 6)q(x) + x - 10 \Rightarrow 4x^3 + bx^2 + cx + d = (mx^2 + nx - 3)(2x - 6) + x - 10 \Rightarrow$

$4x^3 + bx^2 + cx + d = 2mx^3 + (2n - 6m)x^2 + (-6n - 6)x + 18 + x - 10 \Rightarrow$

$4x^3 + bx^2 + cx + d = 2mx^3 + (2n - 6m)x^2 + (-6n - 5)x + 8$

i) 4 = 2m ⇒ m = 2

ii) d = 8

Vamos agora analisar as alternativas:

a) Se 10 é raiz de q(x) então q(10) = 0 e desde que p(x) = (2x – 6)q(x) + x – 10 então:

p(10) = (2.10 – 6)q(10) + 10 – 10 = 14.0 + 0 = 0 ⇒ 10 é raiz de p(10) ⇒ alternativa correta

b) p(x) = (2x – 6)q(x) + x – 10 ⇒ p(3) = (2.3 – 6).q(3) + 3 – 10 = – 7 ⇒ alternativa correta

c) d = 8 $\Rightarrow$ alternativa incorreta
d) m = 2 $\Rightarrow$ alternativa correta

3) (FEI-2004) Dividindo-se $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x + 3$ por S(x), obtém-se um quociente $Q(x) = 2x - 1$ e um resto $R(x) = 3x - 5$. Então S(x) é igual a:
a) $x^2 + x + 1$ b) $x^2 - x + 1$ c) $2x^2 + 3x - 5$ d) $x^2 + x - 2$ e) $x^2 - x + 2$
Solução:
Pela definição da divisão de polinômios: $P(x) = S(x).Q(x) + R(x)$ $\Rightarrow$
$2x^3 - 3x^2 + 8x + 3 = S(x)(2x - 1) + 3x + 5$ $\Rightarrow$ $S(x)(2x - 1) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ $\Rightarrow$
$S(x)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x + 4x - 2 = (2x - 1).x^2 - (2x - 1).x + (2x - 1).2$ $\Rightarrow$
$S(x)(2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - x + 2)$ $\Rightarrow$ $S(x) = x^2 - x + 2$

4) (ITA-91) Na divisão de $P(x) = a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3$ por $x - 1$, obteve-se o quociente $Q(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ e o resto -6. Sabe-se que (b_4, b_3, b_2, b_1) é uma progressão geométrica de razão $q > 0$ e $q \neq 1$. Podemos afirmar:
a) $b_3 + a_3 = 10$ b) $b_4 + a_4 = 6$ c) $b_3 + b_0 = 12$ d) $b_4 + b_1 = 16$ e) n.d.a.
Solução:
Pela definição de divisão de polinômios: $P(x) = H(x).Q(x) + R(x)$ $\Rightarrow$
$a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3 = (x - 1)(b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) - 6$ $\Rightarrow$
$a_5x^5 + 2x^4 + a_4x^3 + 8x^2 - 32x + a_3 = b_4x^5 + (b_3 - b_4)x^4 + (b_2 - b_3)x^3 + (b_1 - b_2)x^2 + (b_0 - b_1)x - b_0 - 6$
Pela igualdade de polinômios temos que:

$$\begin{cases} b_3 - b_4 = 2 \\ b_1 - b_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1q^2 - b_1q^3 = 2 \\ b_1 - b_1q = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2(b_1 - b_1q) = 2 \\ b_1 - b_1q = 8 \end{cases} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \overset{q>0}{\Rightarrow} q = \frac{1}{2}$$

Portanto: $b_1 - b_1q = 8$ $\Rightarrow$ $b_1 = 16$ $\Rightarrow$ $b_2 = 8$, $b_3 = 4$ e $b_4 = 2$
Ainda pela igualdade de polinômios: $-32 = b_0 - 8$ $\Rightarrow$ $b_0 = -24$
Desta forma: $a_5 = 2$, $a_4 = b_2 - b_3 = 4$, $a_3 = -b_0 - 6 = -30$
Analisando as alternativas: $b_3 + a_3 = -24$, $b_4 + a_4 = 6$, $b_3 + b_0 = -20$, $b_4 + b_1 = 18$.
Desta maneira, a alternativa correta é a B.

5) (ITA-97) Sejam $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ polinômios na variável real x de graus n_1, n_2 e n_3, respectivamente, com $n_1 > n_2 > n_3$. Sabe-se que $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $p_3(x)$. Seja r(x) o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$. Considere as afirmações:
I - r(x) é divisível por $p_3(x)$.
II - $p_1(x) - \frac{1}{2}p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$.
III - $p_1(x)\,r(x)$ é divisível por $\{p_3(x)\}^2$.
Então,
a) Apenas I e II são verdadeiras
b) Apenas II é verdadeira.
c) Apenas I e III são verdadeiras.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são falsas.
Solução:
Desde que p_1 e p_2 são divisíveis por p_3: $p_1(x) = q_1(x)p_3(x)$ e $p_2(x) = q_2(x)p_3(x)$
I – Se r(x) é o resto da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$:
$p_1(x) = q_3(x)p_2(x) + r(x)$ $\Rightarrow$ $r(x) = p_1(x) - q_3(x)p_2(x) = q_1(x)p_3(x) - q_3(x)q_2(x)p_3(x)$ $\Rightarrow$
$r(x) = [q_1(x) - q_3(x)q_2(x)]p_3(x)$ $\Rightarrow$ r(x) é divisível por $p_3(x)$ $\Rightarrow$ afirmação verdadeira
II – $p_1(x) - (1/2)p_2(x) = q_1(x)p_3(x) - (1/2)q_2(x)p_3(x)$ $\Rightarrow$ $p_1(x) - (1/2)p_2(x) = [q_1(x) - (1/2)q_2(x)]p_3(x)$ $\Rightarrow$
$p_1(x) - (1/2)p_2(x)$ é divisível por $p_3(x)$ $\Rightarrow$ afirmação verdadeira
III – Como $p_1(x) = q_1(x)p_3(x)$ e $r(x) = [q_1(x) - q_3(x)q_2(x)]p_3(x)$ $\Rightarrow$
$p_1(x)r(x) = [q_1(x) - q_3(x)q_2(x)]p_3(x)^2$ $\Rightarrow$ $p_1(x)r(x)$ é divisível por $[p_3(x)]^2$ $\Rightarrow$ afirmação verdadeira

2.7.2. Existência e Unicidade

2.7.2.1. Existência da divisão de dois polinômios.

Vamos agora demonstrar que, dados dois polinômios p(x) e h(x) (com $\partial p \geq \partial h$), existem os polinômios q(x) e r(x) de modo que p(x) = q(x).h(x) + r(x). Esta demonstração será baseada no método de divisão de polinômios denominado Método de Descartes, que será explanado com mais detalhes no próximo tópico. Inicialmente devemos determinar os graus de h(x) e r(x). Para tanto devemos observar que $\partial p = \partial q + \partial h$, ou seja, $\partial h = \partial p - \partial q$. Logo, se desejamos dividir $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ por $h(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, com n > m, devemos ter que $\partial h = n - m$. Assim podemos escrever que $q(x) = c_{n-m}x^{n-m} + \ldots + c_1 x + c_0$. Vamos agora tentar calcular os valores dos coeficientes c_i de q(x) de modo que ocorra igualdade, para os mesmos expoentes de x, entre os coeficientes de p(x) e de q(x).h(x).

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$q(x).h(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + \ldots + c_1 x + c_0)(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0)$$

Pela igualdade do coeficiente de x^n temos que: $a_n = c_{n-m}.b_m \Rightarrow c_{n-m} = \dfrac{a_n}{b_m}$.

Pela igualdade do coeficiente de x^{n-1}: $a_{n-1} = c_{n-m}.b_{m-1} + c_{n-m-1}.b_m \Rightarrow$

$$c_{n-m-1} = \frac{a_{n-1} - c_{n-m}.b_{m-1}}{b_m} = \frac{a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-1}}{b_m} = \frac{a_{n-1}.b_m - a_n.b_{m-1}}{b_m^2}$$

Pela igualdade do coeficiente de x^{n-2}: $a_{n-2} = c_{n-m}.b_{m-2} + c_{n-m-1}.b_{m-1} + c_{n-m-2}.b_m \Rightarrow$

$$c_{n-m-2} = \frac{a_{n-2} - c_{n-m}.b_{m-2} - c_{n-m-1}.b_{m-1}}{b_m} = \frac{a_{n-2} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-2} - \frac{a_{n-1}.b_m - a_n.b_{m-1}}{b_m^2} b_{m-1}}{b_m} \Rightarrow$$

$$c_{n-m-2} = \frac{a_{n-2}.b_m^2 - a_n.b_m.b_{m-2} - a_{n-1}.b_m.b_{m-1} + a_n.b_{m-1}^2}{b_m^3}$$

Note que a igualdade dos coeficientes de p(x) e q(x).h(x) fornece equações da seguinte forma:

$$a_{n-r} = c_{n-m}.b_{m-r} + c_{n-m-1}.b_{m-r+1} + c_{n-m-2}.b_{m-r-2} + \ldots + c_{n-m-r}.b_m,$$

onde já sabemos de antemão os coeficientes $c_{n-m}, c_{n-m-1}, \ldots, c_{n-m-r+1}$, ou seja, a equação acima fornece o valor de c_{n-m-r}. Entretanto, estas expressões são obtidas fazendo r = 0 até r = n – m, implicando que a última das equações seja $a_m = c_{n-m}.b_{2m-n} + c_{n-m-1}.b_{2m-n-1} + \ldots + c_0.b_m$, onde calculamos o valor de c_0 e determinamos o polinômio q(x), provando a sua existência.

Desta forma, podemos concluir que não é necessário percorrer todos os coeficientes de p(x) para determinar os coeficientes de q(x), uma vez que os valores de $c_{n-m}, c_{n-m-1}, \ldots, c_0$ são escolhidos de modo que ocorra igualdade nos coeficientes a_i de p(x) com q(x).h(x) desde a_n até a_m. Assim, não podemos garantir que ocorra igualdade nos coeficientes $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_0$ de p(x) com os coeficientes obtidos para os mesmo expoentes de x de q(x).h(x). O nome que se dá à subtração p(x) – q(x).h(x) é resto da divisão, e é denominado por r(x). Como os coeficientes de x^n até x^m tanto de p(x) quanto de q(x).h(x) são necessariamente iguais, então o primeiro coeficiente de r(x) que possivelmente é diferente de zero é o de x^{m-1}, implicando que $\partial r < m$. Assim, também provamos a existência de r(x).

2.7.2.2. Unicidade do quociente e resto da divisão de dois polinômios

Suponhamos que, na divisão de p por h, existam quatro polinômios q_1, q_2, r_1 e r_2 que satisfaçam $p = q_1.h + r_1$ e $p = q_2.h + r_2$, com $\partial r_1 < \partial h$ e $\partial r_2 < \partial h$. Assim, temos que:

$$q_1.h + r_1 = q_2.h + r_2 \Rightarrow q_1.h - q_2.h = r_2 - r_1 \Rightarrow (q_1 - q_2).h = r_2 - r_1 \quad (1)$$

Observe que, se $q_1 - q_2 \neq 0$, então $\partial[(q_1 - q_2).h] = \partial(q_1 - q_2) + \partial(h) \geq \partial(h)$

Por outro lado, $\partial(r_2 - r_1) \leq$ máx $\{\partial r_1, \partial r_2\} < \partial h$.

Desta forma, a única maneira de igualdade em (1) é $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$, que prova a unicidade do quociente e do resto na divisão de dois polinômios.

2.7.3. Método de Descartes (Método dos Coeficientes a Determinar)

O método de Descartes, que foi utilizado para a demonstração da existência da divisão de dois polinômios, será agora explanado com mais detalhes. Baseia-se em três fatos, descritos abaixo:

I) Baseando-se no fato de que $\partial q = \partial p - \partial h$ e $\partial r < \partial h$ determina-se ∂q e ∂r;

II) Constroem-se os polinômios q e r, deixando incógnitos os seus coeficientes ;

III) Determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $p = q.h + r$.

Na verdade nada garante que o grau de r(x) seja igual a $\partial(h) - 1$. A única certeza que temos é que ∂r é um número natural menor que ∂h. Porém, podemos escrever r supondo possuir grau igual a $\partial(h) - 1$ e caso ∂r seja menor que $\partial(h) - 1$ encontraremos os coeficientes das parcelas com maiores expoentes de x iguais a zero.

Exemplos:

1) Determinar o quociente e o resto da divisão de $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1$ por $h(x) = x^2 + 3x - 2$.

Solução:

Pela definição $p(x) = q(x).h(x) + r(x)$, então $\partial q = \partial p - \partial h = 4 - 2 = 2 \Rightarrow q(x) = ax^2 + bx + c$

$\partial r < \partial h \Rightarrow \partial r \leq 2 \Rightarrow$ o valor máximo para o grau de h(x) é 1 $\Rightarrow h(x) = dx + e$

Então: $x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 = (ax^2 + bx + c)(x^2 + 3x - 2) + (dx + e) \Rightarrow$

$x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 = ax^4 + (b + 3a)x^3 + (c + 3b - 2a)x^2 + (3c - 2b + d)x + (-2c + e)$

De onde tiramos o sistema:

$a = 1$

$b + 3a = 1 \Rightarrow b = -2$

$c + 3b - 2a = -7 \Rightarrow c = 1$

$3c - 2b + d = 9 \Rightarrow d = 2$

$-2c + e = -1 \Rightarrow e = 1$

Portanto: $q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $r(x) = 2x + 1$

2) (UFPE-2003) Sabendo-se que o resto da divisão de $P(x) = 4x^3 + A$ por $H(x) = x^2 - x + 1$ é nulo, indique o valor de de A.

Solução:

Seja Q(x) o quociente da divisão. Como o resto é nulo:

$P(x) = Q(x).H(x) \Rightarrow \partial P = \partial Q + \partial H \Rightarrow 3 = \partial Q + 2 \Rightarrow \partial Q = 1 \Rightarrow Q(x) = ax + b$, com $a \neq 0$

Então: $4x^3 + A = (ax + b)(x^2 - x + 1) = ax^3 + (b - a)x^2 + (a - b)x + b$

Pela igualdade de polinômios :

i) $a = 4$;

ii) $b - a = 0 \Rightarrow b = 4$;

iii) $A = b \Rightarrow A = 4$

3) (UEL-2004) Quais devem ser os valores dos coeficientes m e n, de modo que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 + mx - n$ por $D(x) = x^2 + x - 2$ seja igual a $R(x) = 16x - 14$?
a) m = -16 e n = 16 b) m = -2 e n = 8 c) m = 8 e n = -2
d) m = 16 e n = -14 e) m = 20 e n = -26
Solução:
Seja Q(x) o quociente da divisão. Portanto: $\partial Q = \partial P - \partial D = 3 - 2 = 1 \Rightarrow Q(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.
$P(x) = D(x).Q(x) + R(x) \Rightarrow x^3 - 5x^2 + mx + n = (x^2 - x - 2)(ax + b) + 16x - 14 \Rightarrow$
$x^3 - 5x^2 + mx + n = ax^3 + (a + b)x^2 + (b - 2a + 16)x - 2b - 14$
Portanto:
i) $a = 1$
ii) $-5 = a + b \Rightarrow b = -6$
iii) $m = b - 2a + 16 \Rightarrow m = 8$
iv) $n = -2b - 14 \Rightarrow n = -2$

4) (UFMA-2003) Sem efetuar a divisão, encontre o valor de p e q reais, de modo que o polinômio $x^4 + 1$ seja divisível por $x^2 + px + q$.
Solução:
Seja H(x) o quociente da divisão: $\partial H = \partial(x^4 + 1) - \partial(x^2 + px + q) = 4 - 2 = 2 \Rightarrow H(x) = ax^2 + bx + c$
$x^4 + 1 = (x^2 + px + q)(ax^2 + bx + c) \Rightarrow x^4 + 1 = ax^4 + (ap + b)x^3 + (aq + bp + c)x^2 + (bq + cp)x + cq$
i) $a = 1$
ii) $ap + b = 0 \Rightarrow b = -p$
iii) $aq + bp + c = 0 \Rightarrow q - p^2 + c = 0 \Rightarrow c = p^2 - q$
iv) $bq + cp = 0 \Rightarrow -pq + p^3 - pq = 0 \Rightarrow p(p^2 - 2q) = 0$
v) $cq = 1 \Rightarrow p^2q - q^2 = 1$
Se $p = 0$, temos $q^2 = -1$, que é uma contradição, uma vez que q é real.
Assim, $p \neq 0$ e então $p^2 = 2q \Rightarrow 2q^2 - q^2 = 1 \Rightarrow q^2 = 1 \Rightarrow q = \pm 1$
Como $p^2 = 2q$ então $q > 0$, fazendo com que a única possibilidade seja $q = 1$.
Logo, $p^2 = 2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{2}$.
Conferindo: $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

5) (UFPI-2003) A divisão de $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 14x + 6$ por $H(x) = x^2 + x - p$, com p real, é exata. Desta forma o valor de p é:
A) 4 B) -1 C) 3 D) -3 E) 2
Solução:
Se Q(x) é o quociente da divisão então: $\partial Q = \partial P - \partial H = 3 - 2 = 1 \Rightarrow Q(x) = ax + b$
$P(x) = H(x).Q(x) \Rightarrow 4x^3 + 2x^2 - 14x + 6 = (x^2 + x - p)(ax + b) \Rightarrow$
$4x^3 + 2x^2 - 14x + 6 = ax^3 + (a + b)x^2 + (b - ap)x - bp$
i) $a = 4$
ii) $a + b = 2 \Rightarrow b = -2$
iii) $-bp = 6 \Rightarrow p = 3$
Conferindo a equação não utilizada: $b - ap = -2 - 4.3 = -14$

6) (Fuvest-2000) O polinômio $p(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ é divisível por $h(x) = x^2 + a$, para um certo número real a. Pode-se, pois, afirmar que o polinômio p.
a) não tem raízes reais.
b) tem uma única raiz real.
c) tem exatamente duas raízes reais distintas.
d) tem exatamente três raízes reais distintas.
e) tem quatro raízes reais distintas.
Solução:
Se q(x) é o quociente da divisão: $\partial q = \partial q - \partial h = 4 - 2 = 2 \Rightarrow q(x) = rx^2 + sx + t$.
$p(x) = h(x).q(x) \Rightarrow x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = (x^2 + a)(rx^2 + sx + t) \Rightarrow$
$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = rx^4 + sx^3 + (ar + t)x^2 + asx + at$

i) $r = 1$; ii) $s = 1$; iii) $as = -2 \Rightarrow a = -2$; iv) $at = -2 \Rightarrow t = 1$
Conferindo o coeficiente não utilizado: $ar + t = (-2)(1) + 1 = -1$
Desta forma: $p(x) = (x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$
Como as raízes de $x^2 - 2$ são reais e distintas e as raízes de $x^2 + x + 1$ são complexas e distintas, podemos afirmar que $p(x)$ tem exatamente duas raízes reais e distintas ($\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$).

7) (CIABA-95) Se o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$ é divisível pelo polinômio $H(x) = px + q$, então:
a) $bpq = p^2c + q^2a$ b) $bpq = a^2c$ c) $a + b + c = p + q$
d) $a(p + q)^2 + b(p + q) + c = 0$ e) $abc = pq$
Solução:
Se $Q(x)$ é o quociente da divisão: $\partial Q = \partial P - \partial H = 2 - 1 = 1 \Rightarrow Q(x) = rx + s$
$P(x) = H(x).Q(x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) \Rightarrow ax^2 + bx + c = prx^2 + (rq + sp)x + sq$

i) $a = pr \Rightarrow r = \dfrac{a}{p}$

ii) $b = rq + sp \Rightarrow s = \dfrac{b - rq}{p} \Rightarrow s = \dfrac{b - \frac{aq}{p}}{p} \Rightarrow s = \dfrac{bp - aq}{p^2}$

iii) $c = sq \Rightarrow c = \dfrac{bp - aq}{p^2}.q \Rightarrow cp^2 - bpq - aq^2 \Rightarrow bpq = p^2c + q^2a$

8) (ITA-04) Para algum número real r, o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números abaixo está mais próximo de r?
a) 1,62 b) 1,52 c) 1,42 d) 1,32 e) 1,22
Solução:
Se $Q(x)$ é o quociente da divisão: $\partial Q = \partial(8x^3 - 4x^2 - 42x + 45) - \partial[(x - r)^2] = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$
$Q(x) = ax + b \Rightarrow 8x^3 - 4x^2 - 42x + 45 = (x^2 - 2rx + r^2)(ax + b) \Rightarrow$
$8x^3 - 4x^2 - 42x + 45 = ax^3 + (b - 2ar)x^2 + (ar^2 - 2br)x + br^2$
i) $a = 8$
ii) $b - 2ar = -4 \Rightarrow b = 16r - 4$
iii) $ar^2 - 2br = -42 \Rightarrow 8r^2 - 2(16r - 4)r = -42 \Rightarrow 8r^2 - 32r^2 + 8r = -42 \Rightarrow$
$12r^2 - 4r - 21 = 0 \Rightarrow r = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 4.21.12}}{24} = \dfrac{4 \pm 32}{24} \Rightarrow r = \dfrac{3}{2}$ ou $r = -\dfrac{7}{6}$.
Substituindo no polinômio, verificamos que $\dfrac{3}{2}$ é raiz, entretanto $-\dfrac{7}{6}$ não é raiz. Assim, dentre as alternativas, a mais próxima de r é 1,52.

9) (Olimpíada da Polônia-94) Ache todos os polinômios $P(x)$ de grau 5, com coeficientes reais, tais que $(x + 1)^3 \mid P(x) + 1$ e $(x + 1)^3 \mid P(x) - 1$.
Solução:
$P(x) + 1 = (x - 1)^3Q(x)$ e $P(x) - 1 = (x + 1)^3R(x)$, onde $Q(x) = ax^2 + bx + c$ e $R(x) = ax^2 + px + q$
$P(x) + 1 = ax^5 + (b - 3a)x^4 + (c - 3b + 3a)x^3 + (-3c + 3b - a)x^2 + (3c - b)x - c$
$P(x) - 1 = ax^5 + (p + 3a)x^4 + (q + 3p + 3a)x^3 + (3q + 3p + a)x^2 + (3c + p)x + q$
Desta forma:
$b - 3a = p + 3a$
$c - 3b + 3a = q + 3p + 3a$
$-3c + 3b - a = 3q + 3p + a$
$3c - b = 3q + p$
$-c = q + 2$
Resolvendo este sistema: $a = -3/8$, $b = -9/8$, $c = -1$, $p = 9/8$ e $q = -1$
Assim: $P(x) = -3x^5/8 - 10x^3/8 - 15x/8$

2.7.4. Método da Chave:

Suponha que na divisão de p por h temos um resto r e quociente q. O Método da Chave consiste em encontrar expressões algébricas semelhantes à $r = p - h.q$ da forma $r_n = r_{n-1} - h.q_n$, onde cada r_n ($r_0 = p$) é denominado de resto parcial e q_n é um monômio escolhido de modo que o grau de r_n seja menor que o grau de r_{n-1}. Estas operações são realizadas até que se obtenha uma expressão em que $\partial r_n < \partial h$. Neste momento temos as seguintes expressões algébricas:

$r_1 = p - h.q_1$
$r_2 = r_1 - h.q_2$
$r_3 = r_2 - h.q_3$
...
$r_n = r_{n-1} - h.q_n$

Ao somarmos todas as expressões obtemos $p = h(q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n) + r_n$. Nesta equação, que representa a divisão de p por h, o quociente é igual a $q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n$ e o resto é r_n.

Por exemplo, vamos aplicar este método para dividir $p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 9x + 1$ por $h(x) = x^2 + 3x - 2$. Inicialmente observamos que o monômio $q_1(x)$ que deve ser multiplicado a h(x) de modo que $r_0(x) - q_1(x).h(x)$ possua grau menor que p(x) é $q_1(x) = x^2$, uma vez que $r_1(x) = r_0(x) - q_1(x).h(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1 - (x^2)(x^2 + 3x - 2) \Rightarrow r_1(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1 - x^4 - 3x^3 + 2x^2 \Rightarrow$
$r_1(x) = -2x^3 - 5x^2 + 9x + 1$

Notemos agora que o monômio $q_2(x)$ que faz com que o grau de $r_2 = r_1 - h.q_2$ seja menor que o grau de r_1 é $q_2(x) = -2x$, pois $r_2(x) = -2x^3 - 5x^2 + 9x + 1 - (-2x)(x^2 + 3x - 2) \Rightarrow$
$r_2(x) = -2x^3 - 5x^2 + 9x + 1 + 2x^3 + 6x^2 - 4x \Rightarrow r_2(x) = x^2 - 5x + 1$

Uma rápida análise nos leva a concluir que $q_3(x) = 1$, desde que:
$r_3(x) = x^2 + 5x + 1 - (1)(x^2 + 3x - 2) = x^2 + 5x + 1 - x^2 - 3x + 2 \Rightarrow r_3(x) = 2x + 3$

Como $\partial r_3 < \partial h$ paramos por aqui as operações. Note que:
$r_1(x) = p(x) - q_1(x).h(x)$
$r_2(x) = r_1(x) - q_2(x).h(x)$
$r_3(x) = r_2(x) - q_3(x).h(x)$

Somando estas equações obtemos: $r_3(x) = p(x) - [q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)].h(x) \Rightarrow$
$p(x) = [q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)]h(x) + r_3(x) \Rightarrow x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x - 2) + 2x + 3$, que é a expressão da divisão de p(x) por h(x), ou seja, $q(x) = x^2 - 2x + 1$ e $r(x) = 2x + 2$.

Entretanto pode-se montar um esquema semelhante à divisão de números inteiros para tornar este método mais sucinto. O dividendo p, o divisor h, o quociente q e o resto r ocupam os mesmos espaços dos números que levam estas denominações na divisão de inteiros. A cada operação escolhe-se um monômio no espaço destinado ao quociente de modo que a multiplicação deste monômio com h forneça um polinômio que subtraído de r_n o grau deste diminua. O exemplo anterior de divisão será agora representado usando a chave que caracteriza a divisão de inteiros.

$x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x + 1$	$x^2 + 3x - 2$
$-x^4 - 3x^3 - 2x^2$	$x^2 - 2x + 1$ → quociente: $q(x)$
$-2x^3 - 5x^2 + 9x + 1$	
$+2x^3 + 6x^2 - 4x$	
$x^2 + 5x + 1$	
$-x^2 - 3x + 2$	
$2x + 3$ → resto: $r(x)$	

Verifica-se que: $x^4 + x^3 - 7x^2 + 9x - 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x - 2) + (2x + 1)$

Perceba que são seguidos os mesmos passos e obtidas as mesmas equações do método de escrever seguidamente $r_n = r_{n-1} - h.q_n$, porém claramente este esquema em chave torna o algoritmo da divisão mais elegante e sucinto.

Exemplos:

1) (Unifor-2001) Se o polinômio $f = x^3 - 2x^2 + ax + b$ é divisível pelo polinômio $g = 2x^2 - x + 1$, então os números reais a e b são tais que

a) $a + b = 2$ b) $a - b = -1/2$ c) $ab = 15/16$ d) $a/b = -5/3$ e) $a = -2b$

Solução:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + ax + b & 2x^2 - x + 1 \\ \underline{-x^3 + (1/2)x^2 - (1/2)x} & x/2 - 3/4 \\ -(3/2)x^2 + (a - 1/2)x + b & \\ \underline{(3/2)x^2 - (3/4)x + 3/4} & \\ (a - 5/4)x - b - 3/4 & \end{array}$$

Uma vez que f é divisível por g então o resto deve ser igual a zero:

i) $a - 5/4 = 0 \Rightarrow a = 5/4$

ii) $b + 3/4 = 0 \Rightarrow b = -3/4$

Assim, temos que $a/b = -5/3 \Rightarrow$ alternativa D

2) (ITA-2003) Sejam *a, b, c* e *d* constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a -5, determine o valor de $a + b + c + d$.

Solução

Dividindo $P_1(x)$ por $P_2(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0.x^3 + a.x^2 + 0.x + b & x^2 + 2x - 4 \\ \underline{-x^4 - 2x^3 - 4x^2} & x^2 - 2x + a \\ -2x^3 + (a - 4)x^2 + b & \\ \underline{2x^3 + 4x^2 - 8x} & \\ ax^2 + 8x + b & \\ \underline{-ax^2 - 2ax - 4a} & \\ (8 - 2a)x + b - 4a & \end{array}$$

Logo: $(8 - 2a)x + b - 4a \equiv 0 \Leftrightarrow a = 4 \quad b = 16$

Dividindo $P_3(x)$ por $P_4(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + cx^2 + dx - 3 & x^2 + cx + 2 \\ \underline{-x^3 - x^2 - 2x} & x + (c + 1) \\ (c + 1)x^2 + (d - 2)x - 3 & \\ \underline{-(c + 1)x^2 + (c + 1)x - 2(c - 1)} & \\ (d + c - 1)x - 5 - 2c & \end{array}$$

Desta forma: $(d + c - 1)x - 5 - 2c \equiv -5 \Leftrightarrow \begin{cases} d + c = 1 \\ 5 + 2c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow c = 0$ e $d = 1$.

Portanto: $a + b + c + d = 21$

2.8. TEOREMA DO RESTO:

Definição: O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de p em a.

Demonstração:
De acordo com a definição de divisão, a divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$ pode ser escrita da seguinte forma: $p(x) = q(x).(x - a) + r(x)$
Como o grau de $x - a$ é um, $r(x)$ é nulo ou possui grau zero, portanto $r(x)$ é um polinômio constante.
Aplicando em x o valor a temos: $p(a) = q(a).(a - a) + r(a) \Rightarrow r = p(a)$

Exemplos:

1) Determinar o valor de m para que o polinômio $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 2$ seja divisível por $x - 2$.
Solução:
Se $p(x)$ é divisível por $x - 2$ então $p(2) = 0 \Rightarrow 2.8 + 5.4 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = 19$

2) (Unimontes-2005) O resto da divisão do polinômio $x^{12} + 16$ por $x + \sqrt[3]{2}$ é igual a
a) $16\sqrt[3]{2}$ b) $8\sqrt[3]{2}$ c) 32 d) 16
Solução:
Pelo Teorema do Resto: $r = P(-\sqrt[3]{2}) = (-\sqrt[3]{2})^{12} + 16 = 16 + 16 = 32$

3) (UFSC-2000) Um polinômio $P(x)$ dividido por $(x + 1)$ dá resto 3 e por $(x - 2)$ dá resto 6. O resto da divisão de $P(x)$ pelo produto $(x + 1).(x - 2)$ é da forma $ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O valor numérico da expressão $a + b$ é:
Solução:
Pelo Teorema do Resto $P(-1) = 3$ e $P(2) = 6$. A expressão da divisão de $P(x)$ por $(x + 1).(x - 2)$ é:
$P(x) = Q(x)(x + 1)(x - 2) + ax + b$
i) $x = -1 \Rightarrow P(-1) = Q(-1)(-1 + 1)(-1 - 2) + a(-1) + b \Rightarrow -a + b = 3$
ii) $x = 2 \Rightarrow P(2) = Q(2)(2 + 1)(2 - 2) + 2a + b \Rightarrow 2a + b = 6$
Resolvendo o sistema obtemos $a = 1$ e $b = 4 \Rightarrow a + b = 5$

4) (UEL-2002) Qual é o resto da divisão de $p(x) = x^{110} - x$ pelo polinômio $g(x) = x^2 + x$?
a) $-2x$ b) -2 c) x d) $-x$ e) 0
Solução:
Uma vez que o grau do divisor é 2, então o grau do resto é menor que ou igual a 1, ou seja, $r(x) = ax + b$.
A expressão da divisão de $p(x)$ por $g(x)$ é $x^{100} - x = q(x)(x^2 - x) + ax + b$.
i) $x = 0 \Rightarrow 0^{100} - 0 = q(0)(0^2 + 0) + a.0 + b \Rightarrow b = 0$
ii) $x = -1 \Rightarrow (-1)^{100} - (-1) = q(-1)[(-1)^2 + (-1)] + a(-1) + b \Rightarrow a = -2$
Logo, concluímos que $r(x) = -2x$.

5) (UFMA-2001) Sejam a_1, a_2, a_3, ... números reais em progressão aritmética de razão igual a 7. Determine o resto (em função de a_1) da divisão do polinômio $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{100}x^{100}$ por $(x - 1)$.
Solução:

$$r = p(1) = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100} = \frac{(a_1 + a_{100})100}{2} = (a_1 + a_1 + 7.99)50 \Rightarrow r = 100a_1 + 34650$$

6) (UFOP-2002) Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - 1$ e, quando dividido por $x^2 - 2$, fornece quociente $x^2 + 1$ e resto $R(x)$. Sabendo-se que $R(-1) = 3$, determine $R(x)$ e $P(x)$.
Solução:
Se $P(x)$ é divisível por $x - 1$ então $P(1) = 0$. Como $\partial(x^2 - 2) = 2$ então $\partial(R) < 2$, ou seja, $R(x) = ax + b$.
Na divisão de $P(x)$ por $x^2 - 2$ temos: $P(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1) + ax + b$
$x = 1 \Rightarrow P(1) = (1^2 - 2)(1^2 + 1) = a + b \Rightarrow a + b = 2$

$R(-1) = 3 \Rightarrow -a + b = 3$
Resolvendo o sistema obtemos $a = -1/2$ e $b = 5/2 \Rightarrow R(x) = -x/2 + 5/2$.
Logo: $P(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1) - x/2 + 5/2 = x^4 - x^2 - x/2 + 1/2$

7) (AFA-2000) Se a divisão do polinômio $P(x) = ax^{20} + bx^{11} - 2x^9$ por $H(x) = 4x^2 - 4$ tiver resto $R(x) = -1$, com $a, b \in R$, então

a) $b^a = \frac{1}{2}$ b) $\sqrt[b]{a} = 2$ c) $\frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$ d) $\log_b a = 0$

Solução:
$P(x) = H(x)\,Q(x) + R(x) \Rightarrow ax^{20} + bx^{11} - 2x^9 = (4x^2 - 4)Q(x) - 1$.
$x = 1 \Rightarrow a.1^{20} + b.1^{11} - 2.1^9 = (4.1^2 - 4).Q(x) - 1 \Rightarrow a + b = 1$
$x = -1 \Rightarrow a.(-1)^{20} + b.(-1)^{11} - 2.(-1)^9 = [4.(-1)^2 - 4].Q(x) - 1 \Rightarrow a - b = -3$
Resolvendo o sistema obtemos $a = -1$ e $b = 2 \Rightarrow b^a = 1/2$.

8) (ITA-86) Sejam a, b e c números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma 12. Sabendo-se que os restos das divisões de $x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$ por $x - 2$ e $x + 2$ são iguais, então a razão desta progressão aritmética é:
a) 1 b) 28/5 c) 37/5 d) 44/15 e) -3
Solução:
Se r é a razão da PA de soma 12 então $a = 4 - r$, $b = 4$ e $c = 4 + r$.
$P(2) = P(-2) \Rightarrow 2^{10} + 8.2^8 + a.2^5 + b.2^3 + c.2 = (-2)^{10} + 8.(-2)^8 + a.(-2)^5 + b.(-2)^3 + c.(-2) \Rightarrow$
$2^{10} + 8.2^8 + a.2^5 + b.2^3 + c.2 = 2^{10} + 8.2^8 - a.2^5 - b.2^3 - c.2 \Rightarrow 16a + 4b + c = 0 \Rightarrow$
$16(4 - r) + 4.4 + (4 + r) = 0 \Rightarrow 64 - 16r + 16 + 4 + r = 0 \Rightarrow 15r = 84 \Rightarrow r = 28/5$

9) (ITA-98) Seja p(x) um polinômio de grau 4 com coeficientes reais. Na divisão de p(x) por $x - 2$ obtém-se um quociente q(x) e resto igual a 26. Na divisão de p(x) por $x^2 + x - 1$ obtém-se um quociente h(x) e resto $8x - 5$. Sabe-se que $q(0) = 13$ e $q(1) = 26$. Então, $h(2) + h(3)$ é igual a:
a) 16 b) zero c) -47 d) -28 e) 1
Solução:
Pelo enunciado: $p(x) = (x - 2)q(x) + 26$ (I) e $p(x) = (x^2 + x - 1)h(x) + 8x - 5$ (II)
Aplicando $x = 0$ em I: $p(0) = (0 - 2)q(0) + 26 \Rightarrow p(0) = 0$
Aplicando $x = 1$ em I: $p(1) = (1 - 2)q(1) + 26 \Rightarrow p(1) = 0$
Aplicando $x = 2$ em I: $p(2) = (2 - 2)q(2) + 26 \Rightarrow p(2) = 26$
Como $\partial(p) = \partial(x^2 + x - 1) + \partial(h) \Rightarrow 4 = 2 + \partial(h) \Rightarrow \partial(h) = 2 \Rightarrow h(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$
Aplicando $x = 0$ em II: $p(0) = (0^2 + 0 - 1)h(0) + 8.0 - 5 \Rightarrow 0 = -h(0) - 5 \Rightarrow h(0) = -5$
Aplicando $x = 1$ em II: $p(1) = (1^2 + 1 - 1)h(1) + 8.1 - 5 \Rightarrow 0 = h(1) + 3 \Rightarrow h(1) = -3$
Aplicando $x = 2$ em II: $p(2) = (2^2 + 2 - 1)h(2) + 8.2 - 5 \Rightarrow 26 = 5.h(2) + 11 \Rightarrow h(2) = 3$
$h(0) = -5 \Rightarrow c = -5 \Rightarrow h(x) = ax^2 + bx - 5$
$h(1) = -3 \Rightarrow a + b - 5 = -3 \Rightarrow a + b = 2$
$h(2) = 3 \Rightarrow a.2^2 + b.2 - 5 = 3 \Rightarrow 4a + 2b = 8 \Rightarrow 2a + b = 4$
Resolvendo o sistema temos que $a = 2$ e $b = 0 \Rightarrow h(x) = 2x^2 - 5 \Rightarrow h(2) + h(3) = 3 + 2.3^2 - 5 = 16$.

10) (IME-97) Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\varphi + x\,\text{sen}\,\varphi)^n$ por $(x^2 + 1)$, onde n é um número natural.
Solução:
Podemos escrever a expressão da divisão proposta da seguinte maneira:
$(\cos\varphi + x.\text{sen}\,\varphi)^n = (x^2 + 1)q(x) + r(x)$, onde $r(x) = ax + b$
$x = i$ temos que: $(\cos\varphi + i.\text{sen}\,\varphi)^n = (i^2 + 1)q(i) + a.i + b \Rightarrow a.i + b = \cos n\varphi + i.\text{sen}\,n\varphi$
$x = -i$ temos que: $(\cos\varphi - i.\text{sen}\,\varphi)^n = [(-i)^2 + 1]q(-i) + a.i + b \Rightarrow -a.i + b = \cos n\varphi - i.\text{sen}\,n\varphi$
Resolvendo o sistema obtemos: $a = \text{sen}\,n\varphi$ e $b = \cos n\varphi \Rightarrow r(x) = (\text{sen}\,n\varphi)x + \cos n\varphi$

2.9. TEOREMA DE D'ALEMBERT:

Definição: Um polinômio p é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de p.

Demonstração:

De acordo com o teorema do resto, na divisão de p por $x - a$ temos $r = p(a)$.
Logo, $p(x)$ é divisível por $x - a \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow p(a) = 0 \Leftrightarrow a$ é raiz de p.

Exemplos:

1) (Mackenzie-2002) Se o polinômio $p(x) = x^5 + 4ax^4 + 3x^3 + a^3$, $a \in \mathbb{R}$, é divisível por $x - a$, então $\sqrt{a^2 + 1}$ é:

a) $\sqrt{10}$ b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{26}$

Solução:

Se p é divisível por $x - a$ então $p(a) = 0 \Rightarrow a^5 + 4.a.a^4 + 3a^3 + a^3 = 0 \Rightarrow 5a^5 + 4a^3 = 0 \Rightarrow$

$a^3(5a^2 + 2) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a^2 = -\frac{2}{5}$ (impossível pois assim $a \notin \mathbb{R}$)

Assim, a única possibilidade é $a = 0 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{1} = 1$.

2) (UECE-2003) Se m e n são números reais tais que o polinômio $P(x) = x^5 + 3x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 - 3x + 2$ então $m + n$ é igual a:

a) -4 b) 4 c) -6 d) 6

Solução:

Se $P(x)$ é divisível por $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ então $P(1) = 0$ e $P(2) = 0$.

$P(1) = 0 \Rightarrow 1^5 + 3.1^2 + m.1 + n = 0 \Rightarrow m + n = -4$

3) (UFMS-98) Dado o polinômio $p(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - 1$, onde a e b $\in \mathbb{R}$, então é **correto** afirmar que:

(01) se $p(x)$ é divisível por $q(x) = x - 1$ e por $s(x) = x + 1$, então $b = 1$.
(02) se $p(x)$ é divisível por $q(x) = x - 1$ e por $s(x) = x + 1$, então $a + b = 0$.
(04) se $p(x)$ é divisível por $q(x) = x - 1$ e por $s(x) = x + 1$, então $p(x)$ admite quatro raízes reais e distintas.
(08) se $p(x)$ é divisível por $q(x) = x - 1$ e por $s(x) = x + 1$, então $p(-x) = p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(16) se $p(x)$ é divisível por $q(x) = x - 1$ e por $s(x) = x + 1$, então $p(x)$ é divisível por $r(x) = x^2 + 1$.

Solução:

Se $p(x)$ é divisível por $x - 1$ então $p(1) = 0 \Rightarrow 1^4 - a.1^3 + b.1^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = b$
Se $p(x)$ é divisível por $x + 1$ então $p(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^4 - a.(-1)^3 + b.(-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow a + b = 0$
Resolvendo o sistema obtemos $a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow p(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$
Assim, as raízes de $p(x)$ são $1, -1, i$ e $-i$.
Vamos agora analisar as afirmações:
(01) Falso, pois $b = 0$
(02) Verdadeiro.
(04) Falso, pois i e $-i$ são raízes de $p(x)$ e não são números reais.
(08) Verdadeiro, desde que $p(-x) = (0 - x)^4 - 1 = x^4 - 1 = p(x)$.
(16) Verdadeiro, já que $p(x) = x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$.

4) (UFPB-2002) Determine os possíveis valores de a e b, com $a, b \in Z$, de modo que o polinômio $p(x) = ax^2 + 3x - 7$ seja divisível por $q(x) = x - b$.

Solução:

$p(x)$ é divisível por $x - b$ então $p(b) = 0 \Rightarrow ab^2 + 3b - 7 = 0 \Rightarrow b(a + 3) = 7$
Uma vez que a e b são números inteiros, as únicas possibilidades são:

i) $\begin{cases} b = 1 \\ a + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 4$ e $b = 1$; ii) $\begin{cases} b = 7 \\ a + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2$ e $b = 7$

iii) $\begin{cases} b = -1 \\ a + 3 = -7 \end{cases} \Rightarrow a = -10$ e $b = -1$ iv) $\begin{cases} b = -7 \\ a + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -4$ e $b = -7$

5) (ITA-2000) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x-1$. Dividindo-o por $x^2 + x$, obtêm-se o quociente $Q(x) = x^2 - 3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4) = 10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a:

a) -5 b) -3 c) -1 d) 1 e) 3

Solução:

Se p(x) é divisível por x – 1 então p(1) = 0. Por outro lado:

$p(x) = h(x)q(x) + R(x) \Rightarrow p(x) = (x^2 + x)(x^2 - 3) + R(x)$

Aplicando x = 1 obtemos: $p(1) = (1^2 + 1)(1^2 - 3) + R(1) \Rightarrow R(1) = 4$

Como $\partial(x^2 + x) = 2$ então $\partial[R(x)] \leq 1 \Rightarrow R(x) = ax + b$

$R(1) = 4 \Rightarrow a + b = 4$

$R(4) = 10 \Rightarrow 4a + b = 10$

Resolvendo o sistema linear acima obtemos a = 2 e b = 2.

Desta forma: $p(x) = (x^2 + x)(x^2 - 3) + 2x + 2 = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 \Rightarrow$ coeficiente de grau 1 vale – 1.

6) (ITA-2003) Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por (x – 1), obtém-se resto igual a 2,. Dividindo-se P(x) por (x + 1), obtém-se resto igual a 3. Sabendo que P(x) é divisível por (x – 2), tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) – 6 b) – 4 c) 4 d) 7 c) 9

Solução:

Pelo teorema do resto

$P(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b + c + 1 = 2 \Rightarrow a + b + c = 0$

$P(-1) = 3 \Rightarrow -1 + a + b - c + 1 = 3 \Rightarrow a + b - c = 3$

$P(2) = 0 \Rightarrow 32 + 16a + 4b + 2c + 1 = 0$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b - c = 3 \\ 16a + 4b + 2c = -33 \end{cases}$$

Resolvendo, teremos: $a = -3$, $b = \frac{9}{2}$ e $c = -\frac{3}{2}$

Portanto: $\frac{ab}{c} = \frac{-3\frac{7}{2}}{-3} = 9$

7) (IME-2001) Determine todos os números inteiros m e n para os quais o polinômio $P(x) = 2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível por x + a.

Solução:

Calculando P(– a) obtemos: $P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m$

i) m par e n par: $P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = 2a^m + a^{3n}.a^{m-3n} - a^m = 2a^m + a^m - a^m = 2a^m$

ii) m ímpar e n ímpar: $P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = -2a^m + a^{3n}.a^{m-3n} - a^m = -2a^m$

iii) m ímpar e n par: $P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = -2a^m - a^{3n}.a^{m-3n} - a^m = -3a^m$

iv) m par e n ímpar: $P(-a) = 2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = 2a^m - a^{3n}.a^{m-3n} - a^m = 0$

Logo, P(x) é divisível por x + a se e somente se m é par e n é ímpar.

2.9.1. Teorema: Se um polinômio $p(x)$ é divisível separadamente por $x - a$ e $x - b$, com $a \neq b$, então $p(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

Demonstração:

Se $p(x)$ é divisível por a e b $(a \neq b)$ então $p(a) = 0$ e $p(b) = 0$
Na divisão de $p(x)$ por $(x - a)(x - b)$ o grau do resto é um, então $r(x) = cx + d$
$p(x) = q(x)(x - a)(x - b) + cx + d$
Aplicando $x = a$ temos: $p(a) = q(a)(a - a)(b - a) + ca + d \Rightarrow ca + d = 0$
Aplicando $x = b$ temos: $p(b) = q(b)(a - b)(b - b) + cb + d \Rightarrow cb + d = 0$
Então $c = 0$ e $d = 0 \Rightarrow r(x) = 0$

2.9.2. Teorema: Se $p(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$ então $p(x)$ é divisível separadamente por $(x - a)$ e por $(x - b)$.

Demonstração:

Como $p(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$ então existe um polinômio $q(x)$, não identicamente nulo, de modo que $p(x) = (x - a)(x - b)q(x)$. Aplicando $x = a$ obtemos $p(a) = 0$, ou seja, $p(x)$ é divisível por $x - a$. Analogamente, aplicando $x = b$ obtemos $p(b) = 0$, fazendo com que $p(x)$ seja divisível por $x - b$.

Exemplos:

1) (Mackenzie-2005) Um polinômio $p(x)$ tem resto A, quando dividido por $(x - A)$, e resto B, quando dividido por $(x - B)$, sendo A e B números reais. Se o polinômio $p(x)$ é divisível por $(x - A)(x - B)$, então:

a) $A = B = 0$ b) $A = B = 1$ c) $A = 1$ e $B = -1$ d) $A = 0$ e $B = 1$ e) $A = 1$ e $B = 0$

Solução:

Pelo enunciado $p(A) = A$ e $p(B) = B$. Por outro lado, como $p(x)$ é divisível por $(x - A)(x - B)$ então existe $q(x)$ de modo que $p(x) = (x - A)(x - B)q(x)$.
Fazendo $x = A$ obtemos $p(A) = (A - A)(A - B)q(A) \Rightarrow A = 0$
Fazendo $x = B$ obtemos $p(B) = (B - A)(B - B)q(A) \Rightarrow B = 0$

2) (UFMG-2001) Os polinômios $p_1(x) = x^2 - 4$ e $p_2(x) = x^2 - 7x + 10$ dividem o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 - 12x + c$, em que a, b e c são números reais. Determine a, b e c.

Solução:

Fatorando obtemos $p_1(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ e $p_2(x) = x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$. Desta forma, podemos concluir que $x - 2$, $x + 2$ e $x - 5$ dividem $p(x)$, ou seja, $p(2) = p(-2) = p(5) = 0$.

i) $p(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + c = 24$
ii) $p(-2) = 0 \Rightarrow -8a + 4b + c = -24$
iii) $p(5) = 0 \Rightarrow 125a + 25b + c = 60$

Subtraindo as duas primeiras equações: $16a = 48 \Rightarrow a = 3$.

Substituindo $a = 3$ na primeira e na terceira equações: $\begin{cases} 4b + c = 0 \\ 25b + c = -315 \end{cases} \Rightarrow b = -15$ e $c = 60$

2.10. ALGORITMO DE BRIOT-RUFFINI

Veremos agora um método bastante prático para a determinação do quociente e do resto de uma divisão de polinômios no caso em que o divisor é da forma $x - c$, $c \in C$. Neste caso, $\partial p = n$, então $\partial h = n - 1$ e o resto da divisão possui grau menor que 1, ou seja, é da forma $r(x) = k$, $k \in C$.

Pelo Método de Descartes:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \ldots + b_1 x + b_0) + k =$

$= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - c.b_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - c.b_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (b_0 - c.b_1)x + (-c.b_0 + k)$

Logo, temos as seguintes igualdades:

$b_{n-1} = a_n$

$a_{n-1} = b_{n-2} - c.b_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = c.b_{n-1} + a_{n-1}$

$a_{n-2} = b_{n-3} - c.b_{n-2} \Rightarrow b_{n-3} = c.b_{n-2} + a_{n-2}$

...

$a_1 = b_0 - c.b_1 \Rightarrow b_0 = a_1 + c.b_1$

$a_0 = -c.b_0 + k \Rightarrow k = a_0 + c.b_0$

Repare que, à semelhança das equações obtidas na demonstração do método da chave, dependendo do grau de $p(x)$, a manipulação algébrica de todas estas expressões demando certo tempo. Assim, surge a necessidade da criação de um algoritmo que torne estas contas mais sucintas. As operações necessárias para calcular os coeficientes do quociente e do resto através do Método de Descartes podem ser efetuadas mais rapidamente por meio do dispositivo prático de Briot-Ruffini. O dispositivo consta dos seguintes passos:

I) Na primeira linha escrever os coeficientes a_i, $0 \le i \le n$, $i \in IN$, dos termos de $p(x)$, colocando zero como coeficiente dos termos que faltarem. Escrever também a raiz c do divisor na primeira linha, à esquerda dos coeficientes de $p(x)$, separando deles por um traço vertical;

II) Escrever o primeiro coeficiente (a_n) de $p(x)$ na linha de baixo. Depois multiplicar este número pela raiz c do divisor e somar este produto pelo segundo coeficiente (a_{n-1}) de $p(x)$, colocando o resultado ($a_n + c.a_{n-1}$) abaixo deste;

III) Multiplicar a raiz c do divisor pelo número colocado abaixo do segundo coeficiente (a_{n-1}) e somar o produto com o terceiro coeficiente (a_{n-2}), colocando o resultado ($a_{n-1} + c.a_{n-2}$) abaixo deste, e assim sucessivamente;

IV) Separar o último número formado, que é igual ao resto da divisão, e os números que ficam à esquerda deste são os coeficientes do quociente.

Vamos aplicar este algoritmo para determinar o quociente e o resto da divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $(x - 2)$.

Aplicando os passos descritos anteriormente:

I) $\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & & & & \end{array}$ II) $\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & & & \end{array}$ $2.3 - 5 = 1$ $\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & 1 & & \end{array}$

III) Da mesma forma: $2.1 + 1 = 3$ $\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & \end{array}$ $2.3 - 2 = 4$ $\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & -5 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}$

IV) quociente: $q(x) = 3x^2 + x + 3$, resto: $r = 4$

Exemplos:

1) (FGV-2003) A equação $x^3 - 3x^2 + 4x + 28 = 0$ admite -2 como raiz. As outras raízes satisfazem a equação:

a) $x^2 - 4x + 14 = 0$ b) $x^2 - 5x + 14 = 0$ c) $x^2 - 6x + 14 = 0$

d) $x^2 - 7x + 14 = 0$ e) $x^2 - 8x + 14 = 0$

Solução:

Pelo Algoritmo de Briot-Ruffini:

−2	1	−3	4	28
	1	−5	14	0

Asism, o quociente da divisão é $x^2 - 5x + 14$, polinômio que possui as outras duas raízes da equação.

2) (Fatec/SP-2000) Sabe-se que −1 é raiz dupla do polinômio $P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$. As outras raízes são números

a) imaginários puros. b) reais negativos. c) irracionais.
d) racionais. e) pares.

Solução:

Aplicando o Algoritmo de Briot-Ruffini:

−1	2	1	−3	−1	1
	2	−1	−2	1	0

Como −1 é raiz dupla de P(x), então −1 é raiz do queciente da divisão acima:

−1	2	−1	−2	1
	2	−3	1	0

Portanto, acabamos de mostrar que $2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(2x^2 - 3x + 1)$. Portanto, as outras duas raízes de P(x) são as raízes de $2x^2 - 3x + 1 = (2x - 1)(x - 1)$, ou seja, $x = 1$ e $x = 1/2$.
Desta forma, as outras duas raízes de P(x) são números racionais.

3) (UFLA-2002) O número 3 é uma das raízes do polinômio $P(x) = x^3 - ax^2 + (2a - 1)x - a$. Calcule o valor de a e das demais raízes do polinômio.

Solução:

Aplicando o Algoritmo de Briot-Ruffini:

3	1	−a	2a − 1	−a
	1	−a + 3	−a + 8	−4a + 24

Para que 3 seja raiz de P(x) o resto da divisão deve ser igual a zero: $-4a + 24 = 0 \Rightarrow a = 6$
Desta forma o quociente da divisão é $q(x) = x^2 + (-a + 3)x - a + 8 = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, ou seja, as outras duas raízes de P(x) são 1 e 2.

4) (UFPI-2003) Dado o polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$. Assinale com V (verdadeiro) ou F (falso) as opções abaixo.

(1) Todas as raízes são reais.
(2) Apenas uma raiz é real.
(3) Todas as raízes são inteiras.
(4) p(x) é divisível por x + 1

Solução:

Inicialmente podemos observar que 1 é raiz de p(x). Pelo Algoritmo de Briot-Ruffini:

1	1	−1	−2	2
	1	0	−2	0

Assim, as outras duas raízes saem da equação $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
Vamos agora analisar as afirmativas:

(1) Verdadeiro.
(2) Falso.
(3) Falso, pois $\sqrt{2} \notin Q$
(4) Falso, uma vez que $p(-1) \neq 0$.

5) Determinar os números *a* e *b* e o maior inteiro m de tal modo que o polinômio $x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1$ seja divisível por $(x - 1)^m$.

Solução:

Aplicando o Algoritmo de Briot-Ruffini:

1	1	−a	b	−b	2	−1
	1	−a + 1	−a + b + 1	−a + 1	−a + 3	−a + 2

Para que o resto seja igual a zero devemos ter a = 2. Desta maneira, o quociente desta divisão vale $x^4 + (-a+1)x^3 + (-a+b+1)x^2 + (-a+1)x + (-a-3) = x^4 - x^3 + (b-1)x^2 - x + 1$.

Aplicando mais uma vez o Algoritmo:

1	1	−1	b − 1	−1	1
	1	0	b − 1	b − 2	b − 1

Mais uma vez, para que o resto seja igual a zero, temos b = 1. O quociente desta divisão vale $x^3 - 1$.

Pelo Algoritmo de Briot-Ruffini:

1	1	0	0	−1
	1	1	1	0

Note que nesta última divisão não foi necessária nenhuma condição especial para que o resto fosse igual a zero. Aplicando pela 4ª vez o Algoritmo:

1	1	1	1
	1	2	3

Assim, na 4ª divisão não ocorre resto igual a zero. Desta forma, podemos afirmar que 1 é raiz tripla do polinômio proposto e portanto temos m = 3.

6) (IME-98) Determine α, β e γ de modo que o polinômio, $p(x) = \alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$ racional inteiro em x, seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para x = 1.

Solução:

Aplicando o Algoritmo de Briot-Ruffini para a divisão de $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$ por x − 1:

1	α	β	0	0	0	...	0	1
	α	α + β	α + β	α + β	α + β	...	α + β	α + β + 1

Assim, para que 1 seja raiz de $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$ devemos ter $\alpha + \beta + 1 = 0$ (1)

Além disso, do algoritmo tiramos que o quociente da divisão de p(x) por x − 1 é:

$h(x) = \alpha x^{\gamma} + (\alpha+\beta)x^{\gamma-1} + (\alpha+\beta)x^{\gamma-2} + ... + (\alpha+\beta)x + \alpha + \beta$

Dividindo h(x) por x − 1, através do Algoritmo de Briot-Ruffini obtemos:

1	α	α + β	α + β	α + β	α + β	...	α + β	α + β
	α	2α + β	3α + 2β	4α + 3β	5α + 4β	...	γα + (γ − 1)β	(γ + 1)α + γβ

Desta forma, para que 1 seja raiz de h(x) devemos ter $(\gamma+1)\alpha + \gamma\beta = 0$ (2)

Desta última aplicação do Algoritmo de Briot-Ruffini concluímos que o quociente da divisão de p(x) por $(x-1)^2$ é $q(x) = \alpha x^{\gamma-1} + (2\alpha+\beta)x^{\gamma-2} + (3\alpha+2\beta)x^{\gamma-3} + ... + [(\gamma-1)\alpha + (\gamma-2)\beta]x + \gamma\alpha + (\gamma-1)\beta$.

Portanto: $q(1) = 120 \Leftrightarrow 120 = [\alpha + 2\alpha + 3\alpha + ... + \gamma\alpha] + [\beta + 2\beta + 3\beta + ... + (\gamma-1)\beta] \Leftrightarrow$

$$120 = \frac{\alpha(\gamma+1)\gamma}{2} + \frac{\beta\gamma(\gamma-1)}{2} \Leftrightarrow \gamma[\alpha(\gamma+1) + \beta(\gamma-1)] = 240 \quad (3)$$

Substituindo (1) em (2): $0 = (\gamma+1)\alpha + \gamma\beta = \gamma(\alpha+\beta) + \alpha = \alpha - \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$ (4)

Substituindo (2) em (3): $240 = \gamma(-\gamma\beta + \gamma\beta - \beta) = -\gamma\beta \Rightarrow \gamma\beta = -240 \Rightarrow \alpha\beta = -240 \Rightarrow$

$\alpha(-1-\alpha) = -240 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 240 = 0 \Rightarrow (\alpha+16)(\alpha-15) = 0$

Uma vez que $\alpha = \gamma$ e $\gamma \geq 0$ então a única possibilidade é $\alpha = 15$, $\beta = -16$ e $\gamma = 15$.

2.11. TEOREMAS SOBRE DIVISÃO DE POLINÔMIOS:

2.11.1. Teorema: Se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $h(x)$, então o resto $r(x)$ da divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$ também é divisível por $h(x)$.

Demonstração:

Se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $h(x)$ $\Rightarrow$ $p_1(x) = q_1(x).h(x)$ e $p_2(x) = q_2(x).h(x)$
Na divisão de $p_1(x)$ por $p_2(x)$ temos: $p_1(x) = q(x).p_2(x) + r(x)$ $\Rightarrow$ $r(x) = p_1(x) - q(x).p_2(x)$ $\Rightarrow$
$r(x) = q_1(x).h(x) - q(x).q_2(x).h(x)$ $\Rightarrow$ $r(x) = [q_1(x) - q(x).q_2(x)]h(x)$ $\Rightarrow$ $r(x)$ é divisível por $h(x)$

2.11.2. Teorema: Na divisão de um polinômio $p(x)$ por $h_1(x)$ o resto é $r_1(x)$; na divisão de $p(x)$ por $h_2(x)$ o resto é $r_2(x)$; na divisão de $p(x)$ por $h_1(x).h_2(x)$ o resto é $r(x)$. Se $r(x)$ é dividido por $h_1(x)$ o resto é $r_1(x)$ e dividido por $h_2(x)$ o resto é $r_2(x)$.

Demonstração:

$p(x) = q_1(x).h_1(x) + r_1(x)$ $\quad$ $p(x) = q_2(x).h_2(x) + r_2(x)$
$p(x) = q(x).h_1(x).h_2(x) + r(x)$ $\Rightarrow$ $r(x) = p(x) - q(x).h_1(x).h_2(x)$
I) $r(x) = q_1(x).h_1(x) + r_1(x) - q(x).h_1(x).h_2(x)$ $\Rightarrow$ $r(x) = [q_1(x) - q(x).h_2(x)]h_1(x) + r_1(x)$
Ou seja o resto da divisão de $r(x)$ por $h_1(x)$ é $r_1(x)$
II) $r(x) = q_2(x).h_2(x) + r_2(x) - q(x).h_1(x).h_2(x)$ $\Rightarrow$ $r(x) = [q_2(x) - q(x).h_1(x)]h_2(x) + r_2(x)$
Ou seja o resto da divisão de $r(x)$ por $h_2(x)$ é $r_2(x)$

Questões de Vestibulares

1) (UEMS-2002) Os valores de m e n, de modo que $p(x) = x^3 - 3x^2 + mx + n$ seja divisível por $q(x) = -x^2 + x + 1$ são respectivamente:
a) – 3 e – 2 b) – 2 e – 1 c) – 1 e 0
d) 0 e 1 e) 1 e 2

2) (UEMS-2003) Ao dividir o polinômio P(x) por $B(x) = 2x^2 + x - 1$, obtém-se como resto R(x). Sabendo-se que P(– 1) = 3 e $P(\frac{1}{2}) = 0$, determine R(x).
a) $-2x+1$ b) $3x+4$ c) $2x+2$
d) $5x+3$ e) $3x-2$

3) (UEMS-2004) Se $p(x)=(3x-4)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, logo, $\sum_{i=0}^{5} a_i$ é igual a...
a) – 1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 4

4) (Unifor-2004) Considere os polinômios $p = x^2 - 2x + 1$, $q = x^3 - x - 2$ e $r = -x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. O grau do polinômio p.q + r é
a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

5) (UFMT-97) Considere os polinômios A(x), de grau m, e B(x), de grau n, com $m \geq n$, ambos de coeficientes reais, e, julgue os itens.
(0) O grau do polinômio S(x) = A(x) + B(x) é $m + n$.
(1) O polinômio P(x) = A(x).B(x) é de grau $m.n$.
(2) Se Q(x) é o quociente da divisão A(x) ÷ B(x), com $B(x) \neq 0$, então Q(x) é um polinômio de grau $m - n$.

6) (UFC-2000) Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, no qual a, b e c são números reais e $b > 0$. Mostre que se P(x) = – P(–x) para todo número real x, então a equação P(x) = 0 possui somente uma raiz real.

7) (UFC-2005) Seja a função $f : R \to R$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ onde a, b e c são números reais. Determine f(-2) sabendo que f(1) = 0, f(-1) = 2 e que f(2) = 14.

8) (Unifor-99) São dados os polinômios P = x – 3, $Q = x^2 + 3x + 9$ e $R = (a + b)x^3 + (a - b)x^2 + cx + d$. Sabendo-se que o polinômio P . Q é idêntico a R, conclui-se que a + b + c + d é igual a
a) 28 b) 13 c) $\frac{25}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) – 26

9) (UFMG-2000) Considere os polinômios $p(x) = ax^3 + (2a - 3b)x^2 + (a + b + 4c)x - 4bcd$ e $q(x) = 6x^2 + 18x + 5$, em que a, b, c e d são números reais. Sabe-se que p(x) = q(x) para todo $x \in R$. Assim sendo, o número d é igual a
a) 1/8 b) 2/3 c) 4/5 d) 3

10) (UFPB-99) Determine a relação entre a, b e c, para que o polinômio do segundo grau $p(x) = ax^2 + bx + c$ seja o quadrado do polinômio do primeiro grau $q(x) = dx + e$.

11) (UFPE-2002) Determine os reais a, b e c tais que o polinômio $x^4 - 63x^2 + 22x + d$, d real, se fatora como $(x^2 + x + a)(x^2 + bx + c)$. Calcule a maior raiz do polinômio de grau 4.

12) (Mackenzie-2004) Se o polinômio $p(x) = x^3 + 3x^2 + a - 2b$ é divisível por $(x - a)^2(x - b)$, então o produto dos números reais a e b é:
a) – 2 b) 4 c) – 3 d) 2 e) 3

13) (UFES-2002) O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + 7$, com coeficientes reais, é divisível por $x^2 + x + 1$. O valor da soma $a + b$ é igual a
A) 7 B) 14 C) 15 D) 16 E) 21

14) (UFSC-2001) Se o polinômio $2x^3 - ax^2 + bx + 2$ é divisível por $2x^2 + 5x - 2$, então o valor de a – b é:

15) (Fatec/SP-2002) O polinômio f(x) dividido por ax + b, com $a \neq 0$, tem quociente q(x) e resto r. É verdade que o resto da divisão de x.f(x) por $x + \frac{b}{a}$ é:
a) r^2 b) $\frac{a}{b}r$ c) $\frac{b}{a}r$ d) $-\frac{b}{a}r$ e) $-\frac{a}{b}r$

16) (UFOP-2003) Seja P(x) um polinômio tal que P(2) = – 1. Suponhamos que o quociente Q(x) da divisão de P(x) por x – 2 seja tal que Q(3) = 3.

Determine o resto R(x) da divisão de P(x) por (x – 2).(x – 3).

17) (UFES-2003) Se P(x) é um polinômio com P(–3) = a , P(5) = –a , em que $a \neq 0$, então o resto da divisão de P(x) por $(x+3)(x-5)$ é
A) a(–x + 1)/4 B) a(–x – 1)/4 C) a/4 D) a(x + 1)/4 E) a(x – 1)/4

18) (UFG-2001) Considere o polinômio $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 + bx + c)$, onde b e c são números reais, e julgue os itens abaixo.
1- O polinômio P(x) tem, no máximo, duas raízes reais.
2- Se 1 e – 2 são raízes de P(x), então b = 1 e c = -2.
3- Se na divisão de $x^2 + bx + c$ por x – 3 e x – 1 obtém-se restos 0 e 2, respectivamente, então $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 – 5x + 6)$.
4- Se b = -1 e c = -6, então P(x) > 0, para $-2 < x < 3$.

19) (Mackenzie-2000)

$P(x) \mid \overline{3x-2}$ $\quad$ $(x^2-1)P(x) \mid \overline{3x-2}$
1 $\quad$ Q(x) $\quad$ K $\quad$ $Q_1(x)$

Nas divisões acima, de polinômios, podemos afirmar que o resto K vale:
a) 4/9 b) – 1/9 c) – 4/9 d) – 5/9 e) – 2/9

20) (Ciaba-94) Um polinômio P(x) dividido por (x – 2) dá resto 13, e dividido por (x + 2) dá resto 5. O resto da divisão de P(x) por $(x^2 – 4)$ é:
a) x – 13 b) 2x + 9 c) 2x – 1
d) x – 5 e) x + 18

21) (Mackenzie-99) Se o polinômio $P(x) = x^2 + bx + c$ é divisível por x – 3 e P(P(3)) = 6, então o resto da divisão de P(x) por x – 1 é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

22) (Mackenzie-2002) Se $P(x) = x^3 + ax^2 + ax$, $a \neq 0$, tem apenas uma raiz real, então o resto R da divisão de P(x) por x – 2 é tal que:
a) $-2 < R < 2$ b) $0 < R < 24$ c) $12 < R < 48$
d) $8 < R < 32$ e) $-32 < R < 12$

23) (UFU-98) Seja r(x) = 3x + 1 o resto da divisão do polinômio S(x) por $g(x) = x^2 – (a + b)x + ab$, onde a e b são constantes reais positivas e distintas e, sabendo-se que p(a) + p(b) = 17 e ab = 6, determine as raízes de g(x).

24) (PUC/PR-2003) Calcule a e b para que o polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ seja divisível por $x^2 – 1$.
a) a = –1 e b = –3 b) a = 1 e b = 3
c) a = –1 e b = 3 d) a = 1 e b = –3
e) a = 1 e b = 4

25) (UFMA-2002) Quais os valores de a e b para que o polinômio $p(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$ seja divisível por $(x – 1)$ e por $(x – 3)$?

26) (UFSE-2004) Verifique a veracidade de cada uma das afirmações seguintes.
(0) A expressão $x^2 + y^2$ é um fator de $x^4 + y^4$.
(1) Se na divisão do polinômio $f = x^3 + kx^2 + t$ por $x^2 + 1$ obtém-se quociente x – 1 e resto 3 – x, então k – t = –2.
(2) Se f é um polinômio de grau 2 e g é um polinômio de grau 4, então $f^2.g$ é um polinômio de grau 8.
(3) Se um polinômio f é divisível por (3x + 2), então $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$.
(4) Na divisão do polinômio $f = x^{2n} + 2^{2n}$ por x + 2, o resto é 2^{2n+1}.

27) (UFMS-99) O resto da divisão de $p(x) = x^3 + 2x^2 + mx + n$ por x – 2 é 14, onde m e n são números reais. Se uma das raízes de p(x) é 1, então é **correto** afirmar que
(01) m + n = – 3
(02) $\sqrt{n} = 2$
(04) m – n = 5
(08) $m^n = 1$
(16) $\sqrt{m} = 1$

28) (UFMS-2000) - Com relação a polinômios com coeficientes reais, é correto afirmar que
(01) se 2 é raiz de um polinômio p(x) não divisível por x – 7, então o resto da divisão de p(x) pelo polinômio $x^2 – 9x + 14$ é o polinômio nulo.
(02) se $q(x) = (x-1)^3 (x^2 – 1)^2$, então o número 1 é raiz de multiplicidade 3 do polinômio q(x).
(04) se o resto da divisão do polinômio $x^n – 2x^3 – 4x^2 + 18$ por x – 3 é 9, então $n \leq 6$.
(08) se $d(x) = ax^2 + bx + c$ é um polinômio de grau 2 tal que a divisão do polinômio $2x^3 + 5x^2 + x – 4$ por d(x) tem como quociente 2x + 1 e resto x – 3, então d(1) = 2.

29) (UFPB-2002) Sabendo-se que *1*, *–1* e *2* são raízes de um polinômio *p(x)* do quarto grau e que *p(–2) = 48* e *p(3) = 8*, determine *p(x)*.

30) (UFPB-97) Seja $p(x) = x^2 + ax + b$ um polinômio. Determine os valores de a e b tais que p(x) seja divisível por $x + 2$ e que os restos da divisão de p(x) por $x - 1$ e por $x + 1$ sejam iguais.

31) (UFPE-2013) Determine o polinômio com coeficientes reais $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, tal que $p(x + 1) - p(x) = 6x^2$ e indique $a^2 + b^2 + c^2$.

32) (UFTM-2011) Dividindo-se o polinômio $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + mx + 1$ por $(x - 1)$ ou por $(x + 1)$, os restos são iguais. Nesse caso, o valor de m é igual a
(A) –2. (B) –1. (C) 1. (D) 2. (E) 3.

33) (FGV-2001) A equação polinomial $x^3 - 7x - 6 = 0$ tem uma raiz igual a -1. Encontre as outras raízes.

34) (FGV-2002) Se o polinômio $P(x) = x^3 - kx^2 + 6x - 1$ for divisível por $(x - 1)$, ele também será divisível
por:
a) $x^2 - 5x + 1$ b) $x^2 - 5x + 3$ c) $x^2 + 5x + 1$
d) $x^2 + 5x + 3$ e) $x^2 - 5x + 5$

35) (UFU-2010) Considere o polinômio de variável real $p(x) = (x - 1).(x^2 - 2).(x^3 - 4).(x^4 - 8).(x^5 - 16)...(x^{15} - 16384)$. Então, o grau de p e o valor de p(2) são, respectivamente:
A) 120 e 2^{112} B) 136 e 2^{112}
C) 136 e 2^{105} D) 120 e 2^{105}

36) (FGV-2004) O polinômio $P(x) = 3x^4 - 22x^3 + 64x^2 - 58x + 13$ é divisível por $\left(x - \frac{1}{3}\right)$. Encontre as raízes da equação $P(x) = 0$ no conjunto dos números complexos.

37) (PUC/PR-2003) Dado o polinômio $x^4 + x^3 - mx^2 - nx + 2$, determinar m e n para que o mesmo seja divisível por $x^2 - x - 2$. A soma m + n é igual a:
A) 6 B) 7 C) 10 D) 9 E) 8

38) (UFV-2010) Dividindo-se o polinômio $x^3 + 2x + 1$ por $x^2 + 2x + 1$, encontra-se como resto o binômio:
a) $3x - 2$ b) $3x + 3$ c) $5x - 2$ d) $5x + 3$

39) (Unifor-2002) A equação $x^3 + (a - 2)x^2 + (1 - 2a)x + a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, admite uma raiz dupla igual a 1 se, e somente se,
a) $a = -1$ b) $a < 0$ c) $a > -2$
d) $a \neq -1$ e) $-2 < a < 0$

40) (Unifor-2002) Se os números 3, – 3 e k são as raízes do polinômio $f = x^3 - m^2x^2 - (m^3 + 1)x + (m^5 + 4)$, em que m é uma constante real, então o resto da divisão de f por $x - 5$ é
a) 0 b) 8 c) 16 d) 24 e) 32

41) (UFV-2010) Considere o polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + kx^2 - 5x - 2$, onde a e k são constantes reais. Seja n o maior inteiro positivo tal que p(x) seja divisível por $(x + 1)^n$. Os valores de k e n são, respectivamente:
a) –3 e 2 b) –2 e 3 c) –2 e 2 d) –3 e 3 .

42) (UFS-2012) Para analisar se cada uma das afirmações abaixo é FALSA ou VERDADEIRA, considere:
i) p e q, polinômios cujos respectivos graus são 3 e 6;
ii) $= -2x^4 + (a + b)x^3 - 5x^2 + (a - 3)x - 3$ e $g = cx^4 - 2x^3 + (c - 3)x^2 + (b + 5)x - 3$, polinômios em que a, b e c são constantes reais.
0 0 - Se na divisão de um polinômio h por $4x^3 - 1$ são obtidos quociente $1 - 2x$ e resto $(x + 3).(2 - x)$, então $h = -8x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 5$.
1 1 - O grau do polinômio $p^3 + q$ é igual a 9.
2 2 - Se f e g são polinômios idênticos, então $a + b + c = 0$.
3 3 - Supondo $c = 1$, então, para que o polinômio g se torne divisível por $x + 3$, deve-se ter $b = 33$.
4 4 - Se $a = 4$ e o resto da divisão do polinômio f por $x - 2$ é igual a 3, então o quociente da divisão de f por $x^2 + 1$ é o polinômio $-2x^2 + 7x - 3$.

43) (UFMS-2002) Sabendo-se que o polinômio $p(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + mx + n$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^2 - 3x + 2$, é correto afirmar que
(001) $m + n = -4$.
(002) *2* é uma raiz de $p(x)$.
(004) o produto de todas as raízes de $p(x)$ é *8* .
(008) $p(a) \geq 0$, para todo número real a , $a > 1$.

(016) o quociente da divisão do polinômio $p(x)$ pelo polinômio $q(x)$ é o polinômio $x^2 - 4$.

44) (UFLA-2005) O polinômio $p(x) = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 4)x + 3$ possui 3 raízes reais, sendo duas delas 1 e -1. Calcule os valores de a e b e o valor da terceira raiz.

45) (UFJF-2002) Sabendo que os polinômios $q_1(x) = x^2 - 9$ e $q_2(x) = x^2 - 5x + 6$ dividem o polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde a, b, c e d são reais, é **incorreto** afirmar que:
a) o polinômio $q_1(x).q_2(x)$ divide $p(x)$.
b) 2, 3 e -3 são raízes de $p(x)$.
c) o polinômio $p(x)$ não possui raízes complexas.
d) se $d = 36$, então $a = 0$.
e) se d é irracional, então $p(x)$ possui uma raiz irracional.

46) (UFPB-79) Na divisão do polinômio F(x) pelo binômio do 1º grau f(x), utilizou-se a algoritmo de Ruffini e obteve-se

*	3	0	*	*	*	5
	*	-3	4	-5	5	*

Preenchendo-se os asteriscos indicados acima, verifica-se que F(x) e o resto da divisão são dados, respectivamente, por:
a) $F(x) = 3x^5 + x^3 - x^2 + 5$ $R(x) = 0$
b) $F(x) = 3x^5 - x^3 - x^2 + 5$ $R(x) = 0$
c) $F(x) = 3x^5 - x^3 - x^2 - 5$ $R(x) = 0$
d) $F(x) = 3x^5 - x^3 + x^2 + 5$ $R(x) = 0$
e) $F(x) = 3x^5 + x^3 + x^2 + 5$ $R(x) = 0$

47) (UFPB-91) Na divisão do polinômio p(x) pelo binômio $x - a$, com uso do dispositivo prático de Briot-Ruffini, encontrou-se:

*	2	0	*	2	-16
	*	6	3	11	*

Onde os asteriscos indicam números a calcular. Qual o valor do resto da divisão?

48) (UFPB-95) Qual é o grau do polinômio $p(x) = [(x^2 - 1)^3 . (x^3 - 1)^2]^6$?

49) (UFC-98) Seja $P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + ... + p_nx^n$ um polinômio de grau n cujos coeficientes $p_0, p_1, ..., p_n$ estão em Progressão Geométrica. Determine todos os valores de n para os quais o polinômio P(x) não possui raiz real.

50) (UFU-98) Seja $r(x) = 3x + 1$ o resto da divisão do polinômio $p(x)$ por $g(x) = x^2 - (a + b)x + ab$, onde a e b são constantes reais positivas e distintas e, sabendo que $p(a) + p(b) = 17$ e $ab = 6$, determine as raízes de g(x).

51) (PUC/RJ-98) Para que valores de a o polinômio $(x + a)^n - (x^n + a^n)$ admite a como raiz?

52) (PUC/RJ-99) Ache a soma dos coeficientes do polinômio $p(x) = (1 - 2x + 3x^2)^3$.

53) (CIABA-94) Se $P(x) = x^4 + ax^2 + b$ é divisível por $Q(x) = x^2 + 5x + 6$, então o valor de $a + b$ é:
a) -5 b) -23 c) -12 d) -30 e) -36

54) (CIABA-95) O polinômio $P(x) = x^4 - mx^3 + mx^2 + x - 1$ é divisível por $Q(x) = x^2 + x + 1$. O quociente da divisão é o polinômio:
a) $x^2 + x + 1$ b) $x^2 + 2x - 1$ c) $x^2 - 2x + 1$
d) $x^2 - x - 1$ e) $x^2 - 2x - 1$

55) (CIABA-96) Para que o polinômio $P(x) = ax^3 - bx^2 + 3x - 8$ seja divisível por $x^2 - 4$, devemos ter:
a) $a = -3/4$ e $b = -2$ b) $a = 3/4$ e $b = 2$
c) $a = 3$ e $b = 5$ d) $a = -3$ e $b = -5$
e) $a = -1/2$ e $b = 5/2$

56) (Ciaba-2007) Para que o valor de K o polinômio $P(x) = Kx^3 + x^2 - 5$ é divisível por $x + 1/3$?
a) -132 b) -100 c) 132/100 d) 100 e) 132

57) (EEAR-2006) Sejam os polinômios $A(x) = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x + 1)$ e $B(x) = x^2 - 2x + 1$. Se $A(x) \equiv B(x)$, então $a + b - c =$
a) 4. b) 3. c) 2. d) 1.

58) (AFA-95) O resto da divisão de $x^3 + px + q$ por $x^2 - x - 2$ é $2x - 1$. Então, o valor de $p^2 + q^2$ é:
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

59) (AFA-95) Se o polinômio: $P(x) = x^5 + 2x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \theta$ for divisível por: $D(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, então $\alpha + \beta + \theta$ será:
a) 6 b) 17 c) 28 d) 25

60) (AFA-2002) Se o polinômio $P(x) = x^m - 2b^n x^{m-n} + b^m$ é divisível por $x + b$, sendo $n < m$, $n \in \Re$, $m \in N^*$ e $b \neq 0$, então, ocorrerá necessariamente
a) m par e n ímpar. b) m ímpar e n par.
c) m ímpar e n ímpar. d) m par e n par.

61) (Escola Naval-89/90) $x^4 + rx^2 + s$ será divisível por $x^2 + 4x + 6$ só se r + s for igual a:
a) 10 b) 15 c) 16 d) 24 e) 32

62) (Escola Naval-90/91) O valor de m para o qual 1 é raiz dupla do polinômio $P(x) = x^{10} - mx^5 + m - 1$ é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

63) (Escola Naval-91/92) O resto da divisão de $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$ por $x^2 - 1$ é:
a) 0 b) x + 1 c) 50x + 50
d) 50x + 51 e) 51x + 50

64) (Escola Naval-92/93) Seja P(x) um polinômio do 2º grau, tal que P(-1) = 12, P(0) = 6 e x = 2 é raiz de P(x). O resto da divisão de P(x) por (x – 3) é:
a) –1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 6

65) (Escola Naval-93/94) $2x^4 - x^3 + mx^2 + 2n$ é divisível por $x^2 - x - 2$. O valor de $m.n$ é:
a) – 8 b) – 10 c) – 12 d) – 14 e) – 16

66) (Escola Naval-99/00) Dividindo-se $(2x^3 - x^2 + mx + 8)$, onde $m \in R$, por (x + 2) obtém-se resto igual a (– 6). Qual o polinômio que representa o quociente da divisão de $(4x^3 - 7x + 3)$ por (2x – m)?
(A) $-2x^2 + 3x + 1$ (B) $2x^2 + 2x - 1$
(C) $-x^2 + 2x - 1$ (D) $x^2 + 3x + 1$
(E) $2x^2 - 3x + 1$

67) (Escola Naval-05/06) Para que o resto da divisão do polinômio $P(x) = 8m^3x^4 + 12mx^3 + 1$ por $Q(x) = 4x + 2$ seja maior que zero, dever-se ter:
a) $-3 < m < -2$ b) $m > 1$ c) $m > -2$
d) $m < 1$ ou $m > 2$ e) $m < 2$

68) (UNESP-90) Sabe-se que a soma dos primeiros termos da sucessão $a_k = k(k + 1)$, k = 1, 2, ... é um polinômio em n de grau 3. Esse polinômio é:
a) $(n^3 - n)/3$ b) $(n^3 + 3n^2 + 2n)/3$
c) $(n^3 - 3n^2 + 2n)/3$ d) $3n^3 - n$
e) n^3

69) (FUVEST-81) O grau dos polinômios f, g e h é 3. O número natural n pode ser o grau do polinômio $f(g + h)$ se e somente se:
a) n = 6 b) n = 9 c) $0 \le n \le 6$
d) $3 \le n \le 9$ e) $3 \le n \le 6$

70) (FUVEST-85) Um polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ satisfaz as seguintes condições: P(1) = 0; P(– x) + P(x) = 0, qualquer que seja x real. Qual o valor de P(2)?
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

71) (Unifor-2003) Os polinômios p e q têm graus iguais a n. Se o grau do polinômio p.q é igual a 10, então o grau do polinômio p + q é
a) igual a 10. b) igual a 5.
c) no máximo igual a 5. d) no mínimo igual a 5.
e) um número compreendido entre 5 e 10.

72) (FUVEST-92) Sejam R_1 e R_2 os restos das divisões de um polinômio P(x) por x – 1 e x + 1, respectivamente. Nessas condições, se R(x) é o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 1$, então R(x) é igual a:
a) $R_1 - R_2$ b) $(R_1 + R_2)/R_1R_2$ c) $R_1 + R_2$
d) R_1R_2 e) $(R_1 + R_2)/2$

73) (FUVEST-92) Considere o polinômio não-nulo $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, onde a_0, a_1, a_2, ..., a_n estão em progressão geométrica de razão $q \neq 0$.
a) Calcule $P(1/q)$.
b) Mostre que, para n par, o polinômio P(x) não tem raiz real.

74) (FUVEST-96) Seja p(x) um polinômio divisível por x – 3. Dividindo p(x) por x – 1 obtemos quociente q(x) e resto r = 10. O resto da divisão de q(x) por x – 3 é:
a) – 5 b) – 3 c) 0 d) 3 e) 5

75) (FUVEST-98) P(x) é um polinômio de grau ≥ 2 e tal que P(1) = 2 e P(2) = 1. Sejam D(x) = (x – 2)(x – 1) e Q(x) o quociente da divisão de P(x) por D(x).
a) Determine o resto da divisão de P(x) por D(x);
b) Sabendo que termo independente de P(x) é igual a 8, determine o termo independente de Q(x).

76) (FUVEST-99) Dividindo-se o polinômio p(x) por $2x^2 - 3x + 1$, obtém-se quociente $3x^2 + 1$ e resto – x + 2. Nessas condições, o resto da divisão de p(x) por x – 1 é:
a) 2 b) 1 c) 0 d) – 1 e) – 2

77) (UNICAMP-94) Determine o quociente e o resto da divisão de $x^{100} + x + 1$ por $x^2 - 1$.

78) (ITA) Um polinômio P(x) dividido por $x^2 + x + 1$ dá resto $-x + 1$ e dividido por $x^2 - x + 1$ dá resto $3x + 5$. Qual o resto da divisão de P(x) por $x^4 + x^2 + 1$?

79) (ITA) Se P(x) é um polinômio do 5° grau que satisfaz as condições $1 = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$ e $P(6) = 0$, ache P(0).

80) (ITA-61) Qual a condição necessária e suficiente que devem satisfazer p e q de modo que $P(x) = x^p + 2a^q x^{p-q} + a^p$ seja divisível por $x + a$ ($p, q \in N$ e $p > q$).

81) (ITA-62) Se $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + ax + b$ e $x^2 + rx + s$, demonstrar que $b = -r(a + r)$.

82) (ITA-67) Um polinômio P(x), dividido por $x - 1$ dá resto 3. O quociente desta divisão é então lividido por $x - 2$, obtendo-se resto 2. O resto da livisão de P(x) por $(x - 1)(x - 2)$ será:
a) $3x + 2$ b) $3x - 1$ c) $2x + 1$
d) $-x + 4$ e) nda

83) (ITA-67) Um polinômio P(x) dividido por $x + 1$ dá resto -1, por $x - 1$ dá resto 1 e por $x + 2$ dá resto 1. Qual o resto da divisão do polinômio por $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$?
a) $x^2 - x + 1$ b) $x - 1$ c) $x^2 + x + 1$
d) $x^2 - x - 1$ e) nda

84) (ITA-67) Um polinômio P(x) tem a propriedade $P(x) = P(-x - 1)$. Definindo um novo polinômio $Q(x) = P(f(x))$, obteremos $Q(x) = Q(-x)$ quando f(x) for igual a:
a) $x - 1/2$ b) $x + 1/2$ c) $-x - 1$
d) $x - 1$ e) $-x + 1$

85) (ITA-68) Dizemos que os polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente independentes (L.I.) se a relação $a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) = 0$ implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, onde a_1, a_2, a_3 são números reais. Caso contrário, dizemos que $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente dependentes (L.D.). Os polinômios $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$ e $p_3(x) = x^2 + 2x + 2$ são:
a) L.I.
b) nem L.I. nem L.D.
c) L.I. se $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ tiverem raízes reais
d) L.D.
e) nda

86) (ITA-68) Suponhamos que os polinômios P(x), Q(x), p(x) e q(x) satisfazem as seguintes condições:
$P(x).p(x) + Q(x).q(x) = 1$ para todo x complexo
$P(p(1)) = 0$, $Q(0) = 0$
Assinale a opção correta:
a) P(x) é divisível por $S(x) = x$
b) P(x) e Q(x) não são primos entre si
c) $Q(p(1)) = 0$
d) p(x) não é divisível por $R(x) = x - 1$
e) $p(0) = 0$

87) (ITA-69) Os coeficientes A, B, C e D do polinômio $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ devem satisfazer certas relações para que P(x) seja um cubo perfeito. Assinale a opção correta para que isto se verifique:
a) $D = C^2A/3B$
b) $C = B/3A^3$ e $D = B^2/27A^3$
c) $BC = 3A$ e $CD^2 = B^2A^2$
d) $C = B^2/3A$ e $D = B^3/27A^2$
e) nda

88) (ITA-70) Um polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é tal que $P(-2) = -2$, $P(-1) = 3$, $P(1) = -3$ e $P(2) = 2$. Temos, então, que:
a) $b = 0$ b) $b = 1$ c) $b = 2$ d) $b = 3$ e) nda

89) (ITA-71) Dividindo o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ pelo polinômio Q(x) obtemos o quociente $S(x) = 1 + x$ e o resto $R(x) = x + 1$. O polinômio Q(x) satisfaz:
a) $Q(2) = 0$ b) $Q(3) = 0$ c) $Q(0) \neq 0$
d) $Q(1) \neq 0$ e) N.d.r.a.

90) (ITA-71) Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{100}x^{100}$, onde $a_{100} = 1$, um polinômio divisível por $(x + 9)^{100}$. Nestas condições temos:
a) $a_2 = 50.99.9^{98}$ b) $a_2 = \frac{100!}{2!98!}$
c) $a_2 = \frac{99!}{2!98!}$ d) $a_2 = \frac{100!9^2}{2!98!}$ e) nda

91) (ITA-71) Qual o resto da divisão por $x - a$, do polinômio

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

a) $2x^3 + c$ b) $6x^2 + 7$ c) 5 d) 0 e) nda

92) (ITA-72) Seja a equação P(x) = 0, onde P(x) é um polinômio de grau m. Se P(x) admite uma raiz inteira, então P(– 1).P(0).P(1) necessariamente:
a) vale 5 d) é divisível por 3
b) vale 3 e) nenhuma das respostas anteriores.
c) é divisível por 5

93) (ITA-77)
$\frac{6-5x}{x^3-5x^2+6x} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$ onde A, B e C são raízes a, b e c são raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, então:
a) A = - 2; B = - 1; C = 0
b) A = 2; B = 4; C = 1
c) A = 1, B = - 3; C = 2
d) A = 5; B = 2; C = 1
e) n.d.a.

94) (ITA-82) Sabendo-se que o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + 2x - 2$ é divisível por (x + 1) e por (x – 2), podemos afirmar que
a) a e b tem sinais opostos e são inteiros
b) a e b tem o mesmo sinal e são inteiros
c) a e b tem sinais opostos e são racionais não inteiros
d) a e b tem o mesmo sinal e são racionais não inteiros
e) somente a é inteiro

95) (ITA-82) Os valores de α, β e γ que tornam o polinômio $P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ divisível por $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ satisfazem as desigualdades
a) $\alpha > \beta > \gamma$ b) $\alpha > \gamma > \beta$ c) $\beta > \alpha > \gamma$
d) $\beta > \gamma > \alpha$ e) $\gamma > \alpha > \beta$

96) (ITA-83) Determine o polinômio P de 3º grau que representa uma raiz nula e satisfaz a condição $P(x - 1) = P(x) + (2x)^2$ para todo x real. Com o auxílio deste, podemos calcular a soma $2^2 + 4^2 + \ldots + (2n)^2$, onde n é um número natural, que é igual a:
a) $\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 - \frac{2}{3}n$ d) $4n^3 + 2n^2 + n$
b) $\frac{4}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n$ e) $n^3 + n^2 + 2n$
c) $\frac{4}{3}n^3 - 2n^2 + \frac{2}{3}n$

97) (ITA-87) Considere Q(x) e R(x), respectivamente, o quociente e o resto da divisão de um polinômio A(x) pelo trinômio $B(x) = -x^2 + 5x - 6$. Admita que o grau de A(x) é quatro e que os restos da divisão de A(x) por x + 1 e x – 2 são, respectivamente, 3 e – 1. Supondo também que Q(x) é divisível por x + 1, obtenha R(x).

98) (ITA-88) Se P(x) e Q(x) são polinômios com coeficientes reais, de graus 2 e 4 respectivamente, tais que $P(i) = 0$ e $Q(i) = 0$ então podemos afirmar que:
a) P(x) é divisível por x + 1.
b) P(x) é divisível por x – 1.
c) P(x).Q(x) é divisível por $x^4 + 2x^2 + 1$.
d) P(x) e Q(x) são primos entre si.
e) Q(x) não é divisível por P(x).

99) (ITA-88) Sejam A(x) e B(x) polinômios de grau maior que um e admita que existam polinômios C(x) e D(x) tais que a igualdade a seguir se verifica: $A(x).C(x) + B(x).D(x) = 1$, $\forall x \in \Re$. Prove que A(x) não é divisível por B(x).

100) (ITA-2002) A divisão de um polinômio f(x) por (x – 1)(x – 2) tem resto x + 1. Se os restos das divisões de f(x) por x – 1 e x – 2 são, respectivamente, os números a e b, então $a^2 + b^2$ vale
a) 13 b) 5 c) 2 d) 1 e) 0

101) (IME) O polinômio P(x) dividido por x + 2 dá resto 1, por x + 1 dá resto –1 e por x – 1 dá resto 1. Qual o resto da divisão de P(x) por $(x + 2)(x^2 - 1)$

102) (IME) Determinar um polinômio inteiro em x, P(x), verificando a identidade: P(x + 2) – 2P(x + 1) + P(x) = x

103) (IME) O polinômio P(x), do 3º grau, é tal que $P(n) = n^3$, para n = 1, 2, 7 e 200. Calcule P(– 1).

104) (IME-65) Determine m de modo que o polinômio $x^4 - 5x^2 + 4x + m$ seja divisível por 2x + 1.

105) (IME-66) Determine $P_1(x)$ e $P_2(x)$ na expressão abaixo, sabendo que $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ são binômios:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

106) (IME-67) Calcule m e n de modo que $x^4 + x^3 + mx^2 - nx - 2$ seja divisível por $x^2 - x - 2$.

107) (IME-75) Dado o polinômio $2x^4 + x^3 + px^2 - qx + 2$, determine p e q de modo que seja divisível por $(x - 1)^2$

108) (IME-80) Determine o polinômio p(x) de coeficientes racionais e do 7° grau, sabendo que $p(x) + 1$ é divisível por $(x - 1)^4$ e que $p(x) - 1$ é divisível por $(x + 1)^4$.

109) (IME-84) Determine o polinômio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $P(x) = P(1 - x)$, $P(0) = 0$ e $P(-1) = P(6)$

110) (IME-87) Seja p(x) um polinômio de grau 16 e coeficientes inteiros.
a) Sabendo-se que p(x) assume valores ímpares para $x = 0$ e $x = 1$, mostre que p(x) não possui raízes inteiras.
b) Sabendo-se que $p(x) = 7$ para quatro valores de x, inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de x, p(x) assume o valor 14?

111) (IME-99) Seja o polinômio P(x) de grau (2n + 1) com todos os seus coeficientes positivos e unitários. Dividindo-se P(x) por D(x), de grau 3, obtém-se o resto R(x). Determine R(x), sabendo-se que as raízes de D(x) são raízes de $A(x) = x^4 - 1$ e que $D(1) \neq 0$.

112) (IME-2002) (a) Encontre as condições a que devem satisfazer os coeficientes de um polinômio P(x) de quarto grau para que $P(x) = P(1 - x)$.
(b) Considere o polinômio $P(x) = 16x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 77$. Determine todas as suas raízes sabendo-se que o mesmo satisfaz à condição do item acima.

113) (ITA-03) Sejam a, b, c e d constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a -5, determine o valor de $a + b + c + d$.

Exercícios - Nível 1

1) Demonstrar que a condição para que $ax^2 + bx + c$ seja um polinômio quadrado perfeito é $b^2 = 4ac$.

2) Determinar a condição para que o polinômio $p(x) = (ax + b)^2 + (cx + b)^2$, onde a, b, c, d são reais e não nulos, seja um quadrado perfeito.

3) P e Q são polinômios reais em x, respectivamente de graus m e n com $0 < n < m$. O grau de $(P - Q)(P + Q)$ vale:

4) Determinar o polinômio p(x) do segundo grau que, dividido por x, $x - 1$ e $x - 2$, apresenta restos 4, 9 e 18, respectivamente.

5) Provar que $5x^6 - 6x^5 + 1$ é divisível por $(x - 1)^2$ e determinar o quociente.

6) Provar que $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ é divisível por $x^2 - 3x + 2$.

7) Na divisão do polinômio $7x^6 + ... + 8x - 12$ por $x + 2$ encontrou-se o quociente $7x^5 + ... + 4$. Qual o resto dessa divisão?

8) As raízes da equação $x^2 + 4x - 5 = 0$ são também raízes da equação $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5 = 0$. Qual é a terceira raiz da segunda equação?

9) Um polinômio p(x), dividido por $x + 2$ e $x^2 + 4$ dá restos 0 e $x + 1$, respectivamente. Qual é o resto da divisão de p(x) por $(x + 2)(x^2 + 4)$?

10) Determine o resto e o quociente de $P(x) = x^n - a^n$ por $x - a$.

11) Determine o resto e o quociente de $P(x) = x^n + a^n$ por $x - a$.

12) Determine o resto e o quociente de $P(x) = x^n - a^n$ por $x + a$.

13) Determine o resto e o quociente de $P(x) = x^n + a^n$ por $x + a$.

14) O polinômio $P(x) = x^{2n} - a^{2n}$ é divisível por $x^2 - a^2$ para quais valores de n?

15) Qual o resto da divisão de $x^{100} + 2x^{99} + 2x + 5$ por $x^2 + x - 2$.

16) Se $\frac{6-5x}{x^3-5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$, calcule A, B e C.

17) Mostrar, sem efetuar a divisão, que o polinômio $x^{n+1} - (n+1)x + n$ é divisível por $(x-1)^2$ e formar o quociente.

18) Determinar $p \in \Re$ e $q \in \Re$ de modo que $x^4 + 1$ seja divisível por $x^2 + px + q$.

19) Qual deve ser o valor do coeficiente c para que os restos das divisões de $x^{10} + ax^4 + bx^2 + cx + d$ por $x + 12$ e $x - 12$ sejam iguais?

20) Determinar a e b de modo que o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ apresente as seguintes propriedades: $p(x) + 1$ é divisível por $x + 1$ e $p(x) - 1$ é divisível por $x - 1$.

21) Sobre quais condições o polinômio $x^3 + px + q$ é divisível por um polinômio da forma $x^2 + mx - 1$?

22) Sobre quais condições o polinômio $x^4 + px^2 + q$ é divisível por um polinômio da forma $x^2 + mx + 1$?

23) Determine o coeficiente a tal que o polinômio $x^5 - ax^2 - ax + 1$ tenha -1 como uma raiz de multiplicidade não menor do que 2.

24) Determine A e B tal que o polinômio $Ax^4 + Bx^3 + 1$ seja divisível por $(x-1)^2$.

25) Determine todos os polinômios $p(x) = ax^2 + bx + c$ tais que $p(a) = a$, $p(b) = b$ e $p(c) = c$ ($a \neq b \neq c$).

26) Sejam P e Q dois polinômios satisfazendo a equação $P(x)/Q(x) = (2x-1)/(x+2)$. Defini-se o polinômio R(x) por $R(x) = P(x)^2 + Q(x)^2$. Prove que R(x) é divisível por $x^2 + 1$.

27) O polinômio $P(x) = (x-a)^3 + b$ é zero para $x = 1$, e quando dividido por x, o resto é -7. Determine todos os valores possíveis para a e b.

28) Determine o quociente quando $2x^{n+2} - (n+2)x^2 + n$ é dividido por $(x-1)^2$.

Exercícios - Nível 2

1) Sabendo que os restos da divisão de P(x) por $(x-a)$ é r_1 e de P(x) por $(x-b)$ é r_2 ($a \neq b$), demonstre que o resto da divisão de P(x) por $(x-a)(x-b)$ é dado por $r(x) = \frac{r_1 - r_2}{a-b}x + \frac{ar_2 - br_1}{a-b}$

2) Um certo polinômio p(x) quando dividido por $x - a$, $x - b$ e $x - c$ deixa resto a, b, c, respectivamente. Qual é o resto da divisão de p(x) por $(x-a).(x-b).(x-c)$?
(NOTA: os números a, b e c são distintos).

3) Se p(x) é um polinômio de grau n tal que $p(k) = 2^k$ para k = 0, 1, 2, ... n, determine p(n + 1).

4) Para que valores de a e n o polinômio $x^n - ax^{n-1} + ax - 1$ é divisível por $(x-1)^2$

5) Determine A e B tal que o polinômio $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ seja divisível por $(x-1)^2$.

6) Prove que todas as raízes da equação $x^2 + x + 1$ satisfazem a equação $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2} = 0$ onde m, n e p são números inteiros arbitrários.

7) Prove que se $P(x^n)$ é divisível por $x - 1$, então também é divisível por $x^n - 1$.

8) Prove que se $P(x) = p_1(x^3) + xp_2(x^3)$ é divisível por $x^2 + x + 1$, então $p_1(x)$ e $p_2(x)$ são divisíveis por $x - 1$.

9) Prove que
$$P(x) = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \ldots + (-1)^n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$
também pode ser expresso da forma
$$P(x) = \frac{(-1)^n}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

10) Prove que se o polinômio P(x) com coeficientes inteiros admite o valor 1 para mais do que três valores inteiros distintos de x, então P(x) não pode assumir o valor -1 para valores inteiros de x.

11) a) Determine os polinômios P de terceiro grau tais que, para todo número real x, se tenha $P(x) - P(x-1) = x^2$.
b) Usando o resultado da parte a, calcule, em função de n: $S = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

12) Dado $p(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ um polinômio tal que: p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3, p(4) = 4, p(5) = 5 e p(6) = 6. Quanto vale p(7)?

13) Dado $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x + a_n$, $n \in N$, um polinômio tal que: p(1) = 2, p(2) = 6, p(3) = 12, p(4) = 20, p(5) = 30, p(6) = 42, p(7) = 56, p(8) = 72. Calcule p(9).

14) Dado $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $n \in N$, um polinômio tal que:
$p(1) = 1, p(2) = 2^n, p(3) = 3^n, p(4) = 4^n, \ldots, p(n-1) = (n-1)^n, p(n) = n^n$. Calcule p(n + 1).

15) Seja $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Encontrar o resto da divisão de $p(x^5)$ por p(x).

16) Determine o polinômio p(x) de coeficientes racionais e do 5º grau, sabendo que p(x) + 1 é divisível por $(x-1)^3$ e que p(x) − 1 é divisível por $(x+1)^3$.

17) Para quais valores inteiros de a, $x^2 - x + a$ divide $x^{13} - x + 90$?

18) Demonstrar que o resultado da seguinte expressão não possui termos de ordem ímpar:
$(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} + x^{100})$

19) Para quais valores de n o polinômio $x^n + x - 1$ é divisível por:
a) $x^2 - x + 1$?
b) $x^3 - x + 1$?

20) Determine todos os polinômios não constantes P(x) que satisfazem $16P(x^2) = P(2x)^2$.

21) Se P(x), Q(x), R(x) e S(x) são todos polinômios tais que $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$, prove que P(x), Q(x) e R(x) são divisíveis por x − 1.

22) Qual o resto da divisão de $x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ por $x^3 - x$?

23) Se P(x) denota um polinômio de grau n tal que P(k) = k/(k + 1) para k = 0, 1, 2, ..., n, calcule o valor de P(n + 1).

24) Determine todos os valores de n e r, onde n é um inteiro positivo e r é real, para o qual o polinômio $P(x) = (x+1)^n - r$ é divisível por $2x^2 + 2x + 1$.

25) Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \ldots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1$.

26) Determine todos os polinômios p(x) satisfazendo a equação $(x - 16)p(2x) = 16(x - 1)p(x)$ para todo x.

27) Dado que $f(x) = (x^5 - 1)(x^3 + 1)$, $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$, e h(x) é um polinômio tal que f(x) = g(x)h(x), qual o valor de h(1)?

28) Quando expandido, o produto $(x + 2)(x + 3)(x + 4)\ldots(x + 9)(x + 10)$ pode ser escrito como $a_8x^8 + a_8x^8 + \ldots + a_1x + a_0$. O valor de $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ é:

29) Seja $p(x) = x^4 + x^3 - 1$, e $q(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 1$. Prove que se p(x) = 0 então $q(x^2) = 0$.

30) Sejam a, b, e três inteiros distintos, e P um polinômio possuindo todos os coeficientes inteiros. Mostre que é impossível que P(a) = b, P(b) = c e P(c) = a.

31) Seja p(x) um polinômio com coeficientes inteiros. Assuma que existem inteiros a e b tais que $p(a) = 41$ e $p(b) = 49$. Prove que existe um inteiro c tal que 2009 divide $p(c)$.

32) Determinar todos os polinômios com coeficientes reais p(x) tais que $(x - 1)^2p(x) = (x - 3)^2p(x + 2)$ para todo x real.

33) Determine o resto da divisão de $x^{1989} - 1$ por $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$.

34) Seja $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$. Prove que existem dois polinômios Q(y) e R(y) com coeficientes maior ou igual a 1, com coeficientes inteiros, tal que para todo y tem-se $Q(y).R(y) = P(5y^2)$.

Equações Algébricas

3.1. DEFINIÇÕES:

3.1.1. Equação polinomial, ou algébrica, de grau n: É toda sentença da forma $P(x) = 0$, onde $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ é um polinômio de grau n. Temos que, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são números complexos chamados coeficientes; $x \in C$; $n \in N$.

Exemplo:
A equação polinomial, ou equação algébrica, associada ao polinômio $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 9x + 1$ é exatamente $4x^3 - 7x^2 + 9x + 1 = 0$. Dizemos que $4x^3 - 7x^2 + 9x + 1 = 0$ é uma equação algébrica, na variável x, de grau 3.

3.1.2. Raiz: Denomina-se raiz ou zero da equação algébrica $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ o valor de x que a torna verdadeira. Assim, r é raiz de $P(x) = 0$ se e somente se $P(r) = 0$.

Exemplo:
O número complexo 1 é raiz da equação polinomial $7x^5 - 8x^4 + 2x^2 - 3 = 0$, uma vez que $7.1^5 - 8.1^4 + 2.1^2 - 3 = 7 - 8 + 2 - 3 = 0$. Por outro lado o número complexo 2 não é raiz da equação proposta uma vez que $7.2^5 - 8.2^4 + 2.2^2 - 3 \neq 0$.

3.1.3. Conjunto Solução: É o conjunto formado por todas as raízes da equação algébrica. Resolver uma equação algébrica significa determinar seu conjunto solução.

Exemplo:
Observe a equação algébrica, de terceiro grau, $x^3 - 5x^2 + x = 0$. Ela pode ser fatorada da seguinte maneira: $x^3 - 5x^2 + x = x(x - 2)(x - 3)$. Claramente $x^3 - 5x^2 + x$ vale zero se e somente se cada um dos fatores de primeiro grau que compõe a sua fatoração forem iguais a zero. Logo, o conjunto solução da equação polinomial $x^3 - 5x^2 + x = 0$ é $S = \{0, 2, 3\}$.
Neste caso – uma equação de 3º grau com uma raiz sendo igual a zero – a fatoração foi simples. Na seqüência deste capítulo você verá uma análise mais completa da fatoração de polinômios em fatores do primeiro grau.

3.1.4. Equações Algébricas Equivalentes: Duas equações algébricas $p(x) = 0$ e $q(x) = 0$ são equivalentes se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios equivalentes, ou seja, se existe $k \in C$, $k \neq 0$, tal que $p(x) = k.q(x)$. Do mesmo modo que dois polinômios equivalentes possuem as mesmas raízes, pode-se afirmar que duas equações equivalentes possuem as mesmas raízes.

Exemplo:
As equações algébricas $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 1 = 0$ e $3x^4 - 15x^3 + 18x^2 - 6x + 3 = 0$ são equivalentes pois $3x^4 - 15x^3 + 18x^2 - 6x + 3 = 3(x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 1)$. Desta maneira, pode-se afirmar que as equações $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 1 = 0$ e $3x^4 - 15x^3 + 18x^2 - 6x + 3 = 0$ possuem as mesmas raízes.

3.1.5. Operações em Equações Algébricas: Duas operações elementares não alteram o conjunto solução de uma equação algébrica:
1) Multiplicar os dois lados de equação por um mesmo número complexo não-nulo:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow k.p(x) = 0,\ k \neq 0$$

2) Somar aos dois lados da equação o mesmo número complexo:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) + k = k$$

3.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA:

"Toda equação algébrica $P(x) = 0$, de grau n ($n \geq 1$), tem pelo menos uma raiz complexa"

Todas as demonstrações deste teorema, quer sejam envolvendo análise, topologia ou álgebra, utilizam elementos que fogem da abrangência do Ensino Médio, que é o foco deste livro. Aos curiosos, aconselhamos a procurar um livro de Ensino Superior sobre Álgebra.

3.3. TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO:

Todo polinômio $P(x)$ de grau n ($n \geq 1$) $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ ($a_n \neq 0$) pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, ou seja, $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$.

Demonstração:

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ possui uma raiz complexa r_1. Pelo Teorema de D'Alembert $P(x)$ é divisível por $x - r_1$, ou seja, existe o polinômio $Q_1(x)$ tal que $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$. Novamente pelo Teorema Fundamental da Álgebra o polinômio $Q_1(x)$ possui uma raiz complexa r_2. Analogamente ao caso anterior concluímos que existe um polinômio $Q_2(x)$ tal que $Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x)$, ou seja, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$. Como o grau de $P(x)$ é igual a n, então este procedimento segue até que sejam encontrados n termos de primeiro grau na fatoração de $P(x)$. A última aplicação ocorre com $Q_{n-1}(x) = (x - r_n)Q_n(x)$, onde $Q_n(x)$ é um polinômio constante não nulo. Designemos $Q_n(x)$ de k, $k \in C$. Assim, podemos escrever que $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = k(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$, onde k é uma constante. Igualando os coeficientes de x^n em $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ e em $k(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$ concluímos que $k = a_n$.

3.3.1. Teorema: Desconsiderando a ordem dos fatores, a decomposição de um polinômio de grau $n \geq 1$ como produto de fatores de 1º grau é única.

Demonstração:

Suponhamos que um polinômio de grau $n \geq 1$ possua duas fatorações distintas como produto de fatores do primeiro grau. Assim, existem complexos $a_n, r_1, r_2, \ldots, r_n, b_n, s_1, s_2, \ldots, s_n$ tais que $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$ e que $P(x) = b_n(x - s_1)(x - s_2)\ldots(x - s_n)$. Igualando os coeficientes de x^n das duas fatorações obtemos que $a_n = b_n$. Na 1ª fatoração, $P(r_1) = 0$. Na 2ª fatoração, $P(r_1) = b_n(r_1 - s_1)(r_1 - s_2)\ldots(r_1 - s_n)$. Para que esta expressão seja igual a zero algum dos termos $r_1 - s_1, r_1 - s_2, \ldots$ e $r_1 - s_n$ deve ser igual a zero, ou seja, algum s_i, $1 \leq i \leq n$, deve ser igual a r_1. Analogamente, $(r_2 - s_1)(r_2 - s_2)\ldots(r_2 - s_n) = 0$, ou seja, algum s_i deve ser igual a r_2. Seguindo este raciocínio, chegaremos à conclusão o conjunto $s_1, s_2, \ldots, s_n$ é apenas uma permutação de $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Em outras palavras, os conjuntos $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ e $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ são iguais. Desta forma, provamos que a menos da ordem, a decomposição de um polinômio de grau $n \geq 1$ como produto de fatores de 1º grau é única.

3.3.2. Corolário: "Toda equação polinomial de grau n ($n \geq 1$) admite n, e somente n, raízes complexas".

Demonstração:

Pelo Teorema da Decomposição todo polinômio $P(x)$ de grau maior ou igual a um pode ser fatorado como $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)$. Nesta expressão, podemos observar que $P(r_1) = P(r_2) = \ldots = P(r_n) = 0$, ou seja, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são raízes de $P(x)$. Conclui-se também que somente para estes valores temos $P(x)$ valendo zero, uma vez que a fatoração é única. Portanto, todo polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas.

Exemplos:

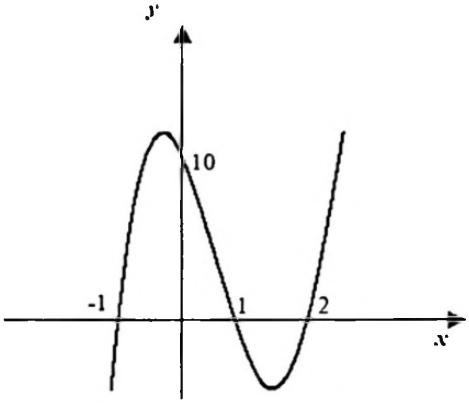
1) (PUC/RS-2004) Dividindo o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ por $(x - m)$, $(x - r)$ ou $(x - s)$ com m, r, s todos distintos, obtemos sempre resto zero. É correto afirmar que n é

A) maior que 3. B) maior ou igual a 3. C) igual a 2.
D) igual a 1. E) igual a zero.

Solução:

Pelo Teorema de D'Alembert temos que $p(m) = p(r) = p(s) = 0$, ou seja, r, s e t são raízes de p(x). Como o número de raízes de um polinômio é igual ao seu grau, concluímos que p(x) possui grau maior ou igual a 3, alternativa B.

2) (UFMS-2002) A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde a, b, c e d são constantes reais, tem seu gráfico representado abaixo. Determine o valor de $a - b - c + d$.



Solução:
Pelo gráfico, depreende-se que as raízes de f(x) são – 1, 1 e 2, ou seja, a fatoração de f(x) como produto de termos do 1º grau é $f(x) = k(x + 1)(x - 1)(x - 2)$.
Pelo gráfico também tiramos que $f(0) = 10 \Rightarrow 10 = k(0 + 1)(0 - 1)(0 - 2) \Rightarrow k = 5$.
Assim, $f(x) = 5(x + 1)(x - 1)(x - 2) \Rightarrow f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 5x + 10$
Desta forma concluímos que $a = 5, b = -10, c = -5, d = 10 \Rightarrow a - b - c + d = 5 + 10 + 5 + 10 = 30$.

3) (Mackenzie-2002) Se as equações $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ e $x^2 + x - 2 = 0$ têm o mesmo conjunto solução, então o produto m.n.p vale:
a) –1 b) 1 c) 0 d) 2 e) – 2
Solução:
Observe que: $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 1 \Rightarrow$ conjunto solução = $\{1, -2\}$
Desta forma, existem duas alternativas para a fatoração de $x^3 + mx^2 + nx + p$:
i) $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + 2)(x + 2)(x - 1) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow m = 3, n = 0$ e $p = -4$
ii) $x^3 + mx^2 + nx + p = (x + 2)(x - 1)(x - 1) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow m = 0, n = -2$ e $p = 2$
Em ambos os casos temos m.n.p = 0.

4) (PUC/PR-2004) Sejam a, b e c três números reais não nulos. O polinômio $p(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$ pode ser fatorado como $(x - a)(x - b)(x - c)$. O valor de p(2) será:
A) – 3 B) 0 C) 4 D) 7 E) 9
Solução:
$p(x) = x^3 - ax^2 + bx - c = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$
Pela igualdade entre polinômios podemos escrever que:
i) $a = a + b + c \Rightarrow b + c = 0$
ii) $c = abc \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow ac = -1$
iii) $b = ab + ac + bc = 1 - 1 + bc \Rightarrow b = bc \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a = -1$ e $b = -1$.
Assim, $p(x) = (x + 1)^2(x - 1) \Rightarrow p(2) = 9$

5) (UFU-2000) Se q(x) é um polinômio do terceiro grau com $q(2) = q(3) = q(4) = 2$ e $q(5) = 0$, então o valor de q(0) é igual a
a) – 8 b) – 10 b) 8 d) 10

Solução:

Se $\partial(q) = 3$, então podemos escrever que: $q(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_3 \neq 0$.

Seja $p(x)$ um polinômio tal que $p(x) = q(x) - 2$. Assim, $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + (a_0 - 2)$, ou seja, $\partial(p) = 3$, fazendo com que $p(x)$ possua três raízes complexas.

Por outro lado, $p(2) = q(2) - 2 = 0$, $p(3) = q(3) - 3 = 0$ e $p(4) = q(4) - 4 = 0$. Assim, 2, 3 e 4 são as três raízes de $p(x)$. Desta forma, podemos escrever que $p(x) = a_3(x - 2)(x - 3)(x - 4)$.

Como $q(x) = p(x) + 2$ então $q(x) = a_3(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 2$

Logo, $q(5) = 0 \Leftrightarrow a_3(5 - 2)(5 - 3)(5 - 4) + 2 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3}$.

Portanto, $q(x) = -\frac{1}{3}(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 2 \Rightarrow q(0) = -\frac{1}{3}(0 - 2)(0 - 3)(0 - 4) + 2 \Rightarrow q(0) = 10$

6) (IME-95) Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + ... + x^{111} + 1$ é divisível por $q(x) = x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1$

Solução:

Desde que $\partial(q) = 9$ então $q(x)$ possui 9 raízes complexas. Sejam $x_1, x_2, ..., x_9$ estas raízes. Observe agora que para todo $x \neq 1$ temos que:

$x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + ... + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x^{10} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^{10} = 1$

Assim, concluímos que as nove raízes $x_1, x_2, ..., x_9$ de $q(x)$ satisfazem $x_i^{10} = 1$, $1 \leq i \leq 9$.

Calculando $P(x_1)$:

$P(x_1) = (x_1)^{999} + (x_1)^{888} + (x_1)^{777} + ... + (x_1)^{111} + 1 \Rightarrow$

$P(x_1) = (x_1^{10})^{99}(x_1^9) + (x_1^{10})^{88}(x_1^8) + (x_1^{10})^{77}(x_1^7) + ... + (x_1^{10})^{11}(x_1) + 1 \Rightarrow$

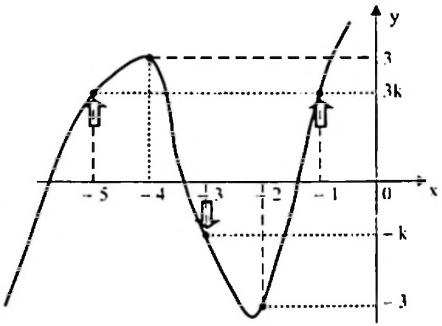
$P(x_1) = x_1^9 + x_1^8 + x_1^7 + ... + x_1 + 1 = q(x_1) = 0$

Analogamente, pode-se demonstrar que $P(x_2) = 0$, $P(x_3) = 0$, ..., $P(x_9) = 0$, ou seja, as nove raízes de $q(x)$ também são raízes de $P(x)$, fazendo com que $P(x)$ seja divisível por $q(x)$.

7) (IME-76/77) Seja $P_3(x) = (x + 1)(x + 3)(x + 5) + k(x + 2)(x + 4)$, onde $x \in C$. Determine o lugar geométrico das raízes de $P_3(x)$ quando k assume os valores em $\Re$.

Solução:

Inicialmente observamos que para $k = 0$ as raízes de $P_3(x)$ são -1, -3 e -5. Sabe-se também que $P(-2) = -3$, $P(-4) = 3$, $P(-1) = 3k$, $P(-3) = -k$ e $P(-5) = 3k$. Plotando estes valores no eixo cartesiano obtemos a figura ao lado. Lembrando que todo polinômio é uma função contínua, a única maneira de o gráfico de $P_3(x)$ passar por todos os pontos destacados é da forma indicada na figura. As setas indicam a tendência de deslocamento de alguns pontos devido ao aumento do valor de k. Desta forma, analisando o que ocorre com o gráfico quando fazemos k variar desde 0 até o infinito, concluímos que há uma raiz no intervalo $(-\infty, 5]$, outra no intervalo $(-4, -3]$ e a terceira raiz está no intervalo $(-2, -1]$.



3.4. MULTIPLICIDADE:

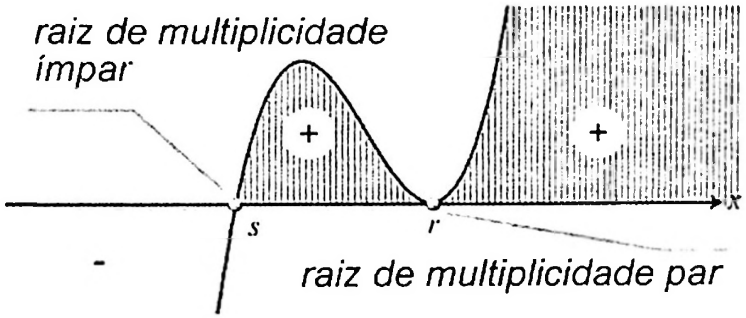
Dizemos que r é raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$) da equação $P(x) = 0$ se, e somente se, $P(x) = (x - r)^m Q(x)$ e $Q(r) \neq 0$. Em outras palavras, r é raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - r)^m$ e não é divisível por $(x - r)^{m+1}$. Quando $m = 1$, dizemos que r é raiz simples; quando $m = 2$, dizemos que r é raiz dupla; quando $m = 3$, dizemos que r é raiz tripla, e assim por diante.

Por exemplo, a equação $x^8 - 11x^7 + 28x^6 + 54x^5 - 255x^4 + 105x^3 + 450x^2 - 580x + 200 = 0$ possui a seguinte forma fatorada: $(x - 1)^3(x + 2)^2(x - 5)^2(x - 2) = 0$. Assim, nesta equação, 1 é raiz tripla, -2 é raiz dupla, 5 é raiz dupla e 2 é raiz simples.

3.4.1. Análise Gráfica da Multiplicidade de uma raiz

Vamos agora analisar graficamente o comportamento do gráfico de um polinômio $P(x)$ de grau n, com todos os coeficientes reais, no que se refere à multiplicidade de uma raiz. Uma vez que o grau de $P(x)$ vale n, então $P(x)$ possui n raízes complexas. Entretanto, como estamos interessados no traçado do gráfico em um eixo de coordenadas cartesiano, deve-se analisar somente as raízes reais de $P(x)$.

Seja r uma raiz real de multiplicidade par e s uma raiz real de multiplicidade ímpar de $P(x)$. Pode-se então escrever $P(x)$ da forma $P(x) = (x - r)^m(x - s)^k Q(x)$, onde $m = \{2, 4, 6, ...\}$ e $k = \{1, 3, 5, ...\}$. Assim, pode-se observar que devido ao expoente par de $x - r$, então o sinal de $P(x)$ nas vizinhanças de r é o mesmo. Por outro lado, o expoente ímpar de $x - s$ faz com que os sinais de $P(x)$ infinitesimalmente à esquerda de s e infinitesimalmente à direita de s sejam distintos. O exemplo abaixo representa uma possível representação do gráfico de $P(x)$ nas regiões próximas às raízes r e s.



Exemplos:

1) (UFU-98) Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 5x^3 - x^2 + (3a + b - 1)x + (a - 2b)$. Sabendo que zero é raiz de multiplicidade dois deste polinômio, então

a) $a = 2/7$ e $b = 1/7$ b) $a = -1$ e $b = 1/7$ c) $a = 0$ e $b = 0$

d) $a = 2/7$ e $b = -1/7$ e) $a = 1$ e $b = 0$

Solução:

Se 0 é raiz dupla de $p(x)$ então $p(x)$ é divisível por x^2, ou seja, os dois últimos coeficientes de $p(x)$ são iguais a zero: $\begin{cases} 3a + b = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2/7$ e $b = 1/7$

2) Sabe-se que -1 é raiz de multiplicidade 2 da equação $2x^3 + x^2 - 4x - 3 = 0$. A outra raiz dessa equação é um número:

a) racional e não inteiro b) inteiro c) irracional e negativo

d) irracional positivo e) complexo e não real

Solução:

Uma vez que – 1 é raiz da equação, podemos aplicar o algoritmo de Briot-Rufini:

– 1	2	1	– 4	– 3
	2	1	3	0

Desta forma, concluimos que $2x^3 + x^2 - 4x - 3 = (x + 1)(2x^2 - x - 3)$
Como – 1 é raiz dupla, então conclui-se que – 1 é raiz de $2x^2 - x - 3$:

– 1	2	– 1	– 3
	2	– 3	0

Logo, $2x^3 + x^2 - 4x - 3 = (x + 1)^2(2x - 3)$, fazendo com que a outra raiz seja 3/2, ou seja, um racional não inteiro.

3) (Unicap-2003) Considerando-se um polinômio P(x) de grau 3, com coeficientes reais e com o coeficiente de x^3 igual a 1, e supondo-se que as raizes de P(x) são todas reais, pode-se concluir que
I - II
0 - 0 se a é uma raiz de P(x), então P(a) > 0, sempre.
1 - 1 se a é uma raiz de P(x), então P(x) é divisível por (x – a) e, nesse caso, P(x) = (x – a).Q(x) , onde Q(x) é um polinômio de grau dois.
2 - 2 se a for uma raiz dupla de P(x), então $P(x) = (x - a)^2.Q(x)$, onde o grau de Q(x) é igual a um.
3 - 3 se a é uma raiz de P(x), então P(a) = 0.
4 - 4 se a é raiz tripla de P(x), então $P(x) = (x - a)^3.Q(x)$, onde o grau de Q(x) é zero.
Solução:
0 - 0: se a é raiz de P(x) então P(a) = 0, sempre. Falso.
1 - 1: se a é raiz de P(x) então P(x) = (x – a)Q(x), onde $\partial(P) = \partial(x - a) + \partial(Q)$, ou seja, $\partial(Q) = 2$. Verdadeiro.
2 - 2: se a é raiz dupla de P(x) então $P(x) = (x - a)^2Q(x)$, onde $\partial(P) = \partial[(x - a)^2] + \partial(Q)$, ou seja, $\partial(Q) = 1$. Verdadeiro.
3 - 3: se a é raiz de P(x) então P(a) = 0. Verdadeiro.
4 - 4: se a é raiz tripla de P(x) então $P(x) = (x - a)^3Q(x)$, onde $\partial(P) = \partial[(x - a)^3] + \partial(Q)$, ou seja, $\partial(Q) = 0$. Verdadeiro.

4) (ITA-70) Calculando as raízes simples e múltiplas da equação: $x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ podemos afirmar que esta equação tem:
a) uma raiz simples, duas duplas e uma tripla
b) uma raiz simples, uma dupla e uma tripla
c) duas simples, uma dupla e uma tripla
d) duas raízes simples e duas duplas
e) duas raízes simples e uma tripla
Solução:
Notando que 1 é raiz da equação: $x^6 - 3x^5 - 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2)$
Mais uma vez 1 é raiz: $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2 = (x - 1)(x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2)$
Novamente 1 é raiz: $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x - 1)(x^3 - 3x - 2)$
Agora – 1 é raiz: $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)$
Logo, $x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x - 1)^3(x + 1)^2(x - 2)$, ou seja, a equação tem uma raiz tripla e uma dupla.

5) (ITA-2010) Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^{5} a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a, b e c, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidades dois, pode-se afirmar que p(1) é igual a

a) -4 b) -2 c) 2 d) 4 e) 6

Solução:

Escalonando o sistema obtém-se:

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ 2b - 3c = 6 \\ -2b - 8c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ 2b - 3c = 6 \\ -11c = 11 \end{cases} \Rightarrow c = -1 \Rightarrow b = 3/2 \Rightarrow a = 2$$

Logo, $p(x) = 4(x-2)^2(x+1)^2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow p(1) = -4$

6) (ITA-2008) Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por: $x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$. Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que $x = 0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

Solução:

Como 0 é raiz com multiplicidade 3 temos:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - \beta - \gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$

Somando (1) com (2) temos: $3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ -\beta - \gamma = -1 \\ 2\beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$

Assim, o sistema é indeterminado com $\beta + \gamma = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \gamma$ mas como a multiplicidade do 0 é 3 temos que $\alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 \Rightarrow -(1 - \gamma) - 2\gamma \neq 0 \Rightarrow \gamma \neq -1$.

Logo temos $\alpha = 0$, $\beta = 1 - \gamma$, $\beta \neq 2$ e $\gamma \neq -1$.

7) (ITA-2009) Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f \circ g$ é igual a:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Solução:

Fatorando as funções obtém-se $f(x) = (x+1)^2(x^2-1)$ e $g(x) = (x-1)^2$

Logo: $f(g(x)) = [(x-1)^2 + 1]^2\,[(x-1)^4 - 1] \Rightarrow$

$f(g(x)) = (x^2 - 2x + 2)^3 . x . (x - 2)$

Assim, as raízes não reais são $1 + i$ e $1 - i$, cada uma com multiplicidade igual a 3

3.5. TEOREMA DAS RAÍZES CONJUGADAS

"Seja P(x) um polinômio de grau n, $n \geq 2$, e de coeficientes reais. Se P(x) admite o número complexo $z = a + bi$ ($b \neq 0$) como raiz, então P(x) admite também como raiz o número $\overline{z} = a - bi$, complexo conjugado de z". Isto é, $P(z) = 0 \Leftrightarrow P(\overline{z}) = 0$

Demonstração:

A demonstração é baseada em três propriedades de números complexos já demonstradas neste livro:

i) se z é um número complexo e n um natural: $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$

ii) se k um número real e z um número complexo, então: $k.\overline{z} = \overline{k.z}$

iii) se z e w são números complexos: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ e a_0 são números reais. Suponha que o número complexo z é raiz de P(x), ou seja, $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

$$P(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 = a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 \Rightarrow$$

$$P(\overline{z}) = \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{0} = 0$$

3.5.1. Multiplicidade da raiz conjugada: "Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz $z = a + bi$ ($b \neq 0$) com multiplicidade m, então essa equação admite $\overline{z} = a - bi$ com multiplicidade m".

Demonstração:

Seja $z = a + bi$ ($b \neq 0$) um número complexo que é raiz com multiplicidade m do polinômio P(x). Sabe-se que $\overline{z} = a - bi$ também é raiz de P(x). Assim, o polinômio $h(x) = (x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - (z + \overline{z})x + z.\overline{z} = x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ divide P(x). Uma vez que h(x) é um polinômio de coeficientes reais, então o quociente $Q_1(x)$ da divisão de P(x) por h(x) também possui somente coeficientes reais. Se z é raiz de $Q_1(x)$ então $\overline{z}$ também é raiz, fazendo com que $h(x) = x^2 + 2ax + a^2 + b^2$ divida $Q_1(x)$. Novamente, pelo fato de $Q_1(x)$ e h(x) possuírem coeficientes reais então o quociente $Q_2(x)$ da divisão de $Q_1(x)$ e h(x) tem apenas coeficientes reais. Assim segue até que z não seja raiz de $Q_m(x)$. Neste caso, $\overline{z}$ também não é raiz de $Q_m(x)$, pois se $\overline{z}$ fosse raiz de $Q_m(x)$, então seu conjugado $\overline{(\overline{z})} = z$ também seria raiz. Desta forma, z e $\overline{z}$ são raízes de mesma multiplicidade de P(x).

3.5.2. Observações:

1) Os dois teoremas só se aplicam a equações polinomiais de coeficientes reais. Isto ocorre pois a passagem $k.\overline{z} = \overline{k.z}$ só é válida se k é real. Observe que a equação $x^3 - 2ix^2 = 0$ possui como raiz 0 (com multiplicidade 2) e 2i, entretanto o conjugado de 2i não é raiz da equação.

2) Como toda raiz complexa $z = a + bi$ ($b \neq 0$) de uma equação com coeficientes reais $P(x) = 0$ corresponde uma outra raiz $\overline{z} = a - bi$, com igual multiplicidade, decorre que o número de raízes complexas não-reais de $P(x) = 0$ é necessariamente par.

3) Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então ela admite um número ímpar de raízes reais. Esta observação nos permite enunciar um importante teorema sobre polinômios: "Todo polinômio com coeficientes reais e grau impar possui pelo menos uma raiz real". A demonstração segue do fato de as raízes complexas surgirem sempre aos pares (z e $\overline{z}$).

Exemplos:

1) Seja a equação $x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 34x + 26 = 0$. Sabendo que $1 + i$ e $2 - 3i$ são raízes desta equação, determine as outras duas raízes.

Solução:

Se $1 + i$ e $2 - 3i$ são raízes, então os conjugados destes complexos também são raízes, ou seja, $1 - i$ e $2 + 3i$ também são raízes da equação.

2) (FEI-2000) Uma das raízes da equação $x^2 - 2x + c = 0$, onde c é um número real, é o número complexo $z_0 = 1 + 2i$. É válido afirmar-se que:
a) c = 0 b) c = 1 c) c = 3 d) c = 5 e) c = 7
Solução:
Como os coeficientes da equação são reais, se $1 + 2i$ é raiz então $1 - 2i$ também é raiz.
Logo, a equação é dada por $0 = [x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)] = x^2 - 2x + 5 \Rightarrow c = 5$.

3) (Mackenzie-99) Se $1 + i$ é raiz da equação $x^3 - 4x^2 + Kx + t = 0$, com K e t números reais, então K + t vale:
a) – 6 b) 6 c) – 4 d) 4 e) 2
Solução:
Sendo os coeficientes da equação números reais, se $1 + i$ é raiz, então $1 - i$ também é. Assim, concluímos que $[x - (1 + i)][x - (1 - i)] = x^2 - 2x + 2$ divide $x^3 - 4x^2 + Kx + t$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + Kx + t & x^2 - 2x + 2 \\ \hline -x^3 + 2x^2 - 2x & x - 2 \\ \cline{1-1} -2x^2 + (K-2)x + t & \\ -2x^2 + 4x + 4 & \\ \cline{1-1} (K-6)x + t + 4 & \end{array}$$

Uma vez que o resto é igual a zero, então $K - 6$ e $t = -4$. Portanto, $K + t = 2$.

4) (Mackenzie-2000) $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ é um polinômio de coeficientes reais, menor grau possível, que admite as raízes – 2 e 2i, ambas com multiplicidade 2. Se P(0) = 64, a_0 vale:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5
Solução:
Uma vez que P(x) possui coeficientes reais, se 2i é raiz com multiplicidade 2, então – 2i é raiz também com multiplicidade 2. O polinômio com menor grau que possui as raízes 2i, – 2i e – 2 (todas com multiplicidade 2) é da forma $P(x) = a_0(x - 2i)^2(x + 2i)^2(x - 2)^2$.
$P(0) = 64 \Rightarrow 64 = a_0(0 - 2i)^2(0 + 2i)^2(0 - 2)^2 \Rightarrow 64 = a_0(-4)(-4)(4) \Rightarrow a_0 = 1$.

4) (FGV-2003) a) Um polinômio P, de coeficientes reais, apresenta $2 + 3i$ e $-2 - 3i$ como suas raízes (i é a unidade imaginária). Qual o menor grau possível para P? Justifique.
b) A equação polinomial $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$ apresenta uma raiz igual a $2 + i$. Obtenha as outras raízes.
Solução:
a) Desde que P possui coeficientes reais, se $2 + 3i$ é raiz então $2 - 3i$ também é raiz e se $-2 - 3i$ é raiz então $-2 + 3i$ também é raiz. Já temos 4 raízes em P. De modo que P possua o menor grau possível, estas 4 devem ser as únicas raízes de P. Logo, o menor grau de P é 4.
b) Como a equação possui somente coeficientes reais, se $2 + i$ é raiz, então $2 - i$ também é raiz. Desta forma, o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - 7x + 15$ é divisível por $[x - (2 + i)][x - (2 - i)] = x^2 - 4x + 5$. Logo, podemos afirmar que: $x^3 - x^2 - 7x + 15 = (x^2 - 4x + 5)(ax + b) = ax^3 + (b - 4a)x^2 + (5a - 4b)x + 5b$
i) $a = 1$;
ii) $b - 4a = -1 \Rightarrow b = 3$
Conferindo a igualdade dos outros coeficientes: $5a - 4b = 5.1 - 4.3 = -7$ e $5b = 5.3 = 15$.
Portanto, concluímos que $x^3 - x^2 - 7x + 15 = (x^2 - 4x + 5)(x - 3) \Rightarrow -3$ é raiz.
Desta maneira, as outras duas raízes são $2 - i$ e -3.

5) (UFC-2002) Seja P(x) um polinômio de grau $n \geq 1$, com coeficientes reais. Sabendo que $P(3 + i) = 2 - 4i$, onde $i^2 = -1$, calcule $P(3 - i)$.
Solução:
Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ e a_0 são números reais. Suponha que $P(z) = w$, ou seja, $P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = w$.

$P(\bar{z}) = a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + ... + a_1\bar{z} + a_0 = a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + ... + a_1\bar{z} + a_0 \Rightarrow$

$P(\bar{z}) = \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} = \overline{w}$.

Assim, se $P(3 + i) = 2 - 4i$, então $P(\overline{3+i}) = \overline{2-4i}$, ou seja, $P(3 - i) = 2 + 4i$.

6) (UFU-2003) Considere o polinômio $p(x) = (m^2 - 1)x^4 + \sqrt{3}mx^3 + m^2x^2 + \sqrt{3}mx + 1$, em que m é um número real. Sabendo-se que $p(i) = 0$, em que $i^2 = -1$, determine todos os possíveis valores para m de modo que $p(x)$ não tenha raízes reais.

Solução:

Se $p(x)$, que possui coeficientes reais, possuir grau ímpar, então certamente terá uma raiz real. Assim, a primeira restrição é $m^2 \neq 1$, ou seja, $m \neq \pm 1$. Como $p(i) = 0$ então $p(-i) = 0$ e assim temos que $p(x)$ é divisível por $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$. Pelo Método de Descartes:

$p(x) = (m^2 - 1)x^4 + \sqrt{3}mx^3 + m^2x^2 + \sqrt{3}mx + 1 = (x^2 + 1)(ax^2 + bx + c) \Rightarrow$

$p(x) = (m^2 - 1)x^4 + \sqrt{3}mx^3 + m^2x^2 + \sqrt{3}mx + 1 = ax^4 + bx^3 + (a + c)x^2 + bx + c$

Concluímos então que:

i) $a = m^2 - 1$;

ii) $c = 1$;

iii) $b = \sqrt{3}m$.

Observe que ocorre igualdade entre os coeficientes de x^2, uma vez que $a + c = m^2 - 1 + 1 = m^2$.

Assim, $p(x) = (x^2 + 1)[(m^2 - 1)x^2 + \sqrt{3}mx + 1]$, ou seja, para que $p(x)$ não possua raízes reais basta que equação $(m^2 - 1)x^2 + \sqrt{3}mx + 1 = 0$ não possua raízes reais, que ocorre quando seu discriminante é menor do que zero. $(\sqrt{3}m)^2 - 4(m^2 - 1)(1) < 0 \Rightarrow 3m^2 - 4m^2 + 4 < 0 \Rightarrow m^2 > 4 \Rightarrow$ $m < -2$ ou $m > 2$.

7) (UFMT-98) Considere o polinômio $P(x)$ de coeficientes reais, não nulo e de menor grau, que satisfaça as seguintes condições:

- O coeficiente de seu termo de maior grau é -3;
- Admite i (unidade imaginária) como raiz;
- É divisível por $(x - 1)$.

Calcule $P(-2)$.

Solução:

É sabido que o número de raízes (contando as multiplicidades) de um polinômio é igual ao seu grau. Assim, para minimizar o grau basta minimizar o número de raízes. Uma vez que os coeficientes de $P(x)$ são reais e i é raiz, então seu conjugado $-i$ também é raiz. Por outro lado, se $P(x)$ é divisível por $x - 1$ então 1 é raiz de $P(x)$. Nenhuma outra informação acrescenta raiz em $P(x)$, ou seja, para minimizar a quantidade de raízes de $P(x)$ basta considerar que as únicas raízes são 1, i e $-i$. Logo, $P(x)$ pode ser escrito da seguinte maneira: $P(x) = k(x - 1)(x - i)(x + i)$, onde k é o coeficiente do termo de maior expoente em x, que segundo o enunciado vale -3. Portanto tem-se que $P(x) = -3(x - 1)(x - i)(x + i)$.

Desta forma: $P(-2) = -3(-2 - 1)(-2 - i)(-2 + i) = -9(2 + i)(-2 + i) = 45$.

8) (ITA-2000) Sendo 1 e $1 + 2i$ raízes da equação $x^3 - ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais, então:

a) $b + c = 4$ b) $b + c = 3$ c) $b + c = 2$ d) $b + c = 1$ e) $b + c = 0$

Solução:

Como os coeficientes da equação são reais então se $1 + 2i$ podemos afirmar que seu conjugado, $1 - 2i$ também é raiz. Desta maneira:

$x^3 - ax^2 + bx + c = (x - 1)[x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)] = (x - 1)(x^2 - 2x + 5) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$

Logo: $a = 3$, $b = 7$ e $c = -5 \Rightarrow b + c = 2$

9) (ITA-01) O polinômio com coeficientes reais $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i. Então, a soma dos coeficientes é igual a:

a) – 4 b) – 6 c) – 1 d) 1 e) 4

Solução:

Uma vez que o polinômio possui coeficientes reais, uma vez que o número complexo i é raiz, então – i também é raiz de P(x), ambas com a mesma multiplicidade.

Vamos analisar todas as possibilidades quanto às raízes múltiplas de P(x):

i) a raiz 2 com multiplicidade 2 e outra raiz (diferente de i e – i), com multiplicidade 2: situação impossível, pois assim teríamos P(x) apresentando 6 raízes, que é uma contradição pois P(x) possui grau 5 e portanto exatamente cinco raízes.

ii) outras duas raízes (distintas de 2, i e – i) com multiplicidade 2 cada uma: situação impossível também, pois assim teríamos P(x) com 7 raízes.

iii) as raízes i e – i com multiplicidade 2: como P(x) possui cinco raízes, sobra apenas uma raiz, que é exatamente o número 2. Assim, as cinco raízes de P(x) são i, i, – i, – i e 2, e como o coeficiente de x^5 vale 1, então $P(x) = (x - i)^2(x + i)^2(x - 2)$.

Desde que a soma dos coeficientes de P(x) é igual a P(1), temos que:

$S_{coeficientes} = P(1) = (1 - i)^2.(1 + i)^2.2 = -2i.2i.1 = 4$.

10) (ITA-2008) Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio p(x) dado por: $x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$. Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que x = 0 seja uma raiz com multiplicidade 3 de p(x).

Solução:

Como 0 é raiz com multiplicidade 3 temos:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha - \beta - \gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$

Somando (1) com (2) temos: $3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ -\beta - \gamma = -1 \\ 2\beta + 2\gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema indeterminado com } \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \gamma \text{ mas como a multiplicidade do 0 é}$$

3 temos que

$\alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 \Rightarrow -(1 - \gamma) - 2\gamma \neq 0 \Rightarrow \gamma \neq -1$.

Logo temos $\alpha = 0$, $\beta = 1 - \gamma$, $\beta \neq 2$ e $\gamma \neq -1$.

11) (ITA-2009) Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta f o g é igual a:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

Solução:

Fatorando as funções obtém-se $f(x) = (x + 1)^2(x^2 - 1)$ e $g(x) = (x - 1)^2$

Logo: $f(g(x)) = [(x - 1)^2 + 1]^2 [(x - 1)^4 - 1] \Rightarrow$

$f(g(x)) = (x^2 - 2x + 2)^3.x.(x - 2)$

Assim, as raízes não reais são $1 + i$ e $1 - i$, cada uma com multiplicidade igual a 3

12) (ITA-2010) Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{6} a_n x^n$, com coeficiente reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$.

Sabe-se que se r é raiz de p, -r também é raiz de p. Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

I – Se r_1 e r_2, $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p, então r_3 é imaginário puro.

II – Se r é raiz dupla de p, então r é real ou imaginário puro.
III – $a_0 < 0$
Solução:
I. Se $p(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $a_0 \neq 0$, então todas as raízes de p(x) são não nulas. Logo, se r_1 e r_2 são raízes reais de p(x) com $|r_1| \neq |r_2|$ então tem-se que $r_1 \neq \pm r_2$, fazendo com que as raízes de p(x) sejam da forma $r_1, r_2, r_3, -r_1, -r_2$ e $-r_3$. Como r_3 é raiz não real, então é a forma $r_3 = a + bi$, $b \neq 0$. Desde que os coeficientes de p(x) são todos reais, então as raízes complexas devem ser, aos pares, conjugadas. Como as únicas raízes complexas são r_3 e $-r_3$:
$r_3 = \overline{-r_3} \Rightarrow a + bi = -a + bi \Rightarrow a = 0 \Rightarrow r_3$ é imaginário puro $\Rightarrow$ ITEM VERDADEIRO
II. Qualquer polinômio cujas raízes sejam da forma r, r, $\bar{r}$, $\bar{r}$, $-r$ e $-\bar{r}$, onde r é da forma $a + bi$, com $b \neq 0$, satisfaz o enunciado da questão e r não é nem real e nem imaginário puro. Por exemplo, o polinômio cujas raízes são $1 + i, 1 + i, 1 - i, 1 - i, -1 - i, -1 + i$ possui raiz dupla, satisfaz o fato de r e $-r$ serem raízes de p e também os coeficientes de p serem reais. ITEM FALSO
III. O polinômio que possui as raízes do item II possui $a_0 = (1 + i)(1 + i)(1 - i)(1 - i)(-1 - i)(-1 + i) = 8 > 0$. ITEM FALSO

13) (IME-65/66) Dada a equação $x^4 + 4x^3 - 4cx + 4d = 0$, sabendo que a mesma possui uma raiz dupla da forma $a + b\sqrt{3}$ e que c e d são números racionais, determine a, b, c e d.
Solução
Lema 1: Se a e b são números racionais, então $a + b\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ e $b = 0$.
Demonstração.
$a + b\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a = -b\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 0$ e $b = 0$, pois se assim não ocorresse teríamos um número racional igual a número irracional

Lema 2: Se a e b são números racionais e n é número natural, então $(a + b\sqrt{3})^n = X + Y\sqrt{3}$, onde X e Y são números racionais.
Demonstração:
Aplicando o desenvolvimento em binômio de Newton:

$$(a + b\sqrt{3})^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b\sqrt{3} + \binom{n}{2}a^{n-2}3b^2 + \binom{n}{3} + a^{n-3}3\sqrt{3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}(b\sqrt{3})^n \Rightarrow$$

$$(a + b\sqrt{3})^n = \left[\binom{n}{0}a^n + 3\binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\right] + \sqrt{3}\left[\binom{n}{1}a^{n-1}b + 3\binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots\right]$$

Obviamente os dois números dentro dos colchetes são racionais, uma vez que as únicas operações realizadas em sua determinação são multiplicações e somas de números racionais.

Lema 3: Se a e b são números racionais e n é um número natural, então $(a + b\sqrt{3})^n = X + Y\sqrt{3}$ se e somente se $(a - b\sqrt{3})^n = X - Y\sqrt{3}$.
Demonstração:

$$(a - b\sqrt{3})^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b\sqrt{3} + \binom{n}{2}a^{n-2}3b^2 - \binom{n}{3} + a^{n-3}3\sqrt{3}b^3 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}(b\sqrt{3})^n \Rightarrow$$

$$(a - b\sqrt{3})^n = \left[\binom{n}{0}a^n + 3\binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\right] - \sqrt{3}\left[\binom{n}{1}a^{n-1}b + 3\binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots\right]$$

Comparando a expressão acima com a expressão encontrada no Lema 2 para $(a + b\sqrt{3})^n$, pode-se depreender que se $(a + b\sqrt{3})^n = X + Y\sqrt{3}$ então $(a - b\sqrt{3})^n = X - Y\sqrt{3}$, onde X e Y são racionais.

Lema 4: Dado um polinômio p(x) com coeficientes racionais, se $a + b\sqrt{3}$ (com a e b racionais) é raiz de p(x) então $a - b\sqrt{3}$ também é raiz de p(x).

Demonstração:

Seja $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + .. + c_1 x + c_0$. Se $a + b\sqrt{3}$ é raiz de p(x) então $p(a + b\sqrt{3}) = 0$:

$p(a + b\sqrt{3}) = c_n(a + b\sqrt{3})^n + c_{n-1}(a + b\sqrt{3})^{n-1} + ... + c_1(a + b\sqrt{3}) + c_0 = 0 \overset{\text{Lema2}}{\Rightarrow}$

$c_n(X_n + Y_n\sqrt{3}) + c_{n-1}(X_{n-1} + Y_{n-1}\sqrt{3}) + ... + c_1(X_1 + Y_1\sqrt{3}) + c_0 = 0 \Rightarrow$

$[c_n.X_n + c_{n-1}.X_{n-1} + ... + c_1X_1 + c_0] + \sqrt{3}[c_n.Y_n + c_{n-1}.Y_{n-1} + ... + c_1.Y_1] = 0 \overset{\text{Lema1}}{\Rightarrow}$

$c_n.X_n + c_{n-1}.X_{n-1} + ... + c_1X_1 + c_0 = 0$ e $c_n.Y_n + c_{n-1}.Y_{n-1} + ... + c_1.Y_1 = 0$ (1)

Por outro lado: $p(a - b\sqrt{3}) = c_n(a - b\sqrt{3})^n + c_{n-1}(a - b\sqrt{3})^{n-1} + .. + c_1(a - b\sqrt{3}) + c_0 \overset{\text{Lema1}}{\Rightarrow}$

$p(a - b\sqrt{3}) = c_n(X_n - Y_n\sqrt{3}) + c_{n-1}(X_{n-1} - Y_{n-1}\sqrt{3}) + ... + c_1(X_1 - Y_1\sqrt{3}) + c_0 \Rightarrow$

$p(a - b\sqrt{3}) = [c_n.X_n + c_{n-1}.X_{n-1} + ... + c_1X_1 + c_0] - \sqrt{3}[c_n.Y_n + c_{n-1}.Y_{n-1} + ... + c_1.Y_1]$

Por (1) conclui-se que $p(a - b\sqrt{3}) = 0$.

Aplicando o lema 4 no polinômio proposto, tem-se que se $a + b\sqrt{3}$ é raiz dupla da equação $x^4 + 4x^3 - 4cx + 4d = 0$, então $a - b\sqrt{3}$ também é raiz dupla desta mesma equação. Uma vez que a equação proposta possui grau 4, então as quatro raízes desta são $a + b\sqrt{3}$, $a + b\sqrt{3}$, $a - b\sqrt{3}$ e $a - b\sqrt{3}$.

Logo: $x^4 + 4x^3 - 4cx + 4d = [x - (a + b\sqrt{3})][x - (a + b\sqrt{3})][x - (a - b\sqrt{3})][x - (a - b\sqrt{3})] =$

$= [(x - a) - b\sqrt{3}]^2[(x - a) + b\sqrt{3}]^2 = [(x - a)^2 - 3b^2]^2 = (x - a)^4 - 6(x - a)^2b^2 + 9b^4 =$

$= x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 - 6b^2x^2 + 12ab^2x - 6a^2b^2 + 9b^4 \Rightarrow$

$x^4 + 4x^3 - 4cx + 4d = x^4 - 4ax^3 + 6(a^2 - b^2)x^2 + 4a(3b^2 - a^2)x - 6a^2b^2 + 9b^4$

Desta forma, conclui-se que:

(1) $4 = -4a \Rightarrow a = -1$

(2) $a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 1$

(3) $-4c = 4a(3b^2 - a^2) = (-4)(3 - 1) = -8 \Rightarrow c = 2$

(4) $4d = -6a^2b^2 + 9b^4 = -6 + 9 = 3 \Rightarrow d = 3/4$

Obs: Note que os números da forma $a + b\sqrt{r}$, onde r é número racional cuja raiz quadrada é irracional, a e b são números racionais, funcionam da mesma maneira para as equações de coeficientes racionais que os números complexos funcionam para as equações de coeficientes reais. Assim, se $a + b\sqrt{r}$ é raiz de multiplicidade n ($n \in \mathbb{N}^*$) de uma equação com coeficientes racionais, então $a - b\sqrt{r}$ também é raiz desta mesma equação também com multiplicidade n.

3.6. RELAÇÕES DE GIRARD:

Dando continuidade ao estudo das raízes de uma equação algébrica, agora serão estudadas as relações entre estas e os coeficientes da respectiva equação algébrica. Para uma equação algébrica de grau n é possível encontrar exatamente n expressões simétricas em relação às raízes. Tais expressões recebem o nome de relações de Girard ou relações simétricas entre raízes.

Sabe-se que toda equação de segundo grau $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ ($a_2 \neq 0$) pode ser escrita da forma fatorada $a_2(x - x_1)(x - x_2) = 0$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação. Desenvolvendo a forma fatorada obtemos $a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2x^2 - a_2(x_1 + x_2)x + a_2x_1x_2 = 0$. Logo, tem-se que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

$$x_1.x_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

Por exemplo, na equação de segunda grau $3x^2 + 4x - 5 = 0$, se x_1 e x_2 são suas raízes, então pode-se afirmar que $x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}$ e $x_1x_2 = -\frac{5}{3}$.

Analogamente, uma equação de terceiro grau $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3, pode ser escrita da forma $a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, ou seja, $a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3 = 0$. Assim, conclui-se que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

Aplicando estas relações na equação de terceiro grau $2x^3 + 7x^2 + 2x - 9 = 0$, onde x_1, x_2 e x_3 são suas raízes, obtém-se que: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{7}{2}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$ e $x_1x_2x_3 = \frac{9}{2}$.

No caso de uma equação do 4º grau $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com raízes x_1, x_2, x_3 e x_4, sua forma fatorada é igual a $a_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$. Assim, desenvolvendo a forma fatorada encontramos $a_4x^4 - a_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2 - a_4(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + a_4x_1x_2x_3x_4 = 0$. Portanto:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_3}{a_4}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{a_2}{a_4}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{a_1}{a_4}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{a_0}{a_4}$$

Por exemplo, se x_1, x_2, x_3 e x_4 são as raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 7x + 1 = 0$, então suas relações de Girard são: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$, $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -7$ e $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

Pelos desenvolvimentos anteriores já é possível generalizar as relações de Girad para uma equação algébrica de grau n. Assim, dada a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) cujas raízes são $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ temos a seguinte identidade:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) =$

$= a_n x^n - a_n(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)x^{n-1} + a_n(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - a_n(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots +$

$+ x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} - \ldots - (-1)^n a_n(x_1x_2x_3\ldots x_n)$

Aplicando a condição de identidade:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2x_3\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

A expressão que relaciona $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ com os coeficientes da equação é denominada de soma das raízes. A expressão $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n$ é denominada soma da multiplicação das raízes tomadas duas a duas. A expressão $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$ é chamada de soma da multiplicação das raízes tomadas três a três, e assim por diante, até a relação $x_1x_2\ldots x_{n-2}x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n + \ldots x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n$, que é conhecida por soma da multiplicação das raízes tomadas n – 1 a n – 1. A relação $x_1x_2x_3\ldots x_n$ é denominada somente de produto das raízes da equação.

Apesar de trazerem uma série de informações sobre as raízes de uma equação algébrica, somente as relações de Girard não são suficientes para a determinação das raízes da equação. Por exemplo, tome a equação algébrica $x^3 - 2x^2 + 6x + 4 = 0$. Suponhamos que a, b e c são as raízes desta equação. As relações de Girard desta equação são: $a + b + c = 2$ (1), $ab + ac + bc = 6$ (2) e $abc = -4$ (3). Isolando $b + c$ da equação 1 e bc na equação 3 obtemos $b + c = 2 - a$ e $bc = -\frac{4}{a}$. Logo:

$$ab + ac + bc = a(b + c) + bc = a(2 - a) - \frac{4}{a} = 2a - a^2 - \frac{4}{a} = 6 \Rightarrow 2a^2 - a^3 - 4 = 6a \Rightarrow$$

$$a^3 - 2a^2 + 6a + 4 = 0$$

Observe que a expressão obtida não acrescenta absolutamente nenhuma informação nova para a determinação das raízes da equação, uma vez que se a é raiz de $x^3 - 2x^2 + 6x - 4 = 0$, então tem-se que $a^3 - 2a^2 + 6a + 4 = 0$.

A utilização das relações de Girard no cálculo das raízes de uma equação algébrica somente é útil se uma outra informação sobre as raízes é fornecida. Por exemplo, se na equação $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ for informado que duas de suas raízes possuem soma igual a zero, podemos utilizar as relações de Girard paralelamente a esta informação e determinar as raízes da equação. Se a, b e c são suas raízes:

$$\begin{cases} a + b + c = -2 & (1) \\ ab + ac + bc = -1 & (2) \\ abc = 2 & (3) \\ a + b = 0 & (4) \end{cases}$$

Desenvolvendo a equação 1: $(a + b) + c = -2 \Rightarrow 0 + c = -2 \Rightarrow c = -2$

Aplicando na equação 3: $abc = 2 \Rightarrow ab(-2) = 2 \Rightarrow ab = -1$

Uma vez que $a + b = 0$, conclui-se diretamente que $a = 1$ e $b = -1$ (ou $a = -1$ e $b = 1$, tanto faz!)

Desta forma, as raízes de $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ são -1, 1 e -2.

Exemplos:

1) Seja a equação algébrica $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, que possui as raízes x_1, x_2, x_3, x_4. Escreva as relações de Girard para estas equações:

Solução:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 35$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 50$

$x_1x_2x_3x_4 = 24$

2) Determine as raízes de $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$, sabendo que duas delas são iguais.

Solução:

Sejam a, a, b as raízes da equação. Então, pelas relações de Girard:

i) $a + a + b = 4 \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - 2a$

ii) $a.a + a.b + a.b = 5 \Rightarrow a^2 + 2ab = 5 \Rightarrow a^2 + 2a(4 - 2a) = 5 \Rightarrow a^2 + 8a - 4a^2 = 5 \Rightarrow$
$3a^2 - 8a + 5 = 0 \Rightarrow a = 1$ ou $a = 5/3$

iii) $a^2b = 2$

se $a = 1$: $a^2b = 2 \Rightarrow b = 2$ ($\therefore 2a + b = 2.1 + 2 = 4$ confere)

se $a = 5/3$: $a^2b = 2 \Rightarrow b = 18/25$ ($\therefore 2a + b = 10/3 + 18/25 \neq 2$ não confere)

Desta maneira, as raízes são 1, 1 e 2.

3) (Cefet/PR-2004) Se "a", "b", "c" e "d" são as raízes da equação $2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 3 = 0$ então o valor de $\frac{1}{abc} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd}$ é igual a:

a) 2 b) 1/2 c) – 2 d) – 1/2 e) 2/3

Solução:

Desenvolvendo: $\frac{1}{abc} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd} = \frac{a+b+c+d}{abcd}$

Os valores de $a + b + c + d$ e $abcd$ podem ser encontrados analisando as relações de Girard associadas à equação $2x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 3 = 0$:

$a + b + c + d = -\frac{6}{2} = -3$

$abcd = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$

Logo: $\frac{1}{abc} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{bcd} = \frac{-3}{-\frac{3}{2}} = 2$

4) (UFV-2002) Seja o polinômio $P(x) = x^3 - 7x + c$, com $c \neq 0$. Sendo p, 2p e q as raízes de P(x), determine $(3p - q)^2$.

Solução:

Pelas Relações de Girard:

$p + 2p + q = 0 \Rightarrow q = -3p$

$p.2p + p.q + 2p.q = -7 \Rightarrow 2p^2 + 2pq = 0 - 7 \Rightarrow 2p^2 - 6p^2 = -7 \Rightarrow p = \pm\frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow q = \mp\frac{3\sqrt{7}}{2}$

Desta forma: $(3p-q)^2 = \left[\pm\frac{3\sqrt{7}}{2} - \left(\mp\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)\right]^2 = \left(\pm\frac{3\sqrt{7}}{2} \pm \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \left(\pm 3\sqrt{7}\right)^2 = 63$

5) (UERJ-2004) Os zeros do polinômio a seguir formam uma P.A. $p(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$. O conjunto solução da equação $p(x) = 0$ pode ser descrito por:
a) {0, 4, 8} b) {2, 4, 6} c) {−1, 4, 9} d) {−2, −4, −6}
Solução:
Sejam a, b, c as raízes de p(x). Como estas valores estão em PA: $2b = a + c$.
Pelas relações de Girard:
i) $a + b + c = 12 \Rightarrow 3b = 12 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a - c = 8$
ii) $a.b.c = 48 \Rightarrow a.4.c = 48 \Rightarrow ac = 12$
O sistema de equações $a + c = 8$ e $ac = 12$, que recai em uma equação de 2º grau, possui 2 e 6 como solução. Assim, as raízes de p(x) são 2, 4 e 6.

6) (UFMA-2002) Sabendo-se que a equação $x^3 + ax^2 + 56x - 64 = 0$ possui três raízes, calcule o valor de a, de modo que as raízes dessa equação estejam em progressão geométrica.
Solução:
Se as três raízes da equação estão em PG, podemos escrevê-las da seguinte forma: c, cq, cq^2
Pelas relações de Girard:
i) $c + cq + cq^2 = -a \Rightarrow a = -c(1 + q + q^2)$
ii) $c.cq + c.cq^2 + cq.cq^2 = 56 \Rightarrow c^2q(1 + q + q^2) = 56$ (1)
iii) $c.cq.cq^2 = 64 \Rightarrow (cq)^3 = 64 \Rightarrow cq = 4$ (2)
Dividindo as expressões 1 e 2 obtemos $c(1 + q + q^2) = 14 \Rightarrow a = -14$

7) (UFMS-99) Considere o polinômio $p(x) = x^3 + mx - 20$, onde m é um número real. Se a, b e c são as raízes de p(x), determine o valor de $a^3 + b^3 + c^3$.
Solução:
A relação de Girard sobre a soma das raízes de p(x) nos permite concluir que $a + b + c = 0$.
Uma vez que a, b, c são raízes de $x^3 + mx - 20 = 0$ tem-se que:

$$\begin{cases} a^3 + m.a - 20 = 0 \\ b^3 + m.b - 20 = 0 \\ c^3 + m.c - 20 = 0 \end{cases}$$

Somando as três equações: $(a^3 + b^3 + c^3) + m(a + b + c) - 60 = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 60$

8) (UFMS-2004) Sabendo-se que três números reais distintos, a, b e c, satisfazem as equações $a^3 + pa + q - 0$, $b^3 + pb + q - 0$ e $c^3 + pc + q - 0$ com p e q constantes reais, calcule o valor de $10(a + b + c)^2 + 13$.
Solução:
Se a, b e c são três números distintos que satisfazem $a^3 + pa + q = 0$, $b^3 + pb + q = 0$ e $c^3 + pc + q = 0$, então pode-se concluir que a, b e c são as três raízes da equação $x^3 + px + q = 0$. Pela relação de Girard que versa sobre a soma das raízes tem-se que $a + b + c = 0$. Logo: $10(a + b + c)^2 + 13 = 13$.

9) (UFC-99) As medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo retângulo são dadas pelos números que são raízes da equação $4x^3 - 24x^2 + 47x - 30 = 0$. Então, a área deste triângulo, em cm^2, é:
A) 1,5. B) 0,5. C) 7,5. D) 6. E) 3.
Solução:
Sejam a, b e c as raízes da equação proposta. Desde que estas raízes são as medidas dos lados de um triângulo retângulo pode-se escrever que $a^2 = b^2 + c^2$. Além disso, sendo b e c os catetos, a área do triângulo é dada por $S = bc/2$, ou seja, $bc = 2S$.
A primeira relação de Girard nos diz que $a + b + c = 24/4 = 6 \Rightarrow b + c = 6 - a$
Elevando ao quadrado: $b^2 + c^2 + 2bc = 36 - 12a + a^2 \Rightarrow 2bc = 36 - 12a \Rightarrow a = 3 - bc/6$
Pela terceira relação de Girard: $abc = 30/4 = 15/2 \Rightarrow (3 - bc/6)bc = 15/2 \Rightarrow (3 - S/3)2S = 15/2 \Rightarrow$
$2S^2/3 - 6S + 15/2 = 0 \Rightarrow 4S^2 - 36S + 45 = 0 \Rightarrow (2S - 3)(2S - 15) = 0 \Rightarrow S = 1,5$ ou $S = 7,5$
Vamos agora analisar qual destes dois valores de S confere com a segunda relação de Girard:

i) $S = 1,5 \Rightarrow bc = 3 \Rightarrow a = 3 - bc/6 = 2,5 \Rightarrow b + c = 6 - a = 3,5$
Assim: $ab + ac + bc = a(b + c) + bc = 2,5(3,5) + 3 = 11,75 = 47/4$ (confere!!!)
ii) $S = 7,5 \Rightarrow bc = 15 \Rightarrow a = 3 - bc/6 = 0,5 \Rightarrow b + c = 6 - a = 5,5$
Desta maneira: $ab + ac + bc = a(b + c) + bc = 0,5(5,5) + 15 = 71/4$ (não confere!!!)
Portanto, a área do triângulo vale 1,5 cm^2.

10) (UFPE-2004) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$. Determine o polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ que tem raízes x_1x_2, x_1x_3 e x_2x_3 e indique o valor do produto abc.
Solução:
Pelas relações de Girard: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$, $x_1x_2x_3 = 1$
Se x_1x_2, x_1x_3 e x_2x_3 são as raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, então:
$-a = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3 \Rightarrow a = -3$
$b = x_1x_2.x_1x_3 + x_1x_2.x_2x_3 + x_1x_3.x_2x_3 = x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 1.6 = 6$
$-c = x_1x_2.x_1x_3.x_2x_3 = (x_1x_2x_3)^2 = 1 \Rightarrow c = -1$
Portanto, o polinômio pedido é $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ e $abc = (-3).(6).(-1) = 18$.

11) (Escola Naval-98) A relação entre os coeficientes b e c para que a equação $x^3 + bx + c = 0$ possua duas raízes iguais é:
a) $4b^3 + 27c^2 = 0$ b) $b^3 + c^2 = 0$ c) $2b^3 + 3c^2 = 0$
d) $b^3 + c^2 = 0$ e) $3b = c$
Solução:
Sejam r, r e s as raízes da equação dada. Pelas relações de Girard tem-se:
i) $r + r + s = 0 \Rightarrow s = -2r$
ii) $r.r + r.s + r.s = b \Rightarrow r^2 + 2rs = b \Rightarrow r^2 - 4r^2 = b \Rightarrow -3r^2 = b \Rightarrow -27r^6 = b^3$
iii) $r^2.s = c \Rightarrow -2r^3 = c \Rightarrow 4r^6 = c^2 \Rightarrow -\frac{4}{27}b^3 = c^2 \Rightarrow 4b^3 + 27c^2 = 0$

12) (ITA-83) Considere os números reais não nulos a, b, c e d em progressão geométrica tais que a, b e c são raízes da equação (em x) $x^3 + Bx^2 - 2Bx + D = 0$, onde B e D são números reais e $B > 0$. Se $cd - ac = -2B$, então:

a) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ e $b^2 + c^2 + d^2 = \frac{16B^2}{B^2 + 4B}$

b) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{16B}{B^2 + 4}$

c) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)$ e $b^2 + c^2 + d^2 = \frac{16B}{B + 4}$

d) $(a^2 + b^2 + c^2)(b + c + d) = (ab + bc + cd)$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{16B}{B + 4}$

e) $(a^2 + b^2 + c^2)(b + c + d) = (ab + bc + cd)^2$ e $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{B + 4}{16B}$

Solução:
Se q é a razão da PG formada por a, b, c e d, pode-se escrever que $b = aq$, $c = aq^2$ e $d = aq^3$.
Assim: $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (a^2 + a^2q^2 + a^2q^4)(a^2q^2 + a^2q^4 + a^2q^6) = a^4q^2(1 + q^2 + q^4)^2 =$
$= (a^2q + a^2q^3 + a^2q^5)^2 = [(a)(aq) + (aq)(aq^2) + (aq^2)(aq^3)]^2 = (ab + bc + cd)^2$
Pela 2ª relação de Girard e sabendo que $ac = cd + 2B$:
$ab + ac + bc = -2B \Rightarrow ab + bc + cd + 2B = -2B \Rightarrow ab + bc + cd = -4B \Rightarrow (ab + bc + cd)^2 = 16B^2$
Por outro lado: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = B^2 + 4B$

Logo: $b^2 + c^2 + d^2 = \frac{(ab + bc + cd)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{16B^2}{B^2 + 4B}$

13) (ITA-90) Seja $p(x) = 16x^5 - 78x^4 + ... + \alpha x - 5$ um polinômio de coeficientes reais tal que a equação $p(x) = 0$ admite mais do que uma raiz real e ainda, $a + bi$ é uma raiz complexa desta equação com $ab \neq 0$. Sabendo-se que $\frac{1}{a}$ é a razão da progressão geométrica formada pelas raízes reais de $p(x) = 0$ e que a soma destas raízes reais vale $\frac{7}{8}$ enquanto que o produto é $\frac{1}{64}$, o valor de α é:

a) 32 b) 56 c) 71 d) 11 e) 0

Solução:

Pelos dados do enunciado pode-se escrever as raízes de $p(x)$ da forma: $a + bi$, $a - bi$, ca, c, c/a

Uma vez que o produto das raízes vale 1/64: $1/64 = ca.c.c/a \Rightarrow 1/64 = c^3 \Rightarrow c = 1/4$

Da 1ª relação de Girard sobre $p(x)$:

$a + bi + a - bi + [ca + c + c/a] = 39/8 \Rightarrow 2a + 7/8 = 39/8 \Rightarrow a = 2$

Da relação de Girard sobre a multiplicação das raízes de $p(x)$:

$(a + bi)(a - bi).ca.c.c/a \Rightarrow (a^2 + b^2)c^3 = 5/16 \Rightarrow (4 + b^2)/64 = 5/16 \Rightarrow b = \pm 4$

Portanto, da relação de Girard sobre a soma da multiplicação 4 a 4 das raízes de $p(x)$:

$\alpha/16 = c^3(a + bi + a - bi) + (a^2 + b^2)(c^2/a + c^2 + c^2a) \Rightarrow \alpha = 16[2ac^3 + c(a^2 + b^2)(c/a + c + ca)] \Rightarrow$

$\alpha = 16[4/64 + (20)(7/8)/4] \Rightarrow \alpha = 71$

14) (ITA-2004) Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que d é uma constante real. Para qual valor de d a equação admite uma raiz dupla no intervalo $]0, 1[$?

Solução:

Suponhamos que as raízes de $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$ sejam a, a e b. Pelas Relações de Girard temos que:

$2a + b = -3$ (1) $2ab + a^2 = -2$ (2) $a^2b = -d$ (3)

Substituindo (1) em (2): $2a(-3 - 2a) + a^2 = -2 \Rightarrow -6a - 4a^2 + a^2 = -2 \Rightarrow 3a^2 + 6a - 2 = 0 \Rightarrow$

$$a = -1 \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Como $a \in]0, 1[$ então a única solução possível é $a = -1 + \frac{\sqrt{15}}{3}$. Assim, $b = -3 - 2a = -1 - \frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Deste modo:

$$d = -a^2b = -\left(-1 + \frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2\left(-1 - \frac{2\sqrt{15}}{3}\right) = \left(1 - \frac{2\sqrt{15}}{3} + \frac{5}{3}\right)\left(1 + \frac{2\sqrt{15}}{3}\right) = \left(\frac{8 - 2\sqrt{15}}{3}\right)\left(\frac{3 + 2\sqrt{15}}{3}\right) \Rightarrow$$

$$d = \frac{24 + 16\sqrt{15} - 6\sqrt{15} - 60}{9} \Rightarrow d = \frac{10\sqrt{15} - 36}{9}$$

15) (ITA-2008) Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $1/2 - i/2$ também é sua raiz. Então, o máximo de a, b, c é igual a

a) -1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução:

Uma vez que os coeficientes da equação são reais e $1/2 - i/2$ é raiz, então seu conjugado, $1/2 + i/2$ também é.

Sejam r e s as outras duas raízes. Observando os coeficientes da equação, temos somente o valor da multiplicação das raízes:

$$-\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)r.s \Rightarrow r.s = -1$$

Como r e s são inteiros distintos, a única possibilidade é que $r = 1$ e $s = -1$ ou $r = -1$ e $s = 1$.

De posse das raízes pode-se determinar a equação:

$2[x - (1/2 - i/2)][x - (1/2 + i/2)](x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow$

$(2x^2 - 2x + 1)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow a = -2, b = -1, c = 2$
Assim, $\max(a, b, c) = c = 2$

16) (ITA-2009) Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\frac{a}{b}$ é igual a:

a) -3. b) $-\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{3}$. d) 1. e) 3.

Solução:

Raízes: $\frac{r}{q}, r, rq$ (onde $r \in \mathbb{R}$)

Relações de Girard:

$\frac{r}{q} + r + rq = \frac{a}{2}$ (1)

$\frac{r}{q}.r + \frac{r}{q}.rq + r.rq = \frac{b}{2}$ (2)

$\frac{r}{q}.r.rq = -27$ (3)

$(3) \Rightarrow r^3 = -27 \Rightarrow r = -3$

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$

17) (ITA-2009) Suponha que a equação algébrica.

$$x^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n x^n + a_0 = 0$$

Tenha coeficientes reais $a_0, a_1, \ldots a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que $\beta, \gamma_n \in \mathbb{R}$ e os γ_n, $n = 1, 2, \ldots, 11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$.

II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$.

III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

1ª Solução (não usando o fato de os γ_n estarem em PA)

I) (Verdadeira)

Se $\beta = 0 \Rightarrow a_0 = -(i\gamma_1 . i\gamma_2 . i\gamma_3 . \ldots . i\gamma_{11}) =$

$= -i^{11}(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{11}) = i(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{11})$.

Desde que $a_0 \in \mathbb{R}$ então $i.(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{11}) \in \mathbb{R}$, ou seja, existe algum γ_n que vale zero, implicando que $a_0 = 0$.

II) (Verdadeira)

Se $a_{10} = 0 \Rightarrow \beta - i\gamma_1 + \beta + i\gamma_2 + \ldots + \beta + i\gamma_{11} = 0 \Rightarrow$

$11\beta + i(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{11}) = 0 \Rightarrow \beta = 0$

III. (Falso)

Pelo item I, se $\beta = 0$, uma, e apenas uma, das raízes da equação vai ser igual a zero e as demais 10 serão todas não nulas. Portanto, a soma dos produtos 10 a 10 das raízes da equação será igual ao produto das 10 raízes não nulas da equação, fazendo com que $a_1 \neq 0$.

2ª Solução (usando o fato de os γ_n estarem em PA)

Como o grau do polinômio é ímpar e seus coeficientes são reais, então uma das raízes é real e as demais são complexas conjugadas. Assim, 11 raízes são:

$\beta - 5i\gamma$, $\beta - 4i\gamma$, $\beta - 3i\gamma$, $\beta - 2i\gamma$, $\beta - i\gamma$, β, $\beta + i\gamma$, $\beta + 2i\gamma$, $\beta + 3i\gamma$, $\beta + 4i\gamma$, $\beta + 5i\gamma$

I) (Verdadeira)

Como β é uma raiz da equação, substituindo $x = 0$:

$$0^{11} + \sum_{n=1}^{10} a_n 0^n + a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

II) (Verdadeira)

Se $a_{10} = 0 \Rightarrow \beta - 5i\gamma + \beta - 4i\gamma + ... + \beta + 5i\gamma = 0 \Rightarrow$

$11\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

III) (Falso)

Se $\beta = 0$ então $a_1 = (-5i\gamma.-4i\gamma...5i\gamma) = 14400\gamma^{10} \neq 0$

18) (ITA-2010) Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in R$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:

I – Quatro das raízes são imaginárias puras.

II – Uma das raízes tem multiplicidade dois

III – Apenas uma das raízes é real

Desta, é (são) verdadeira(s) apenas

a) I b) II C) III d) I e III e) II e III.

Solução:

Uma vez que $-i$ é raiz e todos os coeficientes de $p(x)$ são reais, tem-se que i também é raiz de $p(x)$.

Substituindo $x = i$ tem-se que: $i^5 - a.i^3 - a.i^2 - 1 = 0 \Rightarrow i + a.i - a - 1 = 0 \Rightarrow -(a + 1) + i(a + 1) = 0$

$\Rightarrow a = -1$

Logo, $p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$.

É possível identificar que $p(x)$ é um polinômio recíproco de 2ª ordem e grau ímpar, implicando que 1 é raiz de $p(x)$.

Sejam r e s as outras duas raízes de $p(x)$. Pelas relações de Girard:

$r + s + 1 + i - i = 0 \Rightarrow r + s = -1 \Rightarrow s = -1 - r$ (1)

$r.s.1.i.(-i) = 1 \Rightarrow r.s = 1$ (2)

Substituindo (1) em (2): $r(-1 - r) = 1 \Rightarrow r^2 + r + 1 = 0$

Se $r = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ então $s = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

Se $r = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ então $s = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

Logo, as raízes de $p(x)$ são $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, 1, i e $-i$.

Portanto, as afirmações I e II estão incorretas, enquanto que a afirmação III está correta.

19) (ITA-2012) As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio $p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \quad \text{e} \quad x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

Então, o coeficiente a é igual a

A ( ) $2(1 - \sqrt{2})$. B ( ) $2(2 + \sqrt{2})$.

C ( ) $4(\sqrt{2} - 1)$. D ( ) $4 + \sqrt{2}$.

E ( ) $\sqrt{2} - 4$.

Solução:

Escalonando o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases}$ obtém-se $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \\ -x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 + \sqrt{2} \\ \left(-\sqrt{2} - \frac{5}{2}\right)x_3 = -10 - 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x_3 = 4$

Substituindo $x_3 = 4$ no polinômio encontra-se $a = 4(\sqrt{2} - 1)$

20) (IME-96) Dados dois trinômios do segundo grau:
$y = ax^2 + bx + c$ (I)
$y = a'x^2 + b'x + c'$ (II)
Considere, sobre o eixo Ox, os pontos A e B cujas abscissas são as raízes do trinômio (I) e A'B' os pontos cujas abscissas são as raízes do trinômio (II).
Determine a relação que deve existir entre os coeficientes a, b, c, a', b', c' de modo que A'B' divida o segmento AB harmonicamente.
Solução:
Sejam x_1 e x_2 as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ e x_1' e x_2' as raízes de $a'x^2 + b'x + c' = 0$.
Pelas relações de Girard temos que: $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1x_2 = c/a$, $x_1' + x_2' = -b'/a'$ e $x_1'x_2' = c'/a'$
Se os pontos A' e B' dividem harmonicamente o segmento de reta AB, então: $\frac{\overline{AA'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{BB'}} \Rightarrow$

$\frac{x_1' - x_1}{x_2 - x_1'} = \frac{x_2' - x_1}{x_2' - x_2} \Rightarrow (x_1' - x_1)(x_2' - x_2) = (x_2' - x_1)(x_2 - x_1') \Rightarrow$

$x_1'x_2' - x_1'x_2 - x_1x_2' + x_1x_2 = x_2x_2' - x_1'x_2' - x_1x_2 + x_1x_1' \Rightarrow$

$2(x_1x_2 + x_1'x_2') = x_1x_1' + x_1x_2' + x_1'x_2 + x_2x_2' \Rightarrow 2(x_1x_2 + x_1'x_2') = (x_1 + x_2)(x_1' + x_2') \Rightarrow$

$2(c/a + c'/a') = (-b/a)(-b'/a') \Rightarrow 2(ac' + a'c) = bb'$

21) Sejam a, b, c, d números reais tais que $a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}}$, $b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}}$, $c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}}$ e $d = \sqrt{4 + \sqrt{5 + d}}$. Calcule abcd.
Solução:
Elevando ao quadrado duas vezes as equações obtemos:
$(a^2 - 4)^2 = 5 - a \Rightarrow a^4 - 8a^2 + 16 = 5 - a \Rightarrow a^4 - 8a^2 + a + 11 = 0$
$(b^2 - 4)^2 = 5 - b \Rightarrow b^4 - 8b^2 + 16 = 5 - b \Rightarrow b^4 - 8b^2 + b + 11 = 0$
$(c^2 - 4)^2 = 5 + c \Rightarrow c^4 - 8c^2 + 16 = 5 + c \Rightarrow c^4 - 8c^2 - c + 11 = 0$
$(d^2 - 4)^2 = 5 + d \Rightarrow d^4 - 8d^2 + 16 = 5 + d \Rightarrow d^4 - 8d^2 - d + 11 = 0$
Assim, a e b são 2 das 4 raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 8x^2 + x + 11$ e c e d são 2 das 4 raízes do polinômio $Q(x) = x^4 - 8x^2 - x + 11$
Aplicando $x = -c$ em P(x) temos $P(-c) = c^4 - 8c^2 - c + 11 = 0$
Aplicando $x = -d$ em P(x) temos $P(-d) = d^4 - 8d^2 - d + 11 = 0$
Assim, as raízes de P(x) são a, b, $-c$ e $-d$
Como a multiplicação das raízes P(x) é igual a 11, temos que $a.b.(-c)(-d) = 11 \Rightarrow abcd = 11$

3.7. TEOREMA DE BOLZANO

Até agora trabalhamos com os valores exatos das raízes de uma equação polinomial. Entretanto, em algumas situações a determinação de uma raiz se torna muito trabalhosa ou mesmo impossível por métodos não interativos. Quando isto ocorre, é interessante descobrir pelo menos um intervalo real que contém uma ou mais raiz da equação polinomial. O teorema seguinte dá suporte para a determinação de tal intervalo.

Teorema de Bolzano: "Sejam $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e $]a, b[$ um intervalo real aberto.
1) Se $P(a)$ e $P(b)$ têm o mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existe raízes da equação em $]a, b[$.
2) Se $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em $]a, b[$."

Demonstração:

Seja $P(x)$ um polinômio de grau n, ou seja, que possui n raízes complexas. Como se está analisando intervalos reais para raízes reais de um polinômio, não nos interessam as raízes complexas de $P(x)$. Assim, se $r_1, r_2, ..., r_k$ são suas raízes reais, pode-se escrever que $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)...(x - r_k)Q(x)$, onde $Q(x)$ é o polinômio cujas raízes são as raízes complexas de $P(x)$. Observe que para qualquer x real tem-se $Q(x) \neq 0$, ou seja, $Q(x) > 0$ para todo x real ou $Q(x) < 0$ para todo x real.
Assim, se a e b são números reais distintos, com $a < b$:
$P(a) = (a - r_1)(a - r_2)...(a - r_k)Q(a)$ e $P(b) = (b - r_1)(b - r_2)...(b - r_k)Q(b)$
Logo: $P(a).P(b) = [(a - r_1)(b - r_1)][(a - r_2)(b - r_2)]...[(a - r_k)(b - r_k)]Q(a).Q(b)$
Analisemos agora algumas características desta expressão:
i) $Q(a).Q(b)$ é sempre maior que zero, pois tanto $Q(a)$ quanto $Q(b)$ possuem o mesmo sinal;
ii) se $P(a).P(b) = 0$, então a ou b (ou ambos) é raiz de $P(x)$;
iii) caso $P(a).P(b) \neq 0$, o que define o sinal de $P(a).P(b)$ é a paridade do número que representa a quantidade de termos $(a - r_i)(b - r_i)$, com $1 \leq i \leq k$, que são negativos. Se existir uma quantidade ímpar de termos $(a - r_i)(b - r_i)$ negativos, então $P(a).P(b)$ é negativo. Caso contrário, se existir uma quantidade par de termos $(a - r_i)(b - r_i)$ negativos, então $P(a).P(b)$ é positivo;
iv) se $(a - r_i)(b - r_i) < 0$, com $1 \leq i \leq k$, então r_i pertence ao intervalo aberto $]a, b[$;
v) se $(a - r_i)(b - r_i) > 0$, com $1 \leq i \leq k$, então r_i pertence ao intervalo aberto $]a, b[$.

Diante do exposto acima, pode-se concluir que se $P(a).P(b) < 0$, então existe um número ímpar de raízes de $P(x)$ no intervalo $]a, b[$. Por outro lado, se $P(a).P(b) > 0$, então existe um número par de raízes de $P(x)$ no intervalo $]a, b[$.

Exemplos:

1) (Unesp-2002) Considere a função polinomial de 3º grau, $p(x) = x^3 - 3x + 1$.
a) Calcule $p(-2)$, $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$.
b) Com base no item (a), responda, justificando sua resposta, quantas raízes reais e quantas raízes complexas (não reais) tem $p(x)$.
Solução:
a) $p(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1$, $p(0) = 0^3 - 3.0 + 1 = 1$,
$p(1) = 1^3 - 3.1 + 1 = -1$, $p(2) = 2^3 - 3.2 + 1 = 3$
b) Como $p(-2).p(0) < 0$, $p(0).p(1) < 0$ e $p(1).p(2) < 0$, então existe um número ímpar de raízes reais de $p(x)$ em cada um dos intervalos a seguir: $]-2, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, 2[$. Entretanto, o grau de $p(x)$ é 3, implicando que $p(x)$ possui exatamente 3 raízes. Logo, os três intervalos especificados possuem cada uma raiz real de $p(x)$. Portanto, $p(x)$ possui 3 raízes reais e nenhuma complexa.

2) (ITA-91) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $12x^4 - 16x^3 - 3x + 4 = 0$. Podemos afirmar que:

a) $S \subset]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[$ b) $S \subset]-2, -1[\cup]0, 1[\cup]3, 4[$
c) $S \subset [0, 4]$ d) $S \subset]-2, -1[\cup]1, 2[\cup]3, 4[$
e) n.d a.

Solução:

Observe que:

$P(-2) = 12(-2)^3 - 16(-2)^2 - 3(-2) + 4 = -150$
$P(-1) = 12(-1)^3 - 16(-1)^2 - 3(-1) + 4 = -21$
$P(0) = 12(0)^3 - 16(0)^2 - 3(0) + 4 = 4$
$P(1) = 12(1)^3 - 16(1)^2 - 3(1) + 4 = -3$
$P(2) = 12(2)^3 - 16(2)^2 - 3(2) + 4 = 30$
$P(3) = 12(3)^3 - 16(3)^2 - 3(3) + 4 = 175$
$P(4) = 12(4)^3 - 16(4)^2 - 3(4) + 4 = 504$

Uma vez que $P(-1).P(0) < 0$, $P(0).P(1) < 0$ e $P(1).P(2) < 0$ existe um número ímpar de raízes em cada um dos intervalos: $]-1, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, 2[$.

3) (ITA-94) Seja P(x) um polinômio de grau 5, com coeficientes reais, admitindo 2 e i como raízes. Se $P(1)P(-1) < 0$, então o número de raízes reais de P(x) pertencentes ao intervalo $]-1, 1[$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Solução:

Desde que P(x) possui coeficientes reais, se i é raiz então $-i$ também é raiz. Temos então três raízes de P(x): 2, i e $-i$, sobrando ainda duas raízes desconhecidas.

Como $P(1).P(-1) < 0$ então existe um número ímpar de raízes no intervalo $]-1, 1[$. Como falta determinar somente duas mais raízes de P(x), então existe apenas uma raiz em $]-1, 1[$.

4) (IME-00) Considere a, b, e c números reais tais que $a < b < c$. Prove que a equação abaixo possui exatamente duas raízes, x_1 e x_2, que satisfazem a condição: $a < x_1 < b < x_2 < c$.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

Solução:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0 \Rightarrow \frac{(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 0 \Rightarrow$$

$(x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) = 0$

Assim, as raízes da equação $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ são as raízes do polinômio $P(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc$

Uma vez que o grau de P(x) é 2, então P(x) possui duas raízes complexas. Observe agora que:

$P(a) = (a-a)(a-b) + (a-a)(a-c) + (a-b)(a-c) = (a-b)(a-c) > 0$
$P(b) = (b-a)(b-b) + (b-a)(b-c) + (b-b)(b-c) = (b-a)(b-c) < 0$
$P(c) = (c-a)(c-b) + (c-a)(c-c) + (c-b)(c-c) = (c-a)(c-b) > 0$

Desde que $P(a).P(b) < 0$ e $P(b).P(c) < 0$, então as duas raízes de P(x) são reais e cada uma pertence a cada um dos intervalos $]a, b[$ e $]b, c[$.

3.8. TEOREMAS SOBRE RAÍZES INTEIRAS E RACIONAIS:

3.8.1. Teorema: Se p/q (p e q primos entre si) é um número racional que é raiz do polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ com coeficientes inteiros, então:

(1) q é divisor de a_0.

(2) p é divisor de a_n.

(3) $p - mq$ é um divisor de $P(m)$ para m inteiro. Em particular, $p - q$ é um divisor de $P(1)$, $p + q$ é um divisor de $P(-1)$.

Demonstração:

I) Substituindo p/q em P(x), nós obtemos, depois de multiplicar por q^n:

$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0$

Então: $a_0p^n/q = -(a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1})$ e $a_nq^n/p = -(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}q^{n-1})$

Os lados direitos das duas igualdades contêm somente inteiros, ou seja, a_0p^n/q e a_nq^n/p são inteiros.

Como p e q são primos entre si, então a_0 é divisível por q e a_n é divisível por p.

II) Rearranjando os coeficientes de P(x) em potências de $x - m$:

$P(x) = a_0(x - m)^n + c_1(x - m)^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(x - m) + c_n$

Os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são inteiros, desde que m é um inteiro, $c_n = P(m)$.

Substituindo $x = p/q$, temos: $a_0(p - mq)^n + c_1(p - mq)^{n-1}q + \ldots + c_{n-1}(p - mq)q^{n-1} + c_nq^n = 0$

Então: $c_nq^n/(p - mq) = a_0(p - mq)^{n-1} + c_1(p - mq)^{n-2}q + \ldots + c_{n-1}q^{n-1}$

Como o lado direito da igualdade é um inteiro, então $c_nq^n/(p - mq)$ é um inteiro.

Como p e q são primos entre si, então $c_n = P(m)$ é divisível por $(p - mq)$

3.8.2. Teorema: Se r é um número inteiro que é raiz do polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ com coeficientes inteiros, então r é divisor de a_n.

Demonstração:

Na verdade este teorema é um caso particular do teorema anterior, uma vez que todo número inteiro é racional, bastando fazer com que q assuma somente os valores – 1 ou 1 (que são divisores de a_0). Assim, a, as possíveis raízes racionais de P(x) são os divisores de a_n.

3.8.3. Teorema: Seja o polinômio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, com coeficientes inteiros. Se P(0) e P(1) são números ímpares, então o polinômio P(x) não possui raízes inteiras.

Demonstração:

Suponhamos que P(x) possua raízes racionais da forma p/q, onde p e q são inteiros primos entre si

De acordo com o teorema anterior, $p - q$ é um divisor de P(1), que é ímpar, ou seja, $p - q$ também é ímpar.

Como $P(0) = a_n$ é ímpar e p é um divisor de a_n, então p também é ímpar.

Como $p - q$ e p são ambos números ímpares, então q é um número par, não podendo ser igual a unidade. Assim p/q nunca vai ser igual a um número inteiro. Portanto P(x) não possui raízes inteiras.

3.8.4. Teorema: Seja $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se a_0, a_n e P(1) são números ímpares, então a equação P(x) = 0 não possui raiz racional.

Demonstração:

Vamos supor que P(x) tenha uma raiz racional p/q, p e q primos entre si e que a_0 e a_n são ímpares.

Substituindo x por p/q, impondo que P(p/q) = 0 e multiplicando a equação por q^n, temos:

$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$ (*)

Notemos que as primeiras n parcelas são divisíveis por p: $p \mid a_0q^n \Rightarrow p \mid a_0 \Rightarrow$ p é impar

Notemos que as últimas n parcelas são divisíveis por q: $q \mid a_np^n \Rightarrow q \mid a_n \Rightarrow$ q é impar

Como p e q são ambos ímpares, então a paridade de cada parcela é determinada pelos coeficientes a_i do polinômio, e a paridade de $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$ é determinada pela paridade da soma de todos os coeficientes a_i.

Como $P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$, a paridade de P(1) também é determinada pela soma dos mesmos coeficientes. Entretanto P(1) é ímpar e (*) é par (igual a zero), que é uma contradição. Portanto P(x) = 0 não possui raiz racional.

Exemplos:

1) (FGV-2001) Considere a equação polinomial $x^3 + x - 5 = 0$. Prove que ela tem uma raiz irracional entre 1 e 2.

Solução:

Inicialmente é possível notar que, sendo $P(x) = x^3 + x - 5$, tem-se $P(1) = -3$ e $P(2) = 5$. Logo, $P(1).P(2) < 0$, ou seja, existe uma raiz real no intervalo $]1, 2[$. Resta agora provar que esta raiz é irracional. As possíveis raízes racionais de $P(x)$ são da forma p/q, onde p é divisor de -5 e q é divisor de 1. Conclui-se, então, que as possíveis raízes racionais de $P(x)$ são $\{-1, +1, -5, +5\}$. Aplicando estes quatro valores em $P(x)$, verifica-se que para nenhum deles $P(x) = 0$. Assim sendo, tem-se que $P(x)$ não possui raízes racionais. Portanto, a raiz real pertencente ao intervalo $]1, 2[$ é irracional.

2) (Unifor-99) Sabe-se que todas as raízes da equação $x^4 + ax^3 + 17x^2 + bx + 6 = 0$ são números inteiros positivos. Nesse caso, há um teorema que afirma que essas raízes são divisores do termo independente da equação. De acordo com essas informações, o valor de $a + b$ é

a) -24 b) -20 c) -16 d) -8 e) -4

Solução:

As possíveis raízes inteiras da equação são os divisores de 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Porém, como é afirmado que as raízes são números inteiros positivos, os únicos valores possíveis são 1, 2, 3 e 6.

Observando os coeficientes conhecidos da equação, pode-se concluir que a multiplicação das raízes é igual a 6, ou seja, existem duas possibilidades para as raízes: 1, 1, 1 e 6 ou 1, 1, 2 e 3. Por outro lado, a multiplicação dois a dois das raízes vale 17. Comparando com os valores possíveis, a multiplicação dois a dois de 1, 1, 1 e 6 vale $1.1 + 1.1 + 1.6 + 1.1 + 1.6 + 1.6 = 21$ e a multiplicação dois a dois de 1, 1, 2 e 3 vale $1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.2 + 1.3 + 2.3 = 17$. Assim, as raízes da equação proposta são 1, 1, 2 e 3. Como 1 é raiz, aplicando na equação: $1^4 + a.1^3 + 17.1^2 + b.1 + 6 = 0 \Rightarrow a + b = -24$

3) (ITA-05) a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

b) Conclua de (a) que α é um número racional.

Solução:

a) Fazendo $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ e $b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, então: $a^3 = 2 + \sqrt{5}$ e $b^3 = 2 - \sqrt{5}$

Lembrando que $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, pode-se escrever que:

$x^3 = 4 + 3x.\sqrt[3]{4-5} \Rightarrow x^3 = 4 - 3x \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$

b) As possíveis raízes racionais de $x^3 + 3x - 4 = 0$, são da forma $\frac{p}{q}$, onde p é um divisor de -4 e q é um divisor de 1, ou seja, as possíveis raízes são: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

Substituindo todos estes valores na equação, conclui-se que 1 é raiz, logo $\alpha = 1$, ou seja, α é racional.

4) Demonstre que $\cos 20^\circ$ é um número irracional.

Solução:

Sabe-se que $\cos 3\theta = 4.\cos^3\theta - 3.\cos\theta$. Fazendo $\theta = 20^\circ$ obtemos $\cos 60^\circ = 4.\cos^3 20^\circ - 3.\cos 20^\circ \Rightarrow$

$4.\cos^3 20^\circ - 3.\cos 20^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow 8.\cos^3 20^\circ - 6.\cos 20^\circ - 1 = 0$

Desta forma, $\cos 20^\circ$ é raiz do polinômio $8x^3 - 6x - 1 = 0$. As possíveis raízes racionais desta equação são da forma p/q onde p é divisor de -1 e q é divisor de 8, ou seja, os números ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$ ou $\pm 1/8$. Aplicando na equação, verificamos que para nenhum destes valores a equação é satisfeita. Logo, pode-se afirmar que esta equação não possui raízes racionais, ou seja, $\cos 20^\circ$ é um número irracional.

5) (ITA-2011) Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que

a) todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.

b) uma única raiz está em Z e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus Z$.

c) duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não-nula.

d) não é divisível por $2x - 1$.

e) uma única raiz está em $\mathbb{Q} \setminus Z$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Solução:

As possíveis raízes racionais são 1, - 1, 2, - 2, 1/2, - 1/2

Aplicando na equação conclui-se que 1 e 1/2. Dividindo o polinômio dado por $(x - 1)(2x - 1)$ obtém-se como quociente $x^2 - 2$, cujas raízes são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Assim, a única alternativa correta é a E.

6) (Olimpíada da Rússia-2000) Sejam a e b números reais não nulos que satisfazem à equação

$$a^2b^2\left(a^2b^2+4\right)=2\left(a^6+b^6\right)$$

Mostre que pelo menos um deles não é racional.

Solução:

Suponhamos, sem perda de generalidades (pois a equação é simétrica), que a é racional.

$a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2a^6 + 2b^6 \Rightarrow 2b^6 - (a^4)b^4 - (4a^2)b^2 + 2a^6 = 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^6 - \frac{a^2}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \frac{2}{a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1 = 0.$$

Fazendo $x = \frac{b}{a}$ temos que $x^6 - \frac{a^2}{2}x^4 - \frac{2}{a^2}x^2 + 1 = 0$ (1)

Desde que a é racional, então x é racional se e somente se b é racional.

A equação (1) é uma equação algébrica de coeficientes racionais. Se esta equação possui uma solução racional x, então esta solução é igual a $\pm p/q$, onde p é um divisor do coeficiente de x^0 e q é um divisor do coeficiente de x^6. Como ambos coeficientes são iguais a 1, então as possíveis soluções racionais de (1) são ± 1.

Aplicando ± 1 em (1): $1 - \frac{a^2}{2} - \frac{2}{a^2} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{2}{a^2} = 2 \Rightarrow a^4 + 4 = 4a^2 \Rightarrow$

$a^4 - 4a^2 + 4 = 0 \Rightarrow (a^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow$ a não é racional, que é uma contradição.

Portanto, x não pode ser racional, implicando que b não é racional.

3.9. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 3º GRAU

Seja a equação geral de 3º grau: $x^3 + Ax^2 + B\,x + C = 0$. Fazendo a substituição de translação $x = y - A/3$ na equação acima, obteremos:
$y^3 + (B - A^2/3)\,y + (C - AB/3 + 2A^3/27) = 0$ e tomando $a = (B - A^2/3)$ $b = C - AB/3 + 2A^3/27$ simplificaremos a equação do terceiro grau na variável y, para $y^3 + ay + b = 0$

Como toda equação desta forma possui pelo menos uma raiz real, nós a encontraremos na forma $y = u + v$ e substituindo y por $u + v$, na última equação, obteremos $(u + v)^3 + a(u + v) + b = 0$ o que equivale a:
$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + a(u + v) + b = 0$ ou ainda $u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) + b = 0$

Usando esta última equação e impondo a condição para que: $3uv + a = 0$ e $-b = u^3 + v^3$, teremos encontrado valores de u e v para os quais $y = u + v$ será uma raiz da equação.
Estas duas últimas condições implicam que $u^3.v^3 = -a^3/27$ $u^3 + v^3 = -b$

Considerando u^3 e v^3 como variáveis, o problema é equivalente a resolver uma equação do segundo grau da forma $z^2 - Sz + P = 0$ onde S = soma das raízes = $u^3 + v^3$ e P = produto das raízes = $u^3.v^3$

Assim, basta resolver a equação do segundo grau $z^2 + bz - a^3/27 = 0$

As raízes são dadas por: $z_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$ e $z_1 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$

Como $u = \sqrt[3]{z_1}$ e $v = \sqrt[3]{z_2}$, e $y = u + v$, então temos que as raízes de $y^3 + ay + b = 0$ são dadas por: $y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$

Cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, mas a equação $u.v = -a/3$ diz que o produto de duas raízes deve ser igual a $-a/3$. Essa fórmula dá as três raízes de $y^3 + py + q = 0$, e como $x = y - A/3$, somando $-A/3$ a cada uma, nos dão as três raízes de $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$.

Exemplo:

1) Resolva a equação $x^3 - 6x - 40 = 0$.
Solução:
Sabe-se que as raízes da equação $x^3 + ax + b = 0$ são dadas por $x = u + v$, onde $u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$ e $v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$, com $u.v = -\frac{a}{3}$.

Logo, as raízes de $x^3 - 6x - 40 = 0$ são da forma $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$. Observe que cada uma destas raízes cúbicas assume três valores complexos. Entretanto, cada raiz cúbica de $20+14\sqrt{2}$ quando multiplicada por uma raiz cúbica de $20-14\sqrt{2}$ deve ser igual a 2. Por outro lado, note que:
i) $(2+\sqrt{2})^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{2} + 3.2.(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 = 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} = 20 + 14\sqrt{2}$
ii) $(2-\sqrt{2})^3 = 2^3 - 3.2^2.\sqrt{2} + 3.2.(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3 = 8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2} = 20 - 14\sqrt{2}$
Desta forma, uma das raízes cúbicas de $20+14\sqrt{2}$ é $2+\sqrt{2}$ e uma das raízes cúbicas de $20-14\sqrt{2}$ é $2-\sqrt{2}$. Além disso, $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 2$, ou seja, uma raízes da equação é $x = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$.
Utilizando a 2ª Lei de Moivre, as outras raízes são dadas por:

i) $x = (2+\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (2-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + \sqrt{6}i$

ii) $x = (2+\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + (2-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 - \sqrt{6}i$

3.10. RELAÇÕES DE NEWTON

Sejam $x_1, x_2, \ldots x_n$ as raízes da equação $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + a_4x^{n-4} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$. Pelas relações de Girard sabe-se que:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1$

$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3$

...

$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n$

Agora será desenvolvida uma técnica para o cálculo de $S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ou seja, a soma das k-ésimas potências das raízes de uma equação algébrica.

Para $k = 1$ a soma se reduz à primeira relação de Girard: $S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1 \Rightarrow S_1 + a_1 = 0$

Na determinação de S_2 pode-se fazer o seguinte:

$(x_1 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n) \Rightarrow a_1^2 = S_2 + 2a_2$ ou $S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0$

S_3 pode ser obtido observando as seguintes expressões:

$(x_1 + \ldots + x_n)(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = (x_1^3 + \ldots + x_n^3) + (x_1x_2^2 + \ldots + x_nx_{n-1}^2)$

$x_1x_2^2 + \ldots + x_nx_{n-1}^2 = (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n)(x_1 + \ldots + x_n) - 3(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)$

Somando estas duas últimas expressões: $-a_1S_2 = S_3 + a_2S_1 + 3a_3 \Rightarrow S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0$

Para o cálculo de S_4 tem-se:

$(x_1 + \ldots + x_n)(x_1^3 + \ldots + x_n^3) = (x_1^4 + \ldots + x_n^4) + (x_1x_2^3 + \ldots + x_nx_{n-1}^3)$

$x_1x_2^3 + \ldots + x_nx_{n-1}^3 = (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n)(x_1^2 + \ldots + x_n^2) - (x_1^2x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n^2)$

$-(x_1^2x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n^2) = -(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)(x_1 + \ldots + x_n) + 4(x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n)$

Somando as três equações: $-a_1S_3 = S_4 + a_2S_2 + a_3S_1 + 4a_4 \Rightarrow S_4 + a_1S_3 + a_2S_2 + a_3S_1 + 4a_4 = 0$

No caso do cálculo de S_5 pode-se fazer o seguinte:

$(x_1 + \ldots + x_n)(x_1^4 + \ldots + x_n^4) = (x_1^5 + \ldots + x_n^5) + (x_1x_2^4 + \ldots + x_nx_{n-1}^4)$

$x_1x_2^4 + \ldots + x_nx_{n-1}^4 = (x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n)(x_1^3 + \ldots + x_n^3) - (x_1^3x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n^3)$

$-(x_1^3x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n^3) = -(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)(x_1^2 + \ldots + x_n^2) + (x_1^2x_2x_3x_4 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n^2)$

$x_1^2x_2x_3x_4 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n^2 = (x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n)(x_1 + \ldots + x_n) - 5(x_1x_2x_3x_4x_5 + \ldots + x_{n-4}x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n)$

Somando as equações: $-a_1S_4 = S_5 + a_2S_3 + a_3S_2 + a_4S_1 + 5a_5 \Rightarrow S_5 + a_1S_4 + a_2S_3 + a_3S_2 + a_4S_1 + 5a_5 = 0$

Desta forma, as relações de Newton são:

$S_1 + a_1 = 0$

$S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0$

$S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0$

$S_4 + a_1S_3 + a_2S_2 + a_3S_1 + 4a_4 = 0$

$S_5 + a_1S_4 + a_2S_3 + a_3S_2 + a_4S_1 + 5a_5 = 0$

$S_6 + a_1S_5 + a_2S_4 + a_3S_3 + a_4S_2 + a_5S_1 + 6a_6 = 0$

$S_7 + a_1S_6 + a_2S_5 + a_3S_4 + a_4S_3 + a_5S_2 + a_6S_1 + 7a_7 = 0$

...

$S_n + a_1S_{n-1} + a_2S_{n-2} + a_3S_{n-3} + \ldots + a_{n-1}S_1 + n.a_n = 0$

Exemplos:

1) (ITA-79) Se a, b, c são raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, onde $r \in \Re$, podemos afirmar que o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:

a) -60 b) $62 + r$ c) $62 + r^2$ d) $62 + r^3$ e) $62 - r$

Solução:

Pelas relações de Newton:

$S_1 + a_1 = 0 \Rightarrow S_1 = 0$

$S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow S_2 + 0.S_1 + 2(-r) = 0 \Rightarrow S_2 = 2r$

$S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow S_3 + 0.(2r) + (-r).0 + 3.20 \Rightarrow S_3 = -60$

2) Sabe-se que $x - y = 5$ e $x^2 + y^2 = 13$. Calcule o valor de $x^5 + y^5$.

Solução:

Inicialmente vamos calcular o valor de x.y:

$(x + y)^2 - x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow 25 = 13 + 2xy \Rightarrow xy = 6$

Uma vez que $x + y = 5$ e $xy = 6$ então x e y são raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Pelas relações de Newton:

i) $S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow S_3 - 5S_2 + 6S_1 = 0 \Rightarrow S_3 - 5.13 + 6.5 = 0 \Rightarrow S_3 = 35$

ii) $S_4 + a_1S_3 + a_2S_2 + a_3S_1 + 4a_4 = 0 \Rightarrow S_4 - 5.35 + 6.13 = 0 \Rightarrow S_4 = 97$

iii) $S_5 + a_1S_4 + a_2S_3 + a_3S_2 + a_4S_1 + 5a_5 = 0 \Rightarrow S_5 - 5.97 + 6.35 = 0 \Rightarrow S_5 = 275$

3) (OBM-2001) Sejam a, b e c números reais não nulos tais que $a + b + c = 0$. Calcule os possíveis valores de $\dfrac{(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2}$.

Solução:

Se a, b e c são números tais que $a + b + c = 0$, então estes valores podem ser as raízes de uma equação algébrica da forma $x^3 + rx + s = 0$. Pelas relações de Newton:

$S_1 + a_1 = 0 \Rightarrow S_1 = 0$

$S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow S_2 + 0.0 + 2.r = 0 \Rightarrow S_2 = -2r$

$S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0 \Rightarrow S_3 + 0.(-2r) + r.0 + 3.s \Rightarrow S_3 = -3s$

$S_4 + a_1S_3 + a_2S_2 + a_3S_1 + 4a_4 = 0 \Rightarrow S_4 + 0.(-3s) + r(-2r) + s.0 = 0 \Rightarrow S_4 = 2r^2$

$S_5 + a_1S_4 + a_2S_3 + a_3S_2 + a_4S_1 + 5a_5 = 0 \Rightarrow S_5 + 0.(2r^2) + r(-3s) + s(-2r) = 0 \Rightarrow S_5 = 5rs$

Desta maneira:

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2(a^4 + b^4 + c^4)}{(a^5 + b^5 + c^5)^2} = \frac{(-3s)^2(2r^2)}{(5rs)^2} = \frac{18r^2s^2}{25r^2s^2} = \frac{18}{25}$$

Questões de Vestibulares

1) (UFMA-2001) Encontre um polinômio P de grau quatro tal que P(1) = P(2) = P(3) = 2.

2) (UFU-99) Dado o polinômio $p(x) = x^3 - 11x^2 + 20x - 18$ e sabendo-se que uma de suas raízes é o número complexo 1 + i, em que $i^2 = -1$ e, que a raiz real desse polinômio é um número inteiro m, então m é
a) múltiplo de 2 b) primo c) múltiplo de 3
d) divisível por 5 e) divisível por 7

3) (FGV-2000) a) Um polinômio P do 3º grau com coeficientes reais é tal que P(2) = 0 e P(2 + *i*) = 0, onde *i* é a unidade imaginária. Obtenha P sabendo-se que P(1) = 4.
b) A equação polinomial $x^3 + x^2 + x + k = 0$ tem uma raiz igual a − 1. Obtenha o valor de k e as outras raízes.

4) (UFMG-2003) Sabendo-se que p(1 + 2i) = 0, calcule todas as raízes do polinômio $p(x) = x^5 + x^4 + 13x^2 + 5x$.

5) (IBMEC-2002) Resolva a equação $x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o complexo i, em que $i^2 = -1$.

6) (UFMG-99) O número complexo 2 + i é raiz do polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 15$, em que *a* e *b* são números reais.
1. DETERMINE *a* e *b*.
2. Para os valores de *a* e *b* obtidos no item anterior, CALCULE $\frac{P(i)}{3+i}$. ESCREVA a resposta na forma *c* + *di*, sendo *c* e *d* números reais.

7) (UFBA-2002) Considerando-se $p(x) = 2x^3 + \sqrt{2}x^2 - 9x$ e q(x) um polinômio qualquer de grau 3, pode-se afirmar:
(01) Existem a, b, c ∈ R, tais que $p(x) = (a + 1)x^3 + (b - 2)x^2 - (a + b - c)x + a - c$, para qualquer x ∈ R.
(02) O grau do polinômio p(x) + q(x) é igual a 3.
(04) O número de raízes reais distintas do polinômio p(x).q(x) é, no mínimo, 3 e, no máximo, 6.
(08) Se q(0) ≠ 0, então p(x).q(x) tem pelo menos 4 raízes reais e distintas.
(16) Se o número complexo m + ni é raiz do polinômio p(x).q(x), com m, n ∈ R e n ≠ 0, então m − ni é raiz de q(x).

8) (UFAL-2003) Um polinômio f, de 3º grau e com coeficientes reais, é tal que f(− 1) = 0 e f(1 + i) = 0, sendo i a unidade imaginária. Se f(0) = − 4, determine a soma dos coeficientes de f.

9) (UFAM-2005) O número complexo 1 + i é raiz do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, em que a e b são números reais. Então $\frac{P(i)}{1-i}$ é igual a:

a) $\frac{5}{2}(1 - i)$ b) $\frac{5}{2}(1 + i)$ c) $\frac{5}{4}(1 - i)$
d) $\frac{5}{4}(1 + i)$ e) $-\frac{5}{4}(1 + i)$

10) (UFBA-2004) Considerando o polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3$, mostre que $z_1 = i$ é uma raiz de p(x), que, juntamente com as demais raízes z_2, z_3 e z_4, satisfaz à equação $z_1^2 + z_2^2 z_3^2 z_4^2 = -10$.

11) (UFC-2002) O polinômio $P(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$, em que a e b são números reais, possui o número complexo i como uma de suas raízes. Então o produto a.b é igual a:
A) − 2 B) − 1 C) 0 D) 1 E) 2

12) (UFMS-2001) Sabendo-se que a equação polinomial $x^3 + 2x^2 - ax + b = 0$, com coeficientes reais, admite o número complexo 1 − *i* como raiz, calcule o valor de *a* + *b*.

13) (UFMS-2002) São chamadas funções polinomiais reais, as funções f, de IR em IR, definidas por $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, onde n é um número natural e cada ai, i = 0, 1, 2, ..., n, é um número real. O gráfico dessas funções são curvas com crescimento e decrescimento "suaves", sem "saltos" e funções, cujos gráficos têm essa característica, são denominadas, na matemática, de .funções contínuas.. Com relação às funções polinomiais e seus gráficos, é correto afirmar que
(01) se g é a função polinomial, definida por $g(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, cujo gráfico está esboçado na **Figura 1**, então $a_4 < 0$.
(02) se g é a função polinomial, definida por $g(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, cujo gráfico está esboçado na **Figura 1**, então existe uma raiz x_0 de g tal que $x_0 > 8$.

(04) se h é a função polinomial, definida por $h(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$, cujo gráfico está esboçado na **Figura 2**, então $b_1 > 0$.
(08) sendo k a função polinomial, definida por $k(x) = c_mx^m + ... + c_1x + c_0$, cujo gráfico está esboçado na **Figura 3**, se $k(x) > 0$, para $x < -1$, e $k(x) < 0$, para $x > 4$, então m é impar.
(16) se k é a função polinomial, definida por $k(x) = c_mx^m + ... + c_1x + c_0$, cujo gráfico está esboçado na **Figura 3**, então $c_0 < 0$

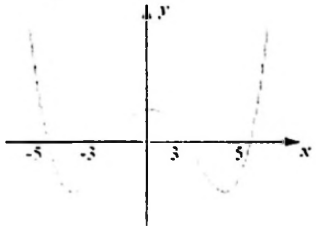


Figura 1

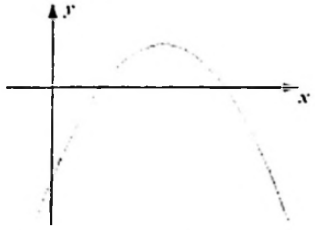


Figura 2

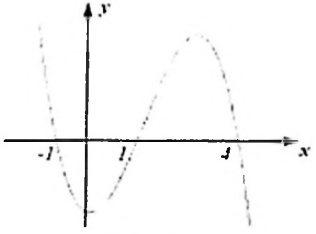


Figura 3

14) (UFRN-97) Considere os polinômios: $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ e $H(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Sabendo-se que $P(i) = H(i) = 0$, sendo $i = \sqrt{-1}$, a expressão equivalente a $\frac{P(x)}{H(x)}$ é:

A) $\frac{1-i}{1+i}$ B) $\frac{1+i}{1-i}$ C) $\frac{x-2}{x-1}$

D) 1 E) $\frac{x-3}{x-4}$

15) (UFSCar-2002) Considerando que 2i é raiz do polinômio $P(x) = 5x^5 - 5x^4 - 80x + 80$, a soma das raízes reais desse polinômio vale
a) 5. b) 4. c) 3. d) 2. e) 1.

16) (UFPel-98) Seja o polinômio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ e $1 + i$ uma de suas raízes. Localizando todas as raízes de P(x) no plano Argand-Gauss e considerando-as como vértices de uma região poligonal, calcule a área dessa região.

17) (UFRGS-2003) Um polinômio $y = p(x)$ do quinto grau com coeficientes reais é tal que $p(-x) = -p(x)$, para todo número real x. Se 1 e i são raízes desse polinômio, então a soma de seus coeficientes é:
a) – 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 5

18) (UFES-2002) O número complexo $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ é uma das raízes do polinômio $p(z) = z^4 + 2z^3 + z^2 - 1$.

a) Encontre outra raiz complexa não real de $p(z)$.

b) Escreva $p(z)$ como um produto de dois polinômios com coeficientes reais.

c) Conclua que $p(z)$ tem duas raízes reais e calcule-as.

19) (UFES-2004) Considere o polinômio $P(z) = z^5 + (a-1)z^4 + (2-a)z^3 - 4z^2 + (b+2)z - b$, sendo a e b números reais.
a) Verifique que 1 é raiz de P(z).
b) Seja Q(z) o quociente da divisão de por P(z) por $(z - 1)$. O polinômio Q(z) tem uma raiz simples (isto é, com multiplicidade um), e a soma e o produto das outras raízes de Q(z), consideradas suas multiplicidades, são $(-2 + i)$ e $(2 - 2i)$, respectivamente, sendo i a unidade imaginária. Determine os valores de a e b, e a referida raiz simples de Q(z).
c) Determine todas as raízes de P(z) e suas respectivas multiplicidades.

20) (Fuvest-2001) O polinômio $x^4 + x^2 - 2x + 6$ admite $1 + i$ como raiz, onde $i^2 = -1$. O número de raízes reais deste polinômio é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

21) (PUC/MG-97) Na função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, $f(a) = f(b) = f(-1)$. O valor de $a + b$ é:
a) 0,5 b) 1,0 c) 1,5 d) 2,5 e) 3,0

22) (Cefet/PR-2003) O produto das raízes distintas da equação $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$ é:
a) – 4. b) – 2. c) 4. d) 2. e) 1.

23) (FGV-2003) polinômio $P(x) = x^2 + x + a$ é divisível por $x + b$ e por $x + c$, em que a, b, e c são números reais, distintos e não nulos. Então $b - c$ é igual a:
a) – 1 b) –2 c) 2 d) 0 e) 1

24) (UFV-2005) O número complexo i ($i^2 = -1$) é uma das raízes do polinômio de coeficientes inteiros $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 1$. A única raiz real deste polinômio é:
a) 1/3 b) 1/4 c) 1/5 d) 1/6 e) 1/2

25) (Unesp-2001) Duas raízes x_1 e x_2 de um polinômio p(x) de grau 3, cujo coeficiente do termo de maior grau é 1, são tais que $x_1 + x_2 = 3$ e $x_1.x_2 = 2$.
a) Dê as raízes x_1 e x_2 de p(x).
b) Sabendo-se que $x_3 = 0$ é a terceira raiz de p(x), dê o polinômio p(x) e o coeficiente do termo de grau 2.

26) (UFSCar-2004) Sendo z_1 e z_2 as raízes não reais da equação algébrica $x^3 + 5x^2 + 2x + 10 = 0$, o produto z_1z_2 resulta em um número
a) natural. b) inteiro negativo.
c) racional não inteiro. d) irracional.
e) complexo não real.

27) (UFSCar-2000) Sabendo-se que a soma de duas das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ é igual a 5, pode-se afirmar a respeito das raízes que
a) são todas iguais e não nulas.
b) somente uma raiz é nula.
c) as raízes constituem uma progressão geométrica.
d) as raízes constituem uma progressão aritmética.
e) nenhuma raiz é real.

28) (UFPel-2003) Em 1799, Gauss demonstrou o teorema fundamental da álgebra: "Toda equação algébrica $P(x) = 0$ de grau n ($n \geq 1$) possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).
Considerando que as raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, representadas por $x' = \alpha - r$, $x'' = \alpha$ e $x''' = \alpha + r$, estão em PA, determine os valores dessas raízes.

29) (UFRR-2004) Considere a equação $25x^2 - 50x - 11 = 0$. Sejam r e s suas raízes. Seja $E = s^{r-2} \cdot r^{r-1} \cdot s^{s-2} \cdot r^{s-1}$. O valor de E é, aproximadamente:
a) 0,19; b) 0,50; c) 1,14;
d) 1,53; e) 2,30.

30) (Unifor-98) O polinômio $f = x^3 + 2x^2 + kx - 2$, no qual k é uma constante real, é tal que uma de suas raízes é igual à soma das outras duas. A forma fatorada desse polinômio é
(A) $(x - 1)^2 \cdot (x + 2)$ (B) $(x + 1)^2 \cdot (x - 2)$
(C) $(x - 1)^2 \cdot (x - 2)$ (D) $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)$
(E) $(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

31) (UFSC-2003) Assinale no cartão-resposta a soma dos números associados à(s) proposição(ões) CORRETA(S).
01. A equação polinomial $x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$ possui as raízes a, b e c. Logo, a soma $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a 12.
02. O resto da divisão do polinômio $x^6 - x^4 + x^2$ por $x + 2$ é 52.
04. Dado o polinômio $p(x) = x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 28x + 12$ é correto afirmar que -2 é raiz de multiplicidade 3 para $p(x)$.
08. Para que o polinômio $p(x) = (a + b)x^2 - (a - b + c)x + (b + 2c - 6)$ seja identicamente nulo, o valor de c é 4.

32) (UFS-2011) Analise as sentenças abaixo, considerando a, b, c, d, k números reais.
(0) Se as três raízes inteiras da equação $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ formam uma progressão aritmética, então b é múltiplo de 3.
(1) Se uma equação polinomial com coeficientes reais admite as raízes 1, $1 + i$ e $\sqrt{2}$, seu grau pode ser igual a 3.
(2) Se as dimensões de um paralelepípedo retângulo, em centímetros, são as raízes da equação $x^3 - 10x^2 + 31x + k = 0$, a diagonal desse paralelepípedo mede $\sqrt{38}$ cm.
(3) A equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ admite exatamente duas raízes reais no intervalo [1, 2].
(4) Se $x = 3$ é raiz da equação $x^3 - 5x^2 + 8x + k = 0$, então suas outras raízes não são reais.

33) (UEM-2011) Sobre o polinômio $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 3$, assinale o que for correto.
01) P(x) é divisível por $Q(x) = x^2 + bx + c$, se

b = c = −2.
02) Se P(x) possui somente raízes racionais e todos os seus coeficientes são números inteiros, então, P(x) possui somente raízes inteiras.
04) Se i e $\sqrt{3}i$ são raízes desse polinômio, então, b = 0.
08) A soma dos inversos das raízes, levando-se em conta suas multiplicidades, é $-\sqrt{3}$.
16) Se P(x) possui somente raízes inteiras, então, alguma raiz possui multiplicidade maior do que 1.

34) (UFPE-99) Suponha que $1+\sqrt{3}$ é raiz da cúbica $x^3 + ax + b = 0$ com a, b inteiros. Indique $a^2 + b^2$.

35) (UFU-2002) Se a, b e c são raízes de $x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$, então

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

c) $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ d) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-1$

36) (Fatec/SP-2002) Foi apresentado a um exímio calculista, conhecido como o "homem que calculava", o sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{37}{30} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{2} \\ x_1x_2x_3 = \frac{1}{15} \end{cases}$$

e ele rapidamente respondeu: "*Uma solução do sistema é* $x_1 = 1/3$; $x_2 = 1/2$; $x_3 = 2/5$." Em seguida perguntaram-lhe: *qual a soma dos quadrados das raízes da equação* $30x^3 - 37x^2 + 15x - 2 = 0$? De pronto, ele respondeu corretamente. A sua resposta foi:
a) 7/300 b) 47/450 c) 101/600 d) 437/750 e) 469/900

37) (UFPR-2001) Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + d$, onde d é número real. Assim, é correto afirmar:
(1) Para que p(x) seja divisível por (x − 1), é necessário que d seja igual a 2.
(2) Se d = 0, então o número complexo 2 + i é raiz da equação p(x) = 0.
(3) Se as raízes da equação p(x) = 0 forem as dimensões, em centímetros, de um paralelepípedo reto retângulo, então a área total desse paralelepípedo será 10 cm^2.
(4) Se d = −1, então p(1) = 1.
(5) Na expressão p(a − 1), o termo independente de a é (2 − d).

38) (UFPR-2004) Sabendo-se que i, 3 e $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{14}$ são raízes de $p(x) = x^6 - 6x^5 + 7x^4 - x^3 + 18x^2 + ax + 12$, onde i é a unidade imaginária e a é número real, é correto afirmar:
(1) 1 também é raiz de p(x).
(2) 4 também é raiz de p(x).
(3) O produto das raízes de p(x) é 14.
(4) p(x) é divisível por $x^2 + x + 1$.

39) (Fatec/SP-2003) Uma das raízes da equação $x^3 + 3x^2 + 2x - 120 = 0$ é um número inteiro positivo menor do que 5. Outra das raízes é

a) $\frac{71}{13}$ b) $\frac{\sqrt{71}}{13}$ c) $-\frac{7i}{13}$

d) $\frac{-7-\sqrt{71}}{2}$ e) $\frac{-7-i\sqrt{71}}{2}$

40) (UFU-2004) Seja $p(x) = x^5 + ax^4 + 5x^3 - 15x^2 + 4x - 12$, em que a é um número inteiro. Sobre este polinômio, a única afirmação FALSA é
a) para todo número inteiro *m*, $p(m)$ é um número inteiro.
b) $p(x)$ possui raiz real.
c) $p(x)$ possui raiz racional não inteira.
d) se o número complexo $2i$ (em que $i^2 = -1$) é raiz de $p(x)$, então, $a = -3$.

41) (UFPE-2011) Se as raízes da equação $x^3 - 7x^2 - 28x + k = 0$ são termos de uma progressão geométrica, determine e assinale o valor do termo constante k.

42) (Mackenzie-2002) O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 - bx + c$, com a, b e c reais, admite as raízes 1 e i. Então a − b − c é:
a) −3 b) 1 c) −1 d) 3 e) −2

43) (Mackenzie-2003) Se $p(x) = 4x^3 - 16x^2 - x + m$, m real, admite duas raízes opostas, o valor de m é:
a) 3 b) −2 c) 2 d) −4 e) 4

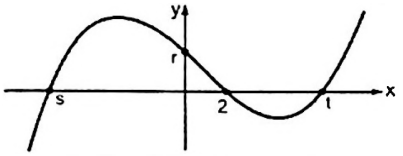
44) (Mackenzie-2004) Para que a equação $x^3 - kx + 2 = 0$ admita uma raiz real dupla, o valor de k deve ser:
a) −2 b) 2 c) −4 d) 3 e) −3

45) (FGV-2002) Sejam r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = 0$. Calcule o valor da expressão: $\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_2 r_3}$.

b) Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes vale 4.

46) (FGV-2004) A equação $2x^3 - 8x^2 + mx - 16 = 0$, sendo m um número real, tem raízes a, b e c, tais que a = b + c. Determine o valor de S, tal que $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{ac}$.

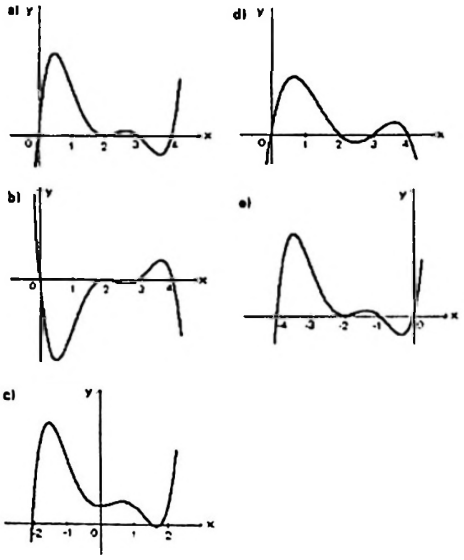
47) (FGV-2004) O gráfico representa a função polinomial $P(x) = x^3 - 2x^2 - 49x + 98$.



Sendo r, s, t e 2 as únicas intersecções do gráfico com os eixos, o valor de $\frac{r}{s.t}$ é:

a) −5. b) −4. c) −3. d) −2. e) −1.

48) (Fuvest-2002) Dado o polinômio $p(x) = x^2 (x - 1) (x^2 - 4)$, o gráfico da função $y = p(x - 2)$ é melhor representado por:



49) (Unifor-99) Se a equação $x^3 - mx^2 - x + 2 = 0$, com $m \in R$, admite duas raízes reais opostas, determine a terceira raiz.

50) (Mackenzie-99) Se a soma dos quadrados das raízes da equação $x^3 - Kx^2 - x + K = 0$, $K > 0$, é 11, então a maior raiz da mesma é:

a) 2 K b) K/3 c) K/2 d) − K e) K

51) (PUC/RS-99) O valor de n de modo que a equação $x^3 + n.x - 2 = 0$ admita uma raiz dupla é

a) − 3 b) − 2 c) 2 d) 3 e) 4

52) (PUC/RS-2000) Sabendo que a soma dos inversos das raízes da equação $x^4 + 3x^3 + m.x^2 + 2m.x + m + 1 = 0$ é igual a $-\frac{5}{2}$, o valor de m é

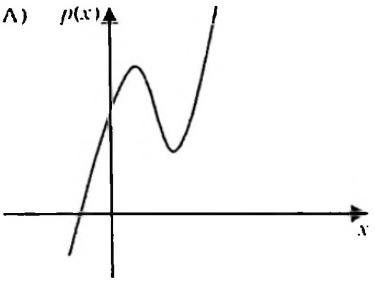
a) 9 b) - 5 c) $-\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{5}$ e) $-\frac{5}{9}$

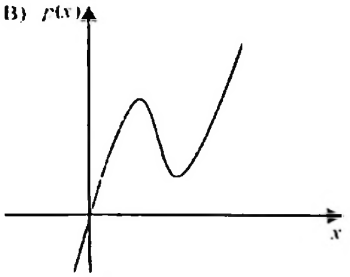
53) (PUC/SP-2001) Sabe-se que o polinômio $f = x^3 + 4x^2 + 5x - k$ admite três raízes reais tais que uma delas é a soma das outras duas. Nessas condições, se k é a parte real do número complexo $z = k + 2i$, então z

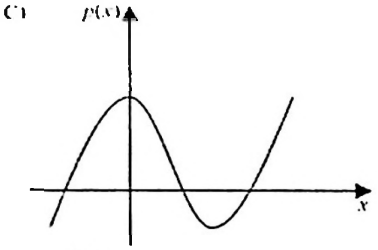
a) é um imaginário puro.
b) tem módulo igual a 2.
c) é o conjugado de $-2 - 2i$.
d) é tal que $z^2 = 4i$.
e) tem argumento principal igual a 45°.

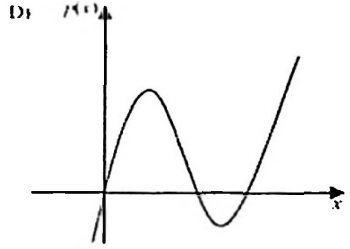
54) (UFU-2004) Sabe-se que o número complexo $1 + i$, em que $i^2 = -1$, é raiz do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que a, b e x são números reais e $c > 0$. Sabe-se que também que uma, e apenas uma, das quatro alternativas abaixo representa parte do gráfico de p(x). Pode-se então, afirmar que a alternativa que representa parte do gráfico de p(x) é

A)



B) 

C) 

D) 

55) (UFSE-2004) Para analisar as afirmações seguintes, considere que o conjunto universo das equações dadas seja C, conjunto dos números complexos.
(0) A equação $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$ admite a raiz 1 com multiplicidade 5.
(1) Se $-1 + i$ é raiz da equação $3x^3 + 7x^2 + kx + 2 = 0$, então k é igual a 8.
(2) Se a equação $4x^4 + 12x^2 - x + k = 0$, em que k é uma constante real, admite duas raízes opostas, o produto de suas raízes é $-3/4$.
(3) Se as raízes da equação $x^3 + 3x^2 + kx + t = 0$ são números inteiros consecutivos, então $k + t = 4$.
(4) A equação $(x + 2)(1 - x)(x + 3) = 0$ é equivalente à equação $x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$.

56) (UECE-2003) O valor de k para que as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + kx + 64 = 0$ estejam em progressão geométrica é:
a) – 30 b) – 24 c) – 18 d) – 12

57) (UECE-2004) Se o número 2 é uma raiz de multiplicidade dois da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$, então o valor de a + b é:
a) – 11 b) 11 c) – 12 d) 12

58) (UECE-2004) Se as raízes da equação $x^3 + px^2 + qx = 0$ são não negativas e formam uma progressão aritmética, então podemos afirmar corretamente:
a) $p.q > 2$ b) $1 < p.q < 2$
c) $0 < p.q < 1$ d) $p.q < 0$

59) (Unicap-2003) Seja a função polinomial com coeficientes inteiros e definida no conjunto dos números complexos $F(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$.
I - II
0 - 0 Se $a \neq 0$, então F(x) tem cinco raízes no conjunto dos números complexos.
1 - 1 Se $F(x_0) = 0$, e x_0 é um número complexo, então o conjugado de x_0 também é raiz do polinômio.
2 - 2 Se $a \neq 0$, então existe ao menos um número real x_0 tal que $F(x_0) = 0$.
3 - 3 Se $a + b + c + d + e + f = 0$, então $F(1) = 0$.
4 - 4 Se $a = 1$ e x_0 é um número inteiro tal que $F(x_0) = 0$, então x_0 é um divisor de f.

60) (UFMS-2001) A resolução de equações algébricas do segundo grau é um tópico da Matemática conhecido desde a Antigüidade, no entanto, os primeiros resultados relativos a equações de grau superior a 2 só apareceram na época do Renascimento. A busca de soluções algébricas gerais para equações de qualquer grau propiciou o surgimento de importantes resultados dentro da Matemática, além do desenvolvimento de novas teorias. Os números complexos são um exemplo disso. Assim, se i é a constante imaginária tal que $i^2 = -1$, com base nas propriedades de polinômios, equações algébricas e números complexos, é correto afirmar que
(01) a equação $3x^4 + 4x^3 - 4x - 3 = 0$ tem duas raízes reais distintas e duas raízes complexas.
(02) a soma dos coeficientes dos termos do polinômio $p(x) = (3x - 1)^5$ é maior do que 50.
(04) a constante imaginária i é solução da equação $x + x^2 + x^3 + ... + x^{2008} = 0$.
(08) a equação $x^8 - 7x^5 + 3x^2 + x - 1 = 0$ não tem raízes inteiras.

(16) sabendo-se que $2i$ e i são raízes da equação $x^6 + x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 4x + 4 = 0$, então essa equação possui duas raízes irracionais distintas.

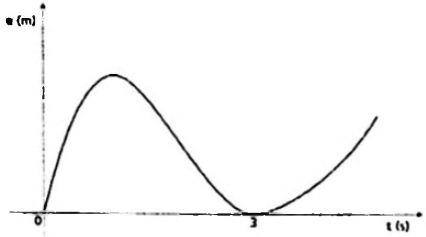
61) (Unifor-2000) Considerando que a equação $3x^3 + x^2 - 6x - 2 - 0$ admite uma raiz racional negativa, é correto afirmar que suas demais raízes são números
a) irracionais. b) não reais.
c) inteiros positivos. d) inteiros negativos.
e) racionais e não inteiros.

62) (UEL-2003) Sobre a equação $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, é correto afirmar que:
a) Possui três raízes imaginárias puras.
b) Possui três raízes reais cuja soma é 1.
c) Possui três raízes reais cuja soma é 3.
d) Possui duas raízes reais e uma imaginária pura.
e) Possui uma raiz real e duas imaginárias puras.

63) (UFRN-2005) Duas partículas se movimentam no plano de acordo com as trajetórias dadas pelas funções $f(t) = t^3$ e $g(t) = 2t + 1$. Após uma delas cruzar a origem, o instante t em que elas se encontram tem o valor de
a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $\frac{1+\sqrt[3]{5}}{2}$
c) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{1-\sqrt[3]{5}}{2}$

64) (UFU-2000) Sabendo-se que as raízes de $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + 8$ formam uma PG de razão 2, então A é igual a
a) – 4 b) 7 c) 5 d) – 3

65) (UERJ-2003) Um ciclista e um corredor começam, juntos, uma competição. A curva abaixo, cuja equação é $e = t^3 + at^2 + bt + c$, representa a posição e, em metros, do ciclista, em função do tempo t, em segundos, em que a, b, e c são números reais fixos.



No instante em que o ciclista parte da posição zero, o corredor inicia um movimento, descrito pela equação $e = 4t$, na mesma pista e no mesmo sentido. Determine a posição mais afastada da origem na qual o ciclista e o corredor voltam a se encontrar.

66) (FEI-2012) Se i é raiz da equação $x^4 + kx^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$, então a soma das demais raízes dessa equação é:
(A) 2–i (B) 2i (C) 2+i
(D) 2 (E) 3i

67) (Fuvest-2001) Considere dois números reais λ e μ tais que $\lambda \neq -1$, $\mu \neq 1$ e $\lambda\mu \neq 0$.
a) Determine uma relação entre λ e μ, para que as equações polinomiais $\lambda x^3 - \mu x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ e $\lambda x^2 - x - (\lambda + 1) = 0$ possuam uma raiz comum.
b) Nesse caso, determine a raiz comum.

68) (Fuvest-2002) As raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 + m$, onde m é um número real, estão em progressão aritmética. Determine:
a) o valor de m;
b) as raízes desse polinômio.

69) (Fuvest-2004) O produto de duas das raízes do polinômio $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x - 3$ é igual a –1. Determinar
a) o valor de m.
b) as raízes de p.

70) (UFPE-2012) O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + 19$ tem coeficientes a, b números inteiros, e suas raízes são inteiras e distintas. Indique $|a| + |b|$.

71) (UEM-2013) Sabendo que a, b e c são números inteiros e que o número complexo $2 + i$ é zero (raiz) do polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$, assinale o que for correto.
01) Esse polinômio possui outra raiz complexa, cujo módulo é $\sqrt{5}$.
02) O argumento de $2 + i$ é superior a $\pi/4$ rad.
04) Todas as raízes reais desse polinômio são inteiras.
08) Se 1 é raiz desse polinômio, então $a = c$.
16) É possível escolher os inteiros a, b e c, de modo que o polinômio não possua raízes reais.

72) (AFA-2001) A soma dos quadrados das raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 4x + 1 = 0$ é

a) 10 b) 11 c) 12 d) 14

73) (AFA-2003) Seja a > 1 e e a base dos logaritmos neperianos, o valor real de m para o qual a equação $x^3 - 9x^2 + (\log_e a^m + 8)x - \log_e a^m = 0$ tenha raízes em progressão aritmética, é dado por

a) $m = \log_e a - 8$ c) $m = \dfrac{15}{\log_e a}$

b) $m = \log_e a - 9$ d) $m = -\dfrac{9}{8}\log_e a$

74) (Escola Naval-99) As raízes da equação $64x^3 - 56x^2 + 14x - 1 = 0$ estão em progressão geométrica. Podemos afirmar que essas raízes pertencem ao intervalo:

a) $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ b) $\left[-1, \frac{1}{10}\right]$ c) $\left[-2, \frac{-1}{6}\right]$

b) $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$ e) $\left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{10}\right]$

5) (Escola Naval-2003) Se uma das raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + 1 = 0$ é a média harmônica das outras duas, então $9pq - 2q^3$ é igual a

a) 18 b) 24 c) 27 d) 36 e) 81

76) (AFA-99) Sendo a unidade imaginária uma das raízes da equação $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, pode-se afirmar que esta equação

a) não tem raízes reais.
b) tem duas raízes racionais.
c) possui duas raízes irracionais.
d) possui uma raiz de multiplicidade 2.

77) (AFA-2003) Marque a alternativa correta.

a) Se a unidade real é raiz de multiplicidade k da equação $P(x) = 0$, então $P(x)$ é divisível por $(x - 1)^m$, com $0 \le m \le k$ e m inteiro

b) A equação de coeficientes reais $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$, pode ter duas raízes NÃO reais conjugadas se $a_0 = a_1 = a_3 = 0$, $a_2 > 0$ e $a_4 < 0$

c) Se $P(x) = 0$ tem 1, 2 e 3 como raízes, e se $P(x)$ é um polinômio não nulo de grau m, então $m > 3$

d) Considerando i a unidade imaginária, se a equação $x^3 + bx + c = 0$, $\{b, c\} \subset C$, admite $\alpha + \beta i$ ($\alpha \in \Re$ e $\beta \in \Re^*$) como raiz, necessariamente admitirá também a raiz $\alpha - \beta i$

78) (AFA-2005) Escolha a opção INCORRETA.

a) O polinômio $P(x) = x^5 - 12x^4 + \sqrt{3}x^2 - 1$ tem pelo menos uma raiz real.

b) Toda equação polinomial de grau n admite, no máximo, n raízes reais.

c) Toda equação polinomial de grau n admite exatamente n raízes complexas.

d) Se α e β são números reais positivos e a equação $\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \beta = 0$ admite duas raízes simétricas, então todas as suas raízes são reais.

79) (Escola Naval-2002) Sejam a = 2 + i, b e c as raízes do polinômio $3x^3 - 14x^2 + mx - 10 = 0$, onde e e m são números reais. O valor de $\log_2(ab + \frac{9}{2}c)$ é:

a) 3 b) 3/2 c) 1 d) ½

80) (PUC/PR-2012) Numa equação algébrica, três das suas raízes são números inteiros consecutivos e a quarta raiz é a média aritmética das outras três. Sendo essa equação do 4º grau, pode-se afirmar que:

A) A equação possui uma raiz que é um número irracional.
B) A equação possui uma raiz de multiplicidade 2
C) A equação possui uma raiz que não é um número real.
D) A equação possui quatro raízes distintas;
E) Apenas uma raiz da equação é um número impar.

81) (FGV-2012) Sendo m um número inteiro, considere a equação polinomial $3x^4 + 2x^3 + mx^2 - 4x = 0$, na incógnita x, que possui uma raiz racional entre – 4/5 e – 1/2 . Nessas condições, a menor raiz irracional da equação é igual a

a) $-\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

82) (UFRJ-99) Encontre as raízes de $x^3 - 15x^2 + 66x + 80 = 0$, sabendo que são reais e estão em progressão aritmética.

83) (FGV-2011) O polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ tem o número 1 como raiz dupla. O valor absoluto da diferença entre as outras raízes é igual a:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

84) (FGV-2004) Podemos afirmar que a equação $x^6 - 5x^5 + 10x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = 0$ admite:
a) duas raízes duplas e duas raízes simples.
b) duas raízes duplas e uma raiz tripla.
c) uma raiz simples, uma raiz dupla e uma raiz tripla.
d) uma raiz tripla e três raízes simples.
e) duas raízes triplas.

85) (AFA-98) As raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ formam uma Progressão Geométrica de razão
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

86) (Escola Naval-91/92) O valor de a para o qual duas das raízes da equação $x^3 + ax^2 - 2x + 6 = 0$ são simétricas é:
a) – 3 b) – 1 c) 0 d) 1 e) 3

87) (UNESP-98) Os coeficientes do polinômio $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ são números inteiros. Supondo que f(x) tenha duas raízes racionais positivas distintas,
a) encontre todas as raízes desse polinômio;
b) determine os valores de a e b.

88) (Fuvest-89) A equação $x^3 - 2x^2 - x + 14 = 0$ tem uma raiz inteira r e duas imaginárias s e t.
a) Determine as raízes r, s e t.
b) Determine uma equação cujas raízes são $1/r$, $1/s$ e $1/t$.
c) Determine a equação cujas raízes são st, rt e rs.

89) (Fuvest-95) Sabe-se que o produto de duas raízes da equação algébrica $2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$ é igual a 1. Então o valor de k é:
a) – 8 b) – 4 c) 0 d) 4 e) 8

90) (Fuvest-2011) As raízes da equação do terceiro grau $x^3 - 14x^2 + kx - 64 = 0$ são todas reais e formam uma progressão geométrica. Determine
a) as raízes da equação;
b) o valor de k.

91) (Fuvest-96) Seja $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de p(x) são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares têm o polinômio p(x)?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

92) (Fuvest-96) O número de raízes complexas, que não são reais, do polinômio $p(x) = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n+1}$ $(n > 1)$ é:
a) 2n + 1 b) 2n c) n + 1 d) n e) 1

93) (Fuvest-97) P(x) é um polinômio cujas raízes formam uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 2. O coeficiente do termo de mais alto grau de P(x) é 1 e o termo independente é igual a 2^{21}. O grau do polinômio é:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

94) (Fuvest-97) Suponha que o polinômio de 3º grau $P(x) = x^3 + x^2 + mx + n$, onde m e n são números reais, seja divisível por x – 1.
a) Determine n em função de m.
b) Determine m para que P(x) admita raiz dupla ≠ de 1.
c) Que condições m deve satisfazer para que P(x) admita três raízes reais e distintas?

95) (Fuvest-99) Se a equação $8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$ tem raízes reais a e $-a$, então o valor de k é:
a) 9/4 b) 2 c) 9/8 d) – 2 e) – 4

96) (Unicamp-92) Mostre que as raízes de $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ são também raízes de $x^6 - 1 = 0$. Calcule essas raízes.

97) (UFSCar-2007) Considere a equação algébrica $-x^4 + kx^3 - kx^2 + kx - 4 = 0$, na variável x, com $k \in C$.
a) Determine $k = a + bi$, com a e b reais, para que o número complexo 2i seja uma das raízes da equação.
b) Determine todas as raízes da equação quando k = 5.

98) (Unicamp-93) Ache todas as raízes (inclusive as complexas) da equação $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

99) (Unicamp-96) Encontre os valores inteiros de m para os quais a equação: $x^3 - mx^2 + mx - m^2 = 1$ tem pelo menos uma raiz inteira. Para cada um desses valores de m, ache as 3 raízes das equações (do terceiro grau) correspondentes.

100) (Unicamp-98) a) Qual é o valor de l na equação: $z^3 - 5z^2 + 8z - l = 0$ de modo que $z = 3$ seja uma raiz dessa equação?

b) Para esse valor de t, ache as três raízes z_1, z_2, z_3 dessa equação.

101) (Unicamp-99) a) Resolva a equação: $x^4 - 5x - 6 = 0$.
b) Mostre que, se a e b são números reais e se não ambos nulos, então as raízes da equação $x^4 + ax + b = 0$ não podem ser todas reais.

102) (AFA-98) A equação $7x^4 - 5x^3 + (R - 6)x^2 + (3S - 2)x + T - 9 = 0$ tem uma raiz tripla em $x = 0$. O Produto R.S.T é
a) −18 b) −14 c) 16 d) 36

103) (ITA-60) Demonstrar que se a equação $x^3 + ax + b = 0$ $(ab \neq 0)$ tiver uma raiz dupla, então a será sempre positivo.

104) (ITA-68) Para que a equação $2x^4 + bx^3 - bx^2 - 2 = 0$ tenha quatro soluções reais e distintas devemos ter:
a) b um número real qualquer b) $b = 0$
c) $b > 0$ d) $b < -1$ e) $b > 4$

105) (ITA-68) A equação $3x^5 - x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$ possui:
a) três raízes complexas e duas raízes reais.
b) pelo menos uma raiz real positiva.
c) todas raízes inteiras.
d) uma raiz complexa.
e) n.r.a.

106) (ITA-69) Seja $x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 4x - 2 = 0$. Assinale a afirmação correta com relação à esta equação.
a) não tem raízes reais positivas.
b) não tem raízes reais negativas.
c) só tem raízes complexas.
d) tem duas raízes negativas.
e) nenhuma das anteriores.

107) (ITA-71) Uma solução da equação $24x^5 - 4x^4 + 49x^3 - 2x^2 + x - 29 = 0$ é:
a) $x = 2/3$ b) $x = 11/12$ c) $x = 3/4$
d) $x = 4/3$ e) N.d.r.a.

108) (ITA-72) A soma dos quadrados das raízes da equação $2x^3 - 8x^2 - 60x + k = 0$ (k constante) é:
a) $76 + k^2$ b) $(34 + k)^2$ c) 66 d) 76 e) nra

109) (ITA-73) Seja a equação do 4° grau $x^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, onde q, r, s, t, são números racionais não nulos tais que: L, M, N, P são raízes dessa equação. O valor de

$$\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN}$$ é:

a) $(q^2 - 2r)/t$ b) $(q^2 - r + s)/t$ c) $(q^2 - r)/t$
d) $q/r + r/s + s/t + t/q$ e) n.d.a.

110) (ITA-81) Considere a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Qual das relações é verdadeira?
a) $p^2 = rq$ b) $2p + r = q$ c) $3p^2 = r^2q$
d) $p^3 = rq^3$ e) $q^3 = rp^3$

111) (ITA-83) As equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + nbx + 12 = 0$, onde a e b são constantes reais e n um inteiro, têm duas raízes comuns. Das afirmativas abaixo, qual é a verdadeira?
a) As raízes não comuns às equações têm sinais opostos.
b) As raízes não comuns às equações são negativas quando a é negativo.
c) A soma das raízes não comuns às equações é 5.
d) b e n possuem o mesmo sinal.
e) As raízes comuns às equações dependem de n.

112) (ITA-84) Os coeficientes do trinômio $x^2 + bx + c$ constituem, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão não nula $r = \frac{q}{2}$, onde q é a razão da progressão aritmética $b^2 - 1$, $c^2 - b^2$. Nestas condições podemos afirmar que o trinômio apresenta:
a) uma raiz nula
b) duas raízes reais distintas
c) duas raízes iguais
d) duas raízes complexas
e) nenhuma raiz

113) (ITA-76) A soma dos quadrados das raízes da equação $x^3 + \sqrt{5}x^2 + 2\sqrt{3}x + 8 = 0$ é igual a:
a) 5 b) $5 - 4\sqrt{3}$ c) $12\sqrt{5}$
d) $9 - \sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ e) nda

114) (ITA-76) A equação $4x^3 - 3x^2 - 4x - 3 = 0$ admite uma raiz igual a i (unidade imaginária). Deduzimos, então, que
a) tal equação não admite raiz real, menor que 2.

b) tal equação admite como raiz, um número racional.
c) tal equação não admite como raiz, um número positivo.
d) tal equação não possui raiz da forma bi, com $b < 1$.
e) n.d.r.a.

115) (ITA-87) O número de soluções reais da equação: $\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^6 x + \text{sen}^8 x + \text{sen}^{10} x = 5$ é:
a) um número maior que 12 b) zero c) 2
d) 10 e) 1

116) (ITA-88) Sejam a, b e c constantes reais com $a \neq 0$ formando, nesta ordem, uma progressão aritmética e tais que a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é $-\sqrt{2}$. Então uma relação válida entre b e c é:

a) $c = \frac{b}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)$ b) $c = b(2-\sqrt{2})$

c) $c = b(\sqrt{2}-1)$ d) $c = b\sqrt{2}$

e) $c = \frac{b}{2}(4-\sqrt{2})$

117) (ITA-91) Os valores de m de modo que a equação $x^3 - 6x^2 - m^2x + 30 = 0$ tenha duas de suas raízes somando um, são:
a) 0 b) $\sqrt{3}$ e 3 c) 1 e – 1
d) 2 e – 2 e) nda

118) (ITA-93) Considere a equação de coeficientes reais

$$x^5 + mx^4 + 2\frac{P}{m}x^3 - 316x^2 + 688x + P = 0,\ m \neq 0$$

para a qual $1 + 3i$ é raiz. Sabendo-se que a equação admite mais de uma raiz real e que suas raízes reais formam uma progressão geométrica de razão inteira q cujo produto é igual a 64, podemos afirmar que P/m é igual a:
a) 20 b) 30 c) 40 d) 120 e) 160

119) (ITA-94) As raízes da equação de coeficientes reais $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Então $a^2 - b^2 + c^2$ é igual a:
a) 190 b) 191 c) 192 d) 193 e) 194

120) (ITA-95) Sabendo que $4 + i\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são raízes do polinômio $2x^5 - 22x^4 + 74x^3 + 2x^2 - 420x + 540$, então a soma dos quadrados de todas as raízes reais é:
a) 17 b) 19 c) 21 d) 23 e) 25

121) (ITA-96) Considere o polinômio: $P(z) = z^6 + 2z^5 + 6z^4 - 12z^3 - 8z^2 + 16z$
a) Apenas uma é real.
b) Apenas duas raízes são reais e distintas.
c) Apenas duas raízes são reais e iguais.
d) Quatro raízes são reais, sendo duas a duas distintas.
e) Quatro raízes são reais, sendo apenas duas iguais.

122) (ITA-97) Sejam a_1, a_2, a_3 e a_4 números reais formando, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente com $a_1 \neq 0$. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $a_1x^3 - a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$. Se $x_1 = 2i$, então:
a) $x_1 + x_2 + x_3 = -2$ b) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ d) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 8$
e) $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 5$

123) (ITA-99) Seja p(x) um polinômio de grau 3 tal que $p(x) = p(x + 2) - x^2 - 2$, para todo $x \in R$. Se -2 é uma raiz de p(x), então o produto de todas as raízes de p(x) é:
a) 36 b) 18 c) – 36 d) – 18 e) 1

124) (ITA-2001) O valor da soma a + b para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão 1/2 é.
a) 36 b) 41 c) 26 d) – 27 e) –20

125) (ITA-2002) Sabendo que a equação $x^3 - px^2 = q^m$, p, $q > 0$, $q \neq 1$, $m \in N$, possui três raízes reais positivas a, b, e c, então

$$\log_q\left[abc\left(a^2+b^2+c^2\right)^{a-b+c}\right]$$ é igual a:

a) $2m + p\log_q p$ d) $m - p\log_q p$
b) $m + 2p\log_q p$ e) $m - 2p\log_q p$
c) $m + p\log_q p$

126) (ITA-2003) Seja $k \in \mathbb{R}$ tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2, distinta de x_1. Então, $(k + x_1)\,x_2$ é igual a:
a) – 6 b) – 3 c) 1 d) 2 e) 8

127) (ITA-2004) Dada a equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$, em que m é uma constante real, considere as seguintes afirmações:
I – Se $m \in]-6, 6[$, então existe apenas uma raiz real.
II – Se $m = -6$ ou $m = +6$, então existe raiz com multiplicidade 2.
III - $\forall m \in \mathbb{R}$, todas as raízes são reais.
Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas.
a) I b) II c) III d) II e III e) I e II

128) (ITA-2005) O número complexo $2 + i$ é raiz do polinômio $f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q$ com $p, q \in \mathbb{R}$. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é
a) 4 b) – 4 c) 6 d) 5 e) – 5

129) (IME-70) Sabendo que a equação $x^3 + mx^2 + n = 0$ (m, n reais) admite raízes complexas de módulo β, exprima m em função de n e β.

130) (IME) Determine as raízes comuns a
$x^4 - 16x^3 + 89x^2 - 206x + 168 = 0$ e
$x^4 - 16x^3 + 91x^2 - 216x + 180 = 0$

131) (IME) $ax^2 + bx + c = 0$ e $mx^2 + nx + p = 0$ ($am - bm \neq 0$) possuem uma raiz comum. Determine-a.

132) (IME) Determine k para que a equação: $x^4 - 14x^2 + 24x - k = 0$ tenha quatro raízes desiguais.

133) (IME-65/66) Dadas as equações:
$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$
$$A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1 = 0$$
sabendo que duas raízes da primeira equação são também raízes da segunda e que $\frac{A_1}{A} = \frac{C_1}{C}$, determine as raízes comuns.

134) (IME-70) As três raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ são a, b, c. Se $S_n = a^n + b^n + c^n$, com n inteiro e $n > 3$, sendo $K = S_n + pS_{n-1} + qS_{n-2} + rS_{n-3}$ calcule K.

135) (IME-70) Calcule as raízes da equação $2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 = 0$ sabendo que uma das raízes é real, da forma n/d, sendo n e d inteiros positivos e primos entre si.

136) (IME-75) Dada a equação: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, determine a relação entre os seus coeficientes para que a soma de duas raízes seja igual a soma de outras duas.

137) (IME-75) Resolva a equação: $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x - 5 = 0$, sabendo-se que a soma de duas raízes é igual a soma das outras duas.

138) (IME-77) Sejam x_1 e x_2 raízes da equação $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$, onde $a, b, c, d \in \Re$. Determine A de modo que x_1^3 e x_2^3 sejam as raízes da equação: $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + A = 0$.

139) (IME-78) Determine o valor de m, onde $m \in \Re^*$, para o qual as quatro raízes da equação: $x^4 + (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ estejam em progressão aritmética, cuja razão não é necessariamente real.

140) (IME-78) Determine as soluções da equação $36x^4 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ desde que uma de suas raízes é a soma das outras duas.

141) (IME-78) Achar a condição entre $a, b, c \in \Re$, $a \neq 0$, de modo que a soma de duas raízes da equação abaixo seja igual a soma das outras duas: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$

142) (IME-79) Seja a equação: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ cujas raízes são a, b e c. Determine s, t e u em função de p, q e r, para que a equação $x^3 + sx^2 + tx + u = 0$ tenha raízes bc, ca e ab

143) (IME-80) Resolva as equações $x^3 - 7x^2 - 204x + 1260 = 0$ e $x^3 - 15x^2 - 394x + 840 = 0$ sabendo que a primeira tem uma raiz cujo valor é o triplo do valor de uma raiz da segunda.

144) (IME-82) Determine os dois valores de m para os quais a razão entre as raízes da equação: $mx^2 - (1 + 8m)x + 4(4m + 1) = 0$ é igual a $-1/4$.

145) (IME-84) Determine os valores de m para os quais as quatro raízes da equação biquadrada $x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$ sejam reais e estejam em progressão aritmética.

146) (IME-88) Determine todas as raízes do polinômio $p(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + x^4$.

147) (IME-89) Determine as raízes da equação $x^4 - 2x^3 - 31x^2 + 32x + 240 = 0$, sabendo que a soma de duas delas é 2.

148) (IME-90) Resolva a equação $3x^3 - 13x^2 + 18x - 8 = 0$, sabendo que se x_1, x_2 e x_3 são, respectivamente, as raízes então $\frac{2}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}$.

149) (IME-90) Para que valores de p a equação $x^4 + px + 3 = 0$ tem raiz dupla? Determine, em cada caso, as raízes da equação.

150) (IME-91) Mostre que o número $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ é irracional

151) (IME-91)
a) Sendo dada a equação $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \Re$, que relação deverá existir entre p e q para que uma das raízes seja igual ao produto das outras duas?
b) Mostre que a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$, satisfaz a relação encontrada e, em seguida, encontre as duas raízes.

152) (IME-97) Se tg a e tg b são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, calcule, em função de p e q, o valor simplificado da expressão: $y = \text{sen}^2(a + b) + p.\text{sen}(a + b).\cos(a + b) + q.\cos^2(a - b)$. Considere $p, q \in \Re$ com $q \neq 1$.

153) (IME-2004) Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

154) (IME-2005) Sejam a, b e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, onde r e t são números reais não nulos.
a) Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de r e t.
b) Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, onde $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualquer número natural k.

155) (ITA-2001) O polinômio com coeficientes reais
$P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i. Então, a soma dos coeficientes é igual a:
a) – 4 b) – 6 c) – 1 d) 1 e) 4

156) (ITA-2012) Considere um polinômio p(x), de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se p(x) pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, p(- 1) é igual a
A ( ) $5(5 - 2\sqrt{3})$ B ( ) $15(5 - 2\sqrt{3})$.
C ( ) $30(5 - 2\sqrt{3})$. D ( ) $45(5 - 2\sqrt{3})$.
E ( ) $50(5 - 2\sqrt{3})$.

157) (ITA-2011) Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3}(x - a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que x = 0 é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que.
a) a soma de todas as raízes é 5.
b) o produto de todas as raízes é 21
c) a única raiz real é maior que zero.
d) a soma das raízes não reais é 10.
e) todas as raízes são reais.

158) (IME-2012) Os números reais positivos x_1, x_2 e x_3 são raízes da equação $x^3 - ax^2 = a^h - \frac{b}{2}x$, sendo $b \in$ IN (natural), $a \in$ IR (real) e $a \neq 1$. Determine, em função de
$\log_a \left[x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)^{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right]^b$.

Exercícios

01) Resolver a equação $5x^3 - 37x^2 + 90x - 72 = 0$, sabendo que uma das raízes é média harmônica das outras duas.

02) Resolver a equação geral do terceiro grau, $A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$, sabendo que uma das raízes deve ser igual a soma das outras duas.

03) Provar que se a e b são raízes da equação $x^2 - px + B^m = 0$, teremos $\log_B a^3 + \log_B b^n + \log_B a^n + \log_B b^3 = mp$.

04) Provar que a soma dos quadrados e a soma dos cubos das raízes da equação $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ são dadas respectivamente por $p^2 - 2q$ e $p^3 - 3pq + 3r$.

05) Sendo $\{a, b, c\}$ a solução da equação $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$, calcule o valor da expressão: $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

06) Resolver a equação $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$ sabendo que existem duas raízes simétricas.

07) Resolver a equação $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$, sabendo que admite uma raiz com multiplicidade 2.

08) Resolver a equação $2x^4 - x^3 - 14x^2 + 19x - 6 = 0$ sabendo que existem duas raízes recíprocas.

09) Demonstre que a área do triângulo cujos lados são as raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, é dada por $S = \sqrt{-\frac{a^4}{16} + \frac{a^2 b}{4} - \frac{ac}{2}}$.

10) Resolver a equação $x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = 0$, sabendo que uma das raízes é $2 + i\sqrt{3}$.

11) Resolver a equação $x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 1 = 0$, sabendo que i é uma das raízes da equação e tem multiplicidade 3.

12) Determinar a condição para que a equação $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ tenha duas raízes simétricas.

13) Resolver a equação $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$, sabendo que tem raízes iguais duas a duas.

14) Resolver a equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, sabendo que uma raiz é igual a diferença das outras duas.

15) Resolver a equação $8x^4 - 28x^3 + 18x^2 + 27x - 27 = 0$, sabendo que uma das raízes tem multiplicidade 3.

16) A soma de duas raízes da equação $x^4 + 2x^3 + px^2 + qx + 2 = 0$ é -1 e o produto das outras duas raízes é 1. Calcular p e q e resolver a equação.

17) Dada a equação $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, provar que:
a) se as raízes estão em PG, então $p^2s = r^2$.
b) se as raízes estão em PA, então $p^3 - 4pq + 8r = 0$.

18) Demonstrar que a relação entre os coeficientes da equação $x^3 + px + q = 0$, para que se tenha duas raízes iguais é $4p^3 + 27q^2 = 0$.

19) Resolver a equação $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = 0$ sabendo que uma das raízes é a média aritmética das outras duas.

20) Calcular as raízes da equação $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36 = 0$ sabendo que o produto de duas das suas raízes é igual ao produto das outras duas raízes.

21) Demonstre que a condição para que a equação de coeficientes reais $x^3 + px + q = 0$ admita raízes complexas de módulo igual a r é dada por $r^6 - pr^4 - q^2 = 0$.

22) Demonstrar que a condição para que as raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ estejam em progressão harmônica é dada por $2q^3 - 9pqr + 27r^2 = 0$.

23) Dada a equação de terceiro grau $x^3 + px + q = 0$, demonstrar que a relação que deve existir entre os seus coeficientes a fim de que uma das raízes seja igual a soma dos inversos das outras duas é dada por $q^3 + pq + q = 0$.

24) Demonstrar que a relação que deve ligar os coeficientes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, para que uma das raízes seja o cubo do recíproco da outra é dada por $(a^2 + c^2)^2 = ab^2c$.

25) Se uma das raízes da equação $x^4 + px^3 + qx + r = 0$ é igual à soma das outras três, provar que vale a condição $p^4 + 8pq = 16r$.

26) Demonstrar que a relação que deve existir entre os coeficientes da equação $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ a fim de que a soma de duas de suas raízes seja zero é dada por $r^2 - pqr + p^2s = 0$.

27) Quando a, b, c designam as raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, demonstre que a equação cujas raízes são $a + b, b + c, c + a$ é $y^3 + 2py^2 + (p^2 + q)y - r + pq = 0$.

28) Quando a, b, c designam as raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, demonstre que a equação cujas raízes são $a(b + c), b(c + a), c(a + b)$ é $y^3 - 2qy^2 + (q^2 + pr)y + r^2 - pqr = 0$.

29) Quando a, b, c designam as raízes da equação $x^3 + qx + r = 0$, demonstre que a equação cujas raízes são bc/a, ca/b, ab/c é $ry^3 + q^3y^2 - 2qry + r^2 = 0$.

30) Sendo ABC um triângulo, sejam p = sen A.sen B.sen C e q = cos A.cos B.cos C. Mostre que tg A, tg B e tg C são as raízes da equação $qx^3 - px^2 + (1 + q)x - p = 0$.

31) Quando a, b, c designam as raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, demonstre que a equação cujas raízes são a^2, b^2, c^2 é $y^3 - (p^2 - 2q)y^2 + (q^2 - 2pr)y - r^2 = 0$.

32) Demonstrar que a equação cujas raízes são os cubos das raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ é dada por $y^3 + (p^3 - 3pq + 3r)y^2 + (q^3 - 3pqr + 3r^2)y + r^3 = 0$.

33) Demonstrar que a condição necessária e suficiente para que a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ tenha três raízes iguais é $\left(\frac{p}{3}\right)^6 = \left(\frac{q}{3}\right)^3 = r$.

34) As equações $x^3 + p_1x + q_1 = 0$ e $x^3 + p_2x + q_2 = 0$ ($p_1 \neq p_2$, $q_1 \neq q_2$) possuem uma raiz em comum. Calcule esta raiz e também as outras raízes de ambas equações.

35) Determine todos os valores reais de a e b para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ possuem duas raízes em comum e determine essas raízes.

36) Todas as raízes do polinômio: $P(x) = x^3 + px + q$ com coeficientes reais p e q ($q \neq 0$) são reais. Prove que $p < 0$.

37) Seja o polinômio de raízes reais: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, onde $c = ba$. Prove que este polinômio possui duas raízes opostas.

38) Seja o polinômio real: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, onde as raízes são todas reais e positivas. Prove que $ab \leq 9c$.

39) Demonstre que a relação entre os coeficientes do polinômio $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ para que uma das raízes seja igual a soma das outras duas é dada por $8r = 4pq - p^3$.

40) Sabendo que uma das raízes da equação $36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ é igual a soma das outras duas, resolva a equação.

41) Demonstre que a relação entre os coeficientes do polinômio $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ para que o produto de duas de suas raízes seja igual ao produto das outras duas é dada por $a^2d = c^2$.

42) Demonstre que se a, b e c são raízes da equação $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ então $b = c = 0$ ou $a = -1$, $b = -1$ e $c = 1$.

43) Demonstre a soma dos quadrados das raízes do polinômio $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ é dada por $a_1^2 - 2a_2$

44) Seja o polinômio $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)\ldots(x - k)$. Prove que o coeficiente de x^{k-2} é $k(k + 1)(k - 1)(3k + 2)/24$. *Dica: Use o resultado do exercício anterior.

45) Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$, calcule o valor de $x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 + x_3^3x_1 + x_3x_1^3$

46) Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 + px + q = 0$, prove que:

a) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} = -3$

b) $x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_2^4x_3^2 + x_2^2x_3^4 + x_3^4x_1^2 + x_3^2x_1^4 = -2p^3 - 3q^2$

c) $(x_1 + x_2)^4(x_1 + x_3)^4(x_2 + x_3)^4 = q^4$

47) Demonstre que a relação entre as raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ de modo que o quadrado de uma raiz seja igual a soma dos quadrados das outras duas é dada por $a^4(a^2 - 2b) = 2(a^3 - 2ab + 2c)^2$

48) Demonstre que a relação entre as raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ de modo que as raízes sejam iguais aos senos dos ângulos de um triângulo é dada por $a(4ab - a^3 - 8c) = 4c^2$.

49) Para quais valores de r a equação $x^4 - (r + 1)x^2 + r = 0$ possui quatro diferentes soluções reais que formam quatro termos consecutivos de uma progressão aritmética?

50) Sobre o domínio dos números inteiros, decompor o polinômio: $P(x) = x^5 - 209x + 56$ em

um produto de dois fatores, sabendo que se anula para valores x_1, x_2 recíprocos entre si.

51) Determine condições necessárias e suficientes para p, q e r de modo que as raízes da equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ sejam vértices de um triângulo equilátero no plano complexo.

52) Para quais b e c, $x = \sqrt{19} + \sqrt{98}$ é um raiz da equação $x^4 + bx^2 + c = 0$.

53) Se a, b e c forem 3 números distintos, satisfazendo as relações:

$$a^3 + pa + q = 0$$
$$b^3 + pb + q = 0$$
$$c^3 + pc + q = 0$$

Provar que se terá $a + b + c = 0$

54) Determinar todos os valores reais de p de modo que a equação $x^3 - px^2 + px - 1 = 0$ tem todas suas raízes reais e inteiras.

55) Resolver a equação $4x^3 + 18x^2 + 28x + 15 =$, sabendo que existem inteiros a e b tais que a equação dada pode ser escrita da forma $(x + a)^4 = (x + b)^4$.

56) Determine as quatro raízes da equação $x^4 - 16x - 12 = 0$, sabendo que esta pode ser fatorada como um produto de dois polinômios de grau 2 com coeficientes inteiros.

57) Se a e b são duas raízes de $x^4 + x^3 - 1 = 0$, prove que ab é uma raiz de $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$.

58) Demonstre que a relação entre os coeficientes do polinômio $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ para que a soma de duas raízes seja igual a soma das outras duas é dada por $a^3 - 4ab + 8c = 0$.

59) Determine todos os valores reais de k de modo que as raízes de $x^4 - 2x^3 + (1 - 2k)x^2 + 2kx$ são reais, distintas, e formam uma progressão aritmética.

60) Demonstre que as raízes da equação cúbica $bx^3 + a^2x^2 + a^2x + b = 0$ estão em progressão geométrica.

61) Prove que a soma de um certo par de raízes da equação $x^4 + ax^3 + \left(\frac{2b}{a} + \frac{a^2}{4}\right)x^2 + bx + c = 0$ é igual à soma do outro par.

62) Prove o produto de um certo par de raízes da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + amx + m^2 = 0$ é igual ao produto do outro par.

63) Considere todas as retas que cruzam o gráfico do polinômio $P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 3x - 5$ em quatro pontos distintos (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Mostre que $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$ é independente da reta e determine este valor.

64) Determine a soma das quintas potências dos zeros das raízes de $t^3 + 7t^2 - 6t - 1 = 0$.

65) Se as equações abaixo são verdadeiras:

$$\frac{x}{a+\alpha} + \frac{y}{b+\alpha} + \frac{z}{c+\alpha} = 1$$
$$\frac{x}{a+\beta} + \frac{y}{b+\beta} + \frac{z}{c+\beta} = 1$$
$$\frac{x}{a+\gamma} + \frac{y}{b+\gamma} + \frac{z}{c+\gamma} = 1$$

prove, sem resolver o sistema, que $x + y + z = a + \alpha + b + \beta - c + \gamma$.

66) Sejam x_1, x_2 e x_3, x_4 as raízes da equação $x^2 + px - q = 0$ e $x^2 + p'x + q' = 0$ respectivamente onde p, p' e q, q' são números reais não-nulos.

Prove que se $x_1x_4 = x_2x_3$ então $\left(\frac{p}{p'}\right)^2 = \frac{q}{q'}$.

67) Mostre que uma condição necessária e suficiente para que a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, de coeficientes reais, possua uma raiz real e duas imaginárias puras é $bc = ad$ e $ac > 0$.

68) Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as raízes da equação $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, de coeficientes reais, prove que:

$$(1 + x_1^2)(1 + x_2^2)\ldots(1 + x_n^2) =$$
$$= (1 - a_2 + a_4 - \ldots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots)^2$$

69) Um polinômio com coeficientes inteiros quando dividido por $x^2 - 11x + 10$ deixa resto $990x - 889$. Prove que o polinômio não possui raízes inteiras.

70) Dada a equação $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde o gráfico intercepta a reta $y = Ax + B$ nos pontos M_1, M_2, M_3 e M_4. Determine A e B de modo que os pontos de intercessão formem três segmentos iguais $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$. Qual a condição necessária para que o problema tenha solução?

71) O gráfico do polinômio $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ (onde $n > 1$), intercepta a reta $y = b$ nos pontos B_1, B_2, ..., B_n (da esquerda para a direita), e a reta $y = c$ ($c \neq b$) nos pontos C_1, C_2, ..., C_n (da esquerda para a direita). Seja P um ponto sobre a reta $y = c$, a direita de C_n. Determine o valor da soma:

$$\cot(B_1\hat{C}_1P) + \cot(B_2\hat{C}_2P) + \ldots + \cot(B_n\hat{C}_nP)$$

72) Sejam p, q e r as raízes da equação cúbica $ax^3 - bx^2 + cx + d = 0$, onde a, b, c e d são coeficientes reais. Dado que arc tan p + arc tan q + arc tan $r = \pi/4$, onde arc tan denota o seu valor principal, prove que: $a = b + c + d$.

73) Se r, s, t são raízes da equação $x(x - 2)(3x - 7) = 2$:
a) Demonstre que r, s, t são positivos.
b) Prove que arc tan r + arc tan s + arc tan $t = 3\pi/4$.
Obs: Denota-se arc tan x o arco compreendido entre 0 e π cuja tangente é x.

74) Calcule as raízes r_1, r_2, r_3 e r_4 da equação: $4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0$, sabendo que são reais, positivas e que: $\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$.

75) Prove que as raízes de $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ não podem ser todas reais se $2a^2 < 5b$.

76) O produto de duas raízes da equação $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 100x - 1984 = 0$ é -32. Determine o valor de k.

77) Dois alunos colocam alternadamente números inteiros nos lugares vazios da equação: $x^3 + (\ )x^2 + (\ )x + (\ ) = 0$. Dispõe o aluno que realiza o primeiro movimento de alguma estratégia que lhe permita assegurar que ao finalizar o jogo sempre se obterá uma equação com três soluções inteiras?

78) Determine todos os valores reais do parâmetro a tal que a equação $16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$ possui 4 raízes formando uma progressão geométrica.

79) O polinômio: $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ possui três diferentes raízes: a, b e c. Determine $a^3 + b^3 + c^3$.

80) Sejam α_1, α_2, α_3 as raízes de $x^3 - x + 1 = 0$. Calcule o valor de $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4$.

81) Sejam a, b e c são números racionais. Uma das raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ é igual ao produto das outras duas. Provar que essa raiz é racional.

82) Seja f(x) um polinômio de grau 3 com coeficientes racionais. Provar que se o gráfico de f é tangente ao eixo x, então f(x) tem suas 3 raízes racionais.

83) Calcule as raízes do polinômio $x^4 + 3x^3 - 3x + 1$, sabendo que o produto de duas delas é -1.

84) Suponha que a e b são duas raízes distintas de $x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$. Qual o valor de $a^2b + ab^2 + 3ab$?

85) O número $2\cos(10^\circ)$ é uma raiz de um polinômio p(x) satisfazendo: (i) o grau de p(x) é 6, (ii) o coeficiente de x^6 é 1, e (iii) os coeficientes de p(x) são inteiros. Determine p(x).

86) Demonstre que as raízes da equação $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$, onde os coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formam uma progressão aritmética, são dadas pela fórmula:

$$x_i = -\frac{a_1}{n} + \frac{2i - n - 1}{2}h \ , \ i = 1, 2, \ldots, n \text{ onde}$$

$$h = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{12(n-1)a_1^2 - 24na_2}{n^2 - 1}}.$$

87) Sejam a, b, c números reais não nulos e $a \neq b$. Provar que se as equações $x^2 + ax + bc = 0$ e $x^2 + bx + ca = 0$ tem uma raiz comum, então as restantes raízes verificam a equação $x^2 + cx + ab = 0$.

88) Prove que se $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ é uma raiz de um polinômio cúbico com coeficientes inteiros, então esta é a única raiz real deste polinômio.

89) Dada a equação $x^3 + px + q = 0$, demonstrar que a relação que deve existir entre os seus coeficientes para que a razão de duas raízes seja igual a um número dado m é dada por:
$q^2(m^2 + m + r)^2 + p^3m^2(m + 1)^2 = 0$.

90) Demonstrar que a condição a fim de que as quatro raízes a, b, c, d da equação $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ estejam ligadas pela relação $ab + cd = 0$ é dada por $p^2s + r^2 = 4qs$.

91) Conhecendo a cúbica $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, de raízes a, b, c, demonstrar que a equação cujas raízes são $ab + 1/c$, $bc + 1/a$, $ca + 1/b$ é dada por $ry^3 - q(1 + r)y^2 + p(1 + r)^2y - (1 + r)^3 = 0$.

92) Demonstrar que a condição a fim de que a equação $x^4 + 2px^3 + 2rx + pr = 0$ tenha duas raízes iguais é $r(p^3 + r) = 0$.

93) Se a e b são raízes de $x^2 + px + 1 = 0$, e c e d são raízes de $x^2 + qx + 1 = 0$, mostre que:
$(a - c)(b - d)(a + d)(b + c) = q^2 - p^2$.

94) Sejam x_1 , x_2 as raízes do polinômio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, sendo m um número real. Provar que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

95) Suponha que $\alpha \in \mathbb{R}$ é raiz de algum polinômio não-nulo com coeficientes racionais. O *polinômio minimal* de α é o polinômio de menor grau $m(x)$ tal que:

- $m(\alpha) = 0$;
- $m(x)$ é Mônico (isto é, o seu coeficiente líder é 1) e todos os seus coeficientes são racionais.

Por exemplo, o polinômio minimal de $\sqrt{2}$ é $x^2 - 2$. Determine o produto dos coeficientes não nulos do polinômio minimal de $\sqrt[3]{-27 + 5\sqrt{33}} - \sqrt[3]{27 + 5\sqrt{33}}$.

96) Dado o polinômio: $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ com coeficientes inteiros. Sabendo que para quatro inteiros distintos a, b, c e d: $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 5$, prove que não existe nenhum inteiro k tal que $p(k) = 8$.

97) O polinômio $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$, com $a_i \in R$, possui n raízes reais negativas. Prove que $P(1) \geq 2^n$.

98) Um polinômio P(x) mônico do 4º grau satisfaz P(1) = 10, P(2) = 20 e P(3) = 30. Determine o valor de P(12) +P(– 8).

99) Dado um polinômio P(x) com coeficientes inteiros; 2 divide P(5); 5 divide P(2); mostre que 10 divide P(7).

100) A equação $x^3 + px + q = 0$ tem três raízes distintas. Prove que $p < 0$.

101) Um polinômio P(x) de grau n satisfaz $P(k) = 2^k$ para k = 0, 1, 2, ..., n. Determine P(n + 1).

102) a, b, c, d são números reais distintos tais que a e b são as raízes da equação $x^2 - 3cx - 8d = 0$ e c e d são as raízes da equação $x^2 - 3ax - 8b = 0$. Calcule a soma a + b + c + d.

103) Sejam a_0, a_1, ..., a_{n-1} números reais, onde n ≥ 1, e seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ tal que $|f(0)| = f(1)$ e cada raiz α de f é real satisfazendo $0 < \alpha < 1$. Prove que o produto destas raízes não excede $1/2^n$.

104) Prove que se o polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ possui três raízes reais distintas, então também possui três raízes reais distintas o polinômio $x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)x + \frac{1}{8}(ab - c)$.

105) Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que a equação $x^3 - 17x^2 + ax - b^2 = 0$ possua três raízes inteiras (não necessariamente distintas).

106) As cem raízes do polinômio $P(x) = x^{100} - 600x^{99} + a_{98}x^{98} + \ldots + a_1x + a_0$ são reais e P(7) > 1. Demonstre que P(x) tem alguma raiz maior que 7.

107) Seja $P(x)$ um polinômio de coeficientes inteiros. Sabe-se que $P(x) = 2011$ tem pelo menos duas raízes inteiras distintas iguais a 1 e t, e que $P(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz inteira. Determine todos os possíveis valores de t.

108) Assumindo que as raízes de $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ são números reais e positivos, determine uma relação entre p, q e r que forneça uma condição necessária para que as raízes sejam os cossenos que três ângulos de um triângulo.

TRANSFORMADAS ALGÉBRICAS

4.1. TRANSFORMADA MULTIPLICATIVA

4.1.1. Definição

Considere a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, de coeficientes complexos, cujas raízes são $r_1, r_2, ..., r_n$, e a equação $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0 = 0$, também de coeficientes complexos, cujas raízes são $s_1, s_2, ..., s_n$. Estas duas equações são ditas transformadas multiplicativas uma da outra se cada uma das raízes de uma delas está relacionada com uma diferente raiz da outra equação através da multiplicação de uma constante complexa não nula. Portanto, as equações $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ e $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0 = 0$ são transformadas aditivas se existe um número complexo $k \neq 0$ tal que $r_1 = s_1.k$, $r_2 = s_2.k$, ..., $r_n = s_n.k$.

Por exemplo, a equação $x^3 - 6x^2 - 45x + 162 = 0$ é transformada multiplicativa de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, uma vez que as raízes de $x^3 - 6x^2 - 45x + 162 = 0$ são 3, – 6 e 9, enquanto que as raízes $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ são 1, – 2 e 3 e sabe-se que $3 = 1.3$, $-6 = (-2).3$ e $9 = 3.3$.

4.1.2. Aplicação

Suponha que a equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ possua como raízes os números complexos $r_1, r_2, ..., r_n$. Para que seja determinada a equação cujas raízes são $k.r_1, k.r_2, ..., k.r_n$, com $k \neq 0$, basta fazer, na equação original, a substituição de x por $\frac{x}{k}$, obtendo assim a equação transformada $a_n\left(\frac{x}{k}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{x}{k}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{x}{k}\right) + a_0 = 0$.

Por exemplo, seja a equação do 4º grau $x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x - 1 = 0$, cujas raízes são a, b, c e d. Para obter a equação cujas raízes são 2a, 2b, 2c e 2d basta fazer a troca de x por $\frac{x}{2}$ na 1ª equação:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{x}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{16} + 2\frac{x^3}{8} - 7\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 1 = 0 \quad \times 16 \Rightarrow$$

$$x^4 + 4x^3 - 28x^2 + 8x - 16 = 0$$

Exemplos:

1) Seja a equação cúbica $x^3 - x^2 - 2x + 5 = 0$, cujas raízes são a, b, e c. Determine a equação cujas raízes sejam $\frac{a.i}{3}$, $\frac{b.i}{3}$ e $\frac{c.i}{3}$, onde i é a unidade imaginária.

Solução:

Fazendo a troca de variáveis na equação dada de x por $\frac{x}{\frac{i}{3}} = \frac{3x}{i} = -3ix$ tem-se que:

$$(-3ix)^3 - (-3ix)^2 - 2(-3i)x + 5 = 0 \Rightarrow 27ix^3 + 9x^2 + 6ix + 5 = 0 \quad \times -i \Rightarrow 27x^3 - 9ix^2 - 6x - 5i = 0$$

2) Considere a equação $a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, cujas raízes são $x_1, x_2, ..., x_{2n}$. Determine a equação cujas raízes sejam $-x_1, -x_2, ..., -x_{2n}$.

Solução:

Trocando x por – x na equação:

$$a_{2n}(-x)^{2n} + a_{2n-1}(-x)^{2n-1} + ... + a_1x(-x) + a_0 = 0 \Rightarrow a_{2n}x^{2n} - a_{2n-1}x^{2n-1} + ... - a_1x + a_0 = 0$$

4.2. TRANSFORMADA ADITIVA

4.2.1. Definição

Considere a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, de coeficientes complexos, cujas raízes são $r_1, r_2, ..., r_n$, e a equação $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0 = 0$, também de coeficientes complexos, cujas raízes são $s_1, s_2, ..., s_n$. Estas duas equações são ditas transformadas aditivas uma da outra se cada uma das raízes de uma delas está relacionada com uma diferente raiz da outra equação através da soma de uma mesma constante complexa. Em outras palavras, as equações $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ e $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0 = 0$ são transformadas aditivas se existe um número complexo tal que $r_1 = s_1 + k$, $r_2 = s_2 + k$, ..., $r_n = s_n + k$.

Por exemplo, a equação $x^2 - 7x + 12 = 0$ é transformada aditiva de $x^2 - 3x + 2 = 0$, uma vez que as raízes de $x^2 - 7x + 12 = 0$ são 3 e 4, enquanto que as raízes $x^2 - 3x + 2 = 0$ são 1 e 2 e sabe-se que $3 = 1 + 2$ e $4 = 2 + 2$.

4.2.2. Algoritmo de Horner-Ruffini

Suponha que equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ possua como raízes os números complexos $x_1, x_2, ..., x_n$. De modo a obter a equação polinomial transformada cujas raízes sejam $x_1 + k, x_2 + k, ..., x_n + k$ basta fazer a substituição de x por $x - k$ na equação original, obtendo assim a equação $a_n(x - k)^n + a_{n-1}(x - k)^{n-1} + ... + a_1(x - k) + a_0 = 0$. Pode-se desenvolver todos os termos das parcelas $(x - k)^i$, $1 \le i \le n$, usando para tanto o binômio de Newton, de modo a determinar uma equação polinomial transformada do tipo $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + a_0 = 0$ que seja equivalente à equação $a_n(x - k)^n + a_{n-1}(x - k)^{n-1} + ... + a_1(x - k) + a_0 = 0$, porém este procedimento vai gerar contas muito extensas.

$$a_n(x - k)^n + a_{n-1}(x - k)^{n-1} + ... + a_1(x - k) + a_0 = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + a_0 = 0 \Rightarrow$$
$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = b_n(x + k)^n + b_{n-1}(x + k)^{n-1} + ... + b_1(x + k) + a_0 = 0$$

Note que:

$$p(x) = b_n(x + k)^n + b_{n-1}(x + k)^{n-1} + ... + b_3(x + k)^3 + b_2(x + k)^2 + b_1(x + k) + b_0 \Rightarrow$$
$$p(x) = (x + k)[b_n(x + k)^{n-1} + b_{n-1}(x + k)^{n-2} + ... + b_1(x + k)^2 + b_2(x + k) + b_1] + b_0 \Rightarrow$$
$$p(x) = (x + k)q_1(x) + b_0 \text{ onde } q_1(x) = b_n(x + k)^{n-1} + b_{n-1}(x + k)^{n-2} + ... + b_2(x + k) + b_1$$

Portanto, b_0 é igual ao resto da divisão de $p(x)$ por $x + k$. Seguindo este procedimento com $q_1(x)$:

$$q_1(x) = b_n(x + k)^{n-1} + b_{n-1}(x + k)^{n-2} + ... + b_3(x + k)^2 + b_2(x + k) + b_1 \Rightarrow$$
$$q_1(x) = (x + k)[b_n(x + k)^{n-2} + b_{n-1}(x + k)^{n-3} + ... + b_3(x + k) + b_2] + b_1 \Rightarrow$$
$$q_1(x) = (x + k)q_2(x) + b_1 \text{ onde } q_2(x) = b_n(x + k)^{n-2} + b_{n-1}(x + k)^{n-3} + ... + b_3(x + k) + b_2$$

Assim, b_1 é igual ao resto da divisão de $q_1(x)$ por $x + k$. Seguindo este procedimento com $q_2(x)$:

$$q_2(x) = b_n(x + k)^{n-2} + b_{n-1}(x + k)^{n-3} + ... + b_3(x - k) + b_2 \Rightarrow$$
$$q_2(x) = (x + k)[b_n(x + k)^{n-3} + b_{n-1}(x + k)^{n-4} + ... + b_3] + b_2 \Rightarrow$$
$$q_2(x) = (x + k)q_3(x) + b_2 \text{ onde } q_3(x) = b_n(x + k)^{n-3} + b_{n-1}(x + k)^{n-4} + ... + b_3$$

Logo, b_2 é igual ao resto da divisão de $q_2(x)$ por $x + k$. Observando os três procedimentos acima é possível identificar um padrão, onde os coeficientes $b_0, b_1, b_2, ... b_n$ da equação transformada podem ser obtidos dividindo seguidamente a equação original por $x + k$, onde estes coeficientes são iguais aos restos destas divisões sucessivas. O método mais eficaz de fazer tais divisões é aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini, que aplicado sucessivamente recebe o nome de algoritmo de Horner-Ruffini. A aplicação deste método será apresentada em forma de exemplos resolvidos.

Exemplos:

1) Seja a equação polinomial do 5º grau $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$, cujas raízes são x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5. Determine a equação cujas raízes sejam $x_1 + 2$, $x_2 + 2$, $x_3 + 2$, $x_4 + 2$ e e $x_5 + 2$.

Solução:

Deseja-se determinar uma equação polinomial da forma $ax^5 - bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ de modo que $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = a(x + 2)^5 + b(x + 2)^4 + c(x + 2)^3 + d(x - 2)^2 + e(x + 2) + f$

Aplicando o algoritmo de Horner-Ruffini:

− 2	1	− 3	− 5	15	4	− 12
− 2	1	− 5	5	5	− 6	0 → f
− 2	1	− 7	19	− 33	60 → e	
− 2	1	− 9	37	107 → d		
− 2	1	− 11	59 → c			
− 2	1	− 13 → b				
	1 → a					

Deste modo, se x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são as raízes da equação $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$, então a equação cujas raízes são $x_1 + 2$, $x_2 + 2$, $x_3 + 2$, $x_4 + 2$ e e $x_5 + 2$ é $x^5 - 13x^4 + 59x^3 + 107x^2 + 60x = 0$.

2) Considere a equação $4x^4 - 2x^3 + 6x - 1 = 0$, cujas raízes são x_1, x_2, x_3 e x_4. Determine a equação polinomial cujas raízes sejam $2x_1 - 1$, $2x_2 - 1$, $2x_3 - 1$ e $2x_4 - 1$.

Solução:

Inicialmente será determinada a equação cujas raízes são $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$ e $2x_4$. Fazendo a substituição de x por $\frac{x}{2}$ na equação original:

$$4\left(\frac{x}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow 4\frac{x^4}{16} - 2\frac{x^3}{8} + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{4} + 3x - 1 = 0 \quad \times 4 \Rightarrow$$

$x^4 - x^3 + 3x - 1 = 0$, cujas raízes são $2x_1$, $2x_2$, $2x_3$ e $2x_4$.

Agora será feita uma transformação aditiva para determinar uma equação cujas raízes sejam uma unidade menor que as raízes da equação $x^4 - x^3 + 3x - 1$.

$x^4 - x^3 + 3x - 1 = a(x - 1)^4 + b(x - 1)^3 + c(x - 1)^2 + d(x - 1) + e$

Aplicando o algoritmo de Horner-Ruffini:

1	1	− 1	0	3	− 1
1	1	0	0	3	2 → e
1	1	1	1	4 → d	
1	1	2	3 → c		
1	1	3 → b			
	1 → a				

Portanto, se as raízes da equação $4x^4 - 2x^3 + 6x - 1 = 0$ são x_1, x_2, x_3 e x_4, a equação polinomial cujas raízes são $2x_1 - 1$, $2x_2 - 1$, $2x_3 - 1$ e $2x_4 - 1$ é $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x + 2$.

4.3. TRANSFORMADA RECÍPROCA

4.3.1. Definição:

Suponha que a equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, de coeficientes complexos, possua como raízes os números complexos não-nulos $x_1, x_2, ..., x_n$. Se a equação polinomial $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0 = 0$ admite como raízes os números complexos não-nulos $y_1, y_2, ..., y_n$ tais que $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, ... e $y_n = \frac{1}{x_n}$, afirma-se que $b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0 = 0$ é uma equação transformada recíproca de $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$.

Por exemplo, a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ possui como raízes os números 2 e 3, enquanto que a equação $6x^2 - 5x + 1 = 0$ possui como raízes os números $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Logo, a equação $6x^2 - 5x + 1 = 0$ é transformada recíproca de $x^2 - 5x + 6 = 0$, e vice-versa.

Note que uma equação polinomial que admite zero como uma de suas raízes não possui transformada recíproca, uma vez que não é definido o valor de $\frac{1}{0}$, que deveria ser raiz da equação transformada recíproca.

4.3.2. Aplicação

Seja a equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, de coeficientes complexos, cujas raízes são os números complexos não-nulos $x_1, x_2, ..., x_n$. Para determinar a equação cujas raízes são os recíprocos das raízes de $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ basta fazer a substituição nesta equação de x por $\frac{1}{x}$ e depois multiplicar a equação por x^n, de forma a transformar a equação em racional para polinomial. Por exemplo, suponha que a equação do 3º grau $3x^3 - 2x^2 + x - 5 = 0$ possua como raízes os números a, b e c. Para determinar a equação cujas raízes sejam $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$ basta trocar x por $\frac{1}{x}$ na equação original:

$$3\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \Rightarrow \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 5 = 0 \times x^3 \Rightarrow 3 - 2x + x^2 - 5x^3 = 0 \times (-1) \Rightarrow$$

$5x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$, cujas raízes são $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$

Assim, afirma-se que $5x^3 - x^2 + 2x - 3 = 0$ é transformada recíproca de $3x^3 - 2x^2 + x - 5 = 0$.

O procedimento acima pode ser generalizado para uma equação algébrica qualquer, desde que 0 não seja uma de suas raízes. Suponha que a equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, de coeficientes complexos, possua como raízes os números complexos não-nulos $x_1, x_2, ..., x_n$. Substituindo x por $\frac{1}{x}$ nesta equação:

$$a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0 = 0 \Rightarrow \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + ... + \frac{a_1}{x} + a_0 = 0 \times x^n \Rightarrow$$

$$a_n + a_{n-1}x + ... + a_1x^{n-1} + a_0x^n = 0 \Rightarrow a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Desta forma, de modo a obter a equação transformada recíproca de uma equação basta reescrever a equação invertendo a ordem dos coeficientes, onde a_0, que ocupava a posição de último coeficiente passa a ser o primeiro coeficiente, a_1 que era o penúltimo coeficiente passa a ser agora o segundo coeficiente, assim sucessivamente, até a_n, que era o primeiro coeficiente e agora passa a ser o último.

Exemplos:

1) Determine a transformada recíproca da equação $3x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 7x + 8 = 0$.

Solução:

Fazendo a substituição x por $\frac{1}{x}$:

$$3\left(\frac{1}{x^5}\right)+2\left(\frac{1}{x}\right)^4-\left(\frac{1}{x}\right)^3+3\left(\frac{1}{x}\right)^2-7\left(\frac{1}{x}\right)+8=0 \Rightarrow \frac{3}{x^5}+\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x}+8=0 \times x^5 \Rightarrow$$

$$3 + 2x - x^2 + 3x^3 - 7x^4 + 8x^5 = 0 \Rightarrow 8x^5 - 7x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x + 3 = 0$$

2) Suponha que a equação $5x^3 - 7x^2 - x - 1 = 0$ possua como raízes os números complexos a, b e c. Determine a equação cujas raízes sejam $\frac{1}{2a}$, $\frac{1}{2b}$ e $\frac{1}{2c}$.

Solução:

Inicialmente deve ser feita uma transformação multiplicativa de modo a determinar uma equação que possua como raízes os números 2a, 2b e 2c. Para tanto, basta substituir $\frac{x}{2}$ no lugar de x na equação original: $5\left(\frac{x}{2}\right)^3-7\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)-1=0 \Rightarrow \frac{5x^3}{8}-\frac{7x^2}{4}-\frac{x}{2}-1=0 \times 8 \Rightarrow 5x^3 - 14x^2 - 4x - 8 = 0$

Agora deve-se determinar uma transformada recíproca desta última equação:

$$5\left(\frac{1}{x}\right)^3-14\left(\frac{1}{x}\right)^2-4\left(\frac{1}{x}\right)-8=0 \Rightarrow \frac{5}{x^3}-\frac{14}{x^2}-\frac{4}{x}-8=0 \times x^3 \Rightarrow 5 - 14x - 4x^2 - 8x^3 = 0 \times -1 \Rightarrow$$

$8x^3 + 4x^2 + 14x - 5 = 0$, cujas raízes são $\frac{1}{2a}$, $\frac{1}{2b}$ e $\frac{1}{2c}$.

3) Sejam $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ as raízes da equação polinomial $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 = 0$. Calcule o valor de: $\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_3-1}+...+\frac{1}{x_n-1}$.

Solução:

Suponha que $a_n x^n + a_{n-1}x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$ seja uma equação cujas raízes são $x_1 - 1, x_2 - 1, ..., x_n - 1$. Aplicando o algoritmo de Horner-Ruffini para obter esta transformada aditiva:

1	1	1	1	...	1	1
1	1	2	3	...	n	n + 1 → a_0
	1	1 + 2	1 + 2 + 3	...	1 + 2 + ... + n → a_1	
...	...	...	...			
1	1					
	1 → a_n					

Assim, a equação cujas raízes são $x_1 - 1, x_2 - 1, ..., x_n - 1$ é $a_n x^n + ... + \frac{n(n+1)}{2}x + n + 1 = 0$.

Portanto, a transformada recíproca desta última equação é $(n+1)x^n + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-1} + ... + 1 = 0$, cujas raízes são $\frac{1}{x_1-1}$, $\frac{1}{x_2-1}$, ... e $\frac{1}{x_n-1}$. Pelas relações de Girard a soma das raízes é dada por:

$$\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_3-1}+...+\frac{1}{x_n-1}=-\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+1}=-\frac{n}{2}$$

4.4. EQUAÇÕES RECÍPROCAS

4.4.1. Definição

Uma equação polinomial da forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ é denominada de equação recíproca se, para cada número complexo não-nulo r que é raiz da equação, então $\frac{1}{r}$ também é raiz desta equação, com a mesma multiplicidade. Por exemplo, a equação $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$ possui como conjunto solução $S = \left\{2, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{5}\right\}$, onde se $r \in S$ então $\frac{1}{r} \in S$. Assim, pode-se afirmar que $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$ é uma equação recíproca.

Note que existem dois números que são iguais aos seus recíprocos, casos de 1 e – 1. Assim, se 1 ou – 1 for raiz de uma equação recíproca, não é necessário que outro número, distinto de 1 ou – 1, seja também raiz. Por exemplo, as raízes da equação $4x^3 - 21x^2 + 21x - 4 = 0$ são 1, 4 e $\frac{1}{4}$, sendo que não é necessário que exista outro número, distinto de 1, que seja igual ao seu recíproco. Por outro lado, não é proibido que 1 ou – 1 possuam multiplicidade par em uma equação recíproca. Por exemplo, a equação $6x^4 - x^3 - 14x^2 - x + 6 = 0$ é recíproca e admite como raízes os números – 1, – 1, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$.

Cabe agora ressaltar um detalhe importante da definição, que diz respeito às multiplicidades das raízes. É necessário que em uma equação recíproca as raízes r e $\frac{1}{r}$ possuam a mesma multiplicidade. Por exemplo, a equação $2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4 = 0$ possui raízes iguais a 2, 2, $\frac{1}{2}$ e – 1, entretanto não é uma equação recíproca, uma vez que a raiz 2 possui multiplicidade 2 e a raiz $\frac{1}{2}$ possui multiplicidade 1. A equação cujas raízes são 3, 3, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$, que é $9x^4 - 60x^3 + 118x^2 - 60x + 9 = 0$, é uma exemplo de equação recíproca com raízes de multiplicidade 2.

4.4.2. Coeficientes de uma equação recíproca

Suponha que $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ é uma equação recíproca. Sabe-se que para dada raiz r desta equação tem-se que $\frac{1}{r}$ também é raiz da equação, com a mesma multiplicidade. Assim, segue que $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ e sua equação recíproca $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$ possuem o mesmo conjunto solução, fazendo com que sejam equações equivalentes. Duas equações P(x) e Q(x) são equivalentes se e somente existe um número complexo k não-nulo tal que $P(x) = k.Q(x)$:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = ka_0x^n + ka_1x^{n-1} + ka_2x^{n-2} + ... + ka_{n-2}x^2 + ka_{n-1}x + ka_n \Rightarrow$

$a_n = ka_0$, $a_{n-1} = ka_1$, $a_{n-2} = ka_2$, ..., $a_2 = ka_{n-2}$, $a_1 = ka_{n-1}$ e $a_0 = ka_n$

Deste modo, para cada i, $0 \le i \le n$, tem-se que $a_{n-i} = ka_i$ e $a_i = ka_{n-i} \Rightarrow a_{n-i} = k^2a_{n-i} \Rightarrow$

$k^2 = 1 \Rightarrow k = 1$ ou $k = -1$

Para $k = 1$ tem-se $a_{n-i} = a_i$, para todo i, $0 \le i \le n$, e assim a equação recíproca fica da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, denominada de <u>equação recíproca de 1ª espécie</u>.

Para $k = -1$ tem-se $a_{n-i} = -a_i$, para todo i, $0 \le i \le n$, e assim a equação recíproca fica da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$, denominada de <u>equação recíproca de 2ª espécie</u>.

4.4.3. Equação recíproca de 1ª espécie

4.4.3.1. Equação recíproca de 1ª espécie e grau par

4.4.3.1.1. Grau 2

Toda equação recíproca de 1ª espécie e grau 2 é da forma $ax^2 + bx + a = 0$, que pode facilmente ser resolvida usando a fórmula de Bháskara:

$$ax^2 + bx + a = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4}}{2}$$

4.4.3.1.2. Grau 4

As equações recíprocas de 1ª espécie e grau 4 possuem a forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Um procedimento para resolver este tipo de equação é:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \div x^2 \Rightarrow ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \Rightarrow$$

$$a\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c - 2a = 0$$

Fazendo $t = x + \frac{1}{x}$ segue que $at^2 + bt + c - 2a = 0$. Assim, usando a fórmula de Bháskara determina-se dois valores de t, digamos t_1 e t_2. Desfazendo a substituição $t = x + \frac{1}{x}$ encontram-se duas equações do 2º grau: $x^2 - t_1x + 1 = 0$ e $x^2 - t_2x + 1 = 0$, que resolvidas fornecem os quatro valores de x que satisfazem a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$.

4.4.3.1.3. Grau 6

As equações da forma $ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + bx + a = 0$ são classificadas como recíprocas de grau 6. Um método para determinar suas raízes será descrito abaixo:

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + bx + a = 0 \div x^3 \Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{e}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{a}{x^3} = 0 \Rightarrow$$

$$a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + d = 0 \Rightarrow$$

$$a\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) + b\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + d = 0 \Rightarrow$$

$$a\left(x + \frac{1}{x}\right)\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\right] + b\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + d = 0$$

Fazendo $t = x + \frac{1}{x}$: $at(t^2 - 3) + b(t^2 - 2) + ct + d = 0 \Rightarrow at^3 + bt^2 + (c - 3a)t + d - 2b = 0$

Resolvendo esta equação determina-se 3 valores de t: t_1, t_2 e t_3. Para cada um destes valores desfaz-se a substituição $t = x + \frac{1}{x}$, obtendo-se as equações $x^2 - t_1x + 1 = 0$, $x^2 - t_2x + 1 = 0$ e $x^2 - t_3x + 1 = 0$, que resolvidas fornecem as seis raízes da equação recíproca $ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + bx + a = 0$.

4.4.3.2. Equação recíproca de 1ª espécie e grau ímpar

Toda equação recíproca de 1ª espécie e grau ímpar é da forma:
$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + \ldots + a_{n-1}x^{n+2} + a_nx^{n+1} + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Observando a simetria dos coeficientes pode-se concluir que, independentemente do valor de n, tem-se que $x = -1$ é raiz desta equação:

$a_0(-1)^{2n+1} + a_1(-1)^{2n} + a_2(-1)^{2n-1} + \ldots + a_n(-1)^{n+1} + a_n(-1)^n + \ldots + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 =$
$= -a_0 + a_1 - a_2 + \ldots + a_n(-1)^n(-1+1) + \ldots + a_2 - a_1 + a_0 = 0$

Pode-se aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini para baixar o grau da equação. Esta aplicação será feita no caso de uma equação recíproca 1ª espécie e 5º grau da forma $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, mas pode ser generalizada para qualquer grau ímpar de uma equação recíproca de 1ª espécie:

−1	a	b	c	c	b	a
	a	−a + b	a − b + c	−a + b	a	0

Logo, ao baixar o grau de $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ usando o algoritmo de Briot-Ruffini obtém-se como quociente $ax^4 + (b-a)x^3 + (a-b+c)x^2 + (b-a)x + a = 0$, que é uma equação recíproca de 1ª espécie e grau par. Agora basta usar o que foi apresentado no item sobre equações recíprocas de 1ª espécie e grau par para determinar as demais raízes da equação, além de $x = -1$.

4.4.4. Equação recíproca de 2ª espécie

4.4.4.1. Equação recíproca de 2ª espécie e grau ímpar

Toda equação recíproca de 2ª espécie e grau ímpar é da forma:
$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + \ldots + a_{n-1}x^{n+2} + a_nx^{n+1} - a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$

É trivial que $x = 1$ é raiz desta equação:

$a_0(1)^{2n+1} + a_1(1)^{2n} + a_2(1)^{2n-1} + \ldots + a_n(1)^{n+1} - a_n(1)^n - \ldots - a_2(1)^2 - a_1(1) - a_0 =$
$= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n - a_n - \ldots - a_2 - a_1 - a_0 = 0$

Pode-se, então, baixar o grau desta equação aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini. A aplicação será apresentada para um exemplo numérico, no caso de uma equação recíproca de 2ª espécie e 7º grau: $ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 - dx^3 - cx^2 - bx - a = 0$:

1	a	b	c	d	−d	−c	−b	−a
	a	a + b	a + b + c	a + b + c + d	a + b + c	a + b	a	0

Deste modo, pela aplicação do algoritmo de Briot-Ruffini, conclui-se que o quociente da divisão de $ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 - dx^3 - cx^2 - bx - a$ por $x - 1$ é uma equação recíproca de 1ª espécie e grau par: $ax^6 + (a+b)x^5 + (a+b+c)x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (a+b+c)x^2 + (a+b)x + a = 0$. O procedimento anterior pode ser generalizado para uma equação de 2ª espécie e grau ímpar qualquer, cujo resultado de baixar seu grau é uma equação de 1ª espécie e grau par, onde basta aplicar o que foi apresentado no item 4.4.3.1. para determinar suas raízes, além de $x = 1$.

4.4.4.2. Equação recíproca de 2ª espécie e grau par

A princípio, toda equação recíproca de 2ª espécie e grau ímpar é da forma:

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$$

Contudo, o coeficiente simétrico de a_n é ele próprio, fazendo com que $a_n = -a_n$, ou seja, $a_n = 0$. Assim, conclui-se que a forma geral de qualquer recíproca de 2ª espécie e grau ímpar é:

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{n-1}x^{n+1} - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$$

Observando os coeficientes da equação conclui-se que $x = 1$ e $x = -1$ são raízes desta equação. Pode-se então baixar duas vezes o grau desta equação, aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini duas vezes, uma para $x = 1$ e outra para $x = -1$. Por simplicidade a aplicação deste algoritmo será apresentada para um exemplo numérico de uma equação de 2ª espécie e grau 6: $ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a = 0$.

1	a	b	c	0	− c	− b	− a
	a	a + b	a + b + c	a + b + c	a + b	a	0

Logo, o quociente da divisão de $ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a$ por $x - 1$ é o polinômio $ax^5 + (a + b)x^4 + (a + b + c)x^3 + (a + b + c)x^2 + (a + b)x + a$, que está associado a uma equação recíproca de 1ª espécie e grau ímpar. Dividindo este quociente por $x + 1$:

− 1	a	a + b	a + b + c	a + b + c	a + b	a
	a	b	a + c	b	a	0

Assim, conclui-se que o quociente da divisão de $ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a$ por $x^2 - 1$ é $ax^4 + bx^3 + (a + c)x^2 + bx + a$, que está associado a uma equação recíproca de 1ª espécie e grau par. Além das raízes 1 e − 1 as demais raízes podem ser determinadas usando o que foi apresentado no item 4.4.3.1, sobre equações recíprocas de 1ª espécie e grau par

RESUMO DAS EQUAÇÕES RECÍPROCAS

1ª espécie: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

2ª espécie: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$

1ª espécie e grau 4: Dividir por x^2 e montar uma equação de 2º grau em $t = x + \frac{1}{x}$.

1ª espécie e grau 6: Dividir por x^3 e montar uma equação de 3º grau em $t = x + \frac{1}{x}$.

1ª espécie e grau ímpar: − 1 é raiz. Dividindo por $x + 1$ obtém-se uma equação recíproca de 1ª espécie e grau par.

2ª espécie e grau ímpar: 1 é raiz. Dividindo por $x - 1$ obtém-se uma equação recíproca de 1ª espécie e grau par.

2ª espécie e grau par (coeficiente central é nulo): 1 e − 1 são raízes. Dividindo por $x^2 - 1$ obtém-se uma equação recíproca de 1ª espécie e grau par.

Exemplos:

1) (ITA-2009) Suponha que os coeficientes reais a e b da equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ são tais que a equação admite solução não real r com $|r| \neq 1$. Das seguintes afirmações:
I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.
II As raízes podem ser duplas.
III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.
É(são) verdadeira(s):
a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III. d) apenas II e III. e) nenhuma.

Solução (Alternativa A):

Sejam a e b reais, $r = x + yi$, com $y \neq 0$ e $|r| \neq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 1$, sendo r raiz de Eq-1: $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$. Então:

* $r_2 = x - yi$, conjugado de r é raiz

* $r_3 = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{x + yi} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2} \neq x - yi = r_2$ e

* $r_4 = \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{x - yi} = \dfrac{x + yi}{x^2 + y^2} \neq x + yi = r$

Note que r_3 e r_4 são raízes da Eq-1 pois a mesma é recíproca. Como $y \neq 0$, então $r \neq r_3$ e $r_2 \neq r_4$.
Assim, temos $\{r, r_2, r_3, r_4\}$, quatro raízes complexas, não reais, todas diferentes. Logo:
I – verdadeira II – falsa III – falsa

2) (ITA-2008) É dada a equação polinomial

$$(a + c + 2)x^3 + (b + 3c + 1)x^2 + (c - a)x + (a + b + 4) = 0$$

com a, b, c reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto abc é igual a.
a) -2 b) 4 c) 6 d) 9 e) 12

Solução (Alternativa E):

Como a equação é recíproca de 1ª espécie:
i) $a + c + 2 = a + b + 4 \Rightarrow b - c = -2$
ii) $b + 3c + 1 = c - a \Rightarrow a + b + 2c = -1$
Desde que 1 é raiz da equação:
$a + c + 2 + b + 3c + 1 + c - a + a + b + 4 = 0 \Rightarrow$
$a + 2b + 5c = -7$

Resolvendo o sistema obtemos: $\begin{cases} b - c = -2 \\ a + b + 2c = -1 \\ a + 2b + 5c = -7 \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = -3$ e $c = -1$.

Portanto: abc = 12

3) (ITA-97) Seja S o conjunto de todas as raízes da equação $2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = 0$. Sobre os elementos de S podemos afirmar que:
a) Todos são números reais. b) 4 são números reais positivos.
c) 4 não são números reais. d) 3 são números reais positivos e 2 não são reais.
e) 3 são números reais negativos.

Solução (Alternativa D):

i) Como x = 1 é raiz, pode aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini:

1	2	−4	0	0	0	4	−2
	2	−2	−2	−2	−2	2	0

Portanto: $2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = (x - 1)(2x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 2)$
Observa-se, também, que x = −1 é raiz:

– 1	2	– 2	– 2	– 2	– 2	2
	2	4	2	– 4	2	0

Deste modo, $2x^6 - 4x^5 + 4x - 2 = (x+1)(x-1)(2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 2)$

$\therefore 2x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \Rightarrow 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$

Fazendo $z = x + \frac{1}{x} \Rightarrow z^2 - 2z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \pm \sqrt{2}$

i) $x + \frac{1}{x} = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + (\sqrt{2} - 1)x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ duas raízes complexas

ii) $x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ duas raízes reais positivas

4) (ITA-99) A equação polinomial $p(x) = 0$ de coeficientes reais e grau 6 é recíproca de 2ª espécie e admite i como raiz. Se $p(2) = -\frac{105}{8}$ e $p(-2) = \frac{255}{8}$, então a soma de todas as raízes de $p(x)$ é igual a:

a) 10 b) 8 c) 6 d) 2 e) 1

Solução (Alternativa C):

Toda equação recíproca de 2ª espécie e grau 6 é da forma $p(x) = ax^6 - bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a$

Portanto, deve-se calcular o valor de – b/a.

Assim, 1 e – 1 são raízes de p(x). Além disso, como i é raiz e os coeficientes são reais tem-se que – i também é raiz.

Assim, p(x) é divisível por $q(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$.

Dividindo p(x) por q(x): $p(x) = (x^4 - 1)(ax^2 + bx + a)$, onde a = c

Note que $p(x) = a(x^4 - 1)(x^2 - kx + 1)$, onde $k = -b/a$

$p(2) = 15a(5 - 2k)$

$p(-2) = 15a(5 + 2k)$

Dividindo: $\frac{p(-2)}{p(2)} = \frac{5 + 2k}{5 - 2k} = -\frac{255}{105} = -\frac{17}{7} \Rightarrow 35 + 14k = -85 + 34k \Rightarrow 20k = 120 \Rightarrow k = 6$

5) (ITA-98) Seja a um número real tal que o polinômio $p(x) = x^6 + 2x^5 + ax^4 - ax^2 - 2x - 1$ admite apenas raízes reais. Então:

a) $a \in [2, \infty[$ b) $a \in [-1, 1]$ c) $a \in]-\infty, -7]$ d) $a \in [-2, -1[$ e) $a \in]1, 2[$

Solução (Alternativa C):

Nota-se que 1 e – 1 são raízes de p(x):

Dividindo p(x) por $x^2 - 1$ obtém-se: $p(x) = (x^2 - 1)[x^4 + 2x^3 + (a+1)x^2 + 2x + 1]$

$x^4 + 2x^3 + (a+1)x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + a + 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + a + 1 = 0 \Rightarrow$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + a - 1 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t + a - 1 = 0$, onde $t = x + \frac{1}{x}$

$t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow xt = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - t.x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$

Assim, $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t^2 \geq 4 \Rightarrow t \leq -2$ ou $t \geq 2$

$t^2 + 2t + a - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \pm \sqrt{2 - a}$

i) se $t \leq -2 \Rightarrow -1 - \sqrt{2-a} \leq -2 \Rightarrow \sqrt{2-a} \geq 1 \Rightarrow 2 - a \geq 1 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow a \in]-\infty, 1]$

ii) se $t \geq 2 \Rightarrow -1 + \sqrt{2-a} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{2-a} \geq 3 \Rightarrow 2 - a \geq 9 \Rightarrow a \leq -7 \Rightarrow a \in]-\infty, -7[$

A interseção dos dois intervalos dá como resposta $a \in]-\infty, -7[$

Exercícios

1) Determine a equação cujas raízes sejam simétricas com relação às raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$.

2) Qual é a equação polinomial cujas raízes são iguais às raízes da equação $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ acrescidas de 50%?

3) Determinar a relação de transformação mediante a qual $y^3 - 12y + 16 = 0$ é uma transformada multiplicativa de $x^3 - 3x + 2 = 0$

4) (ITA-87) Multiplicando-se por 2 as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$ vamos obter raízes da seguinte equação:
a) $2y^3 - 6y^2 + 6y - 4 = 0$
b) $y^3 - 4y^2 + 8y - 8 = 0$
c) $8y^3 - 8y^2 + 4y - 1 = 0$
d) $y^3 - 8y^2 + 8y + 8 = 0$
e) $4y^3 - 4y^2 - 4y - 8 = 0$

5) Sejam u, v e w as raízes da equação $4t^3 - 7t^2 - 3t + 2 = 0$. Determine a equação cujas raízes são $u - \frac{1}{vw}$, $v - \frac{1}{wu}$ e $w - \frac{1}{uv}$.

6) Determinar a transformada aditiva de $x^3 + 2x^2 + 3x - 5 = 0$ desprovida de termo do segundo grau.

7) Determinar a relação de transformação mediante a qual $y^3 + 9y^2 + 26y + 25 = 0$ é uma transformada aditiva de $x^3 - x + 1 = 0$.

8) (PUC-74) O polinômio $P(x) = 3x^2 - 4x + 2$ desenvolvido segundo as potências de $(x + 2)$ fica:
a) $P(x) = 3(x + 2)^2 - 16(x + 2) + 22$
b) $P(x) = 3(x + 2)^2 - 8(x + 2) - 22$
c) $P(x) = 3(x + 2)^2 + 16(x + 2) + 22$
d) $P(x) = 3(x + 2)^2 - 5(x + 2) - 1$
e) $P(x) = 3(x + 2)^2 + 6(x + 2) + 11$

9) Considere a equação $x^3 + 5x^2 + 4x - 8 = 0$. Determine a equação cujas raízes sejam duas unidades superior às raízes da equação dada.

10) (Mackenzie-2001) Na equação $x^3 + 2x + 1 = 0$, de raízes a, b e c, o produto $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$ vale:
a) 4 b) −2 c) −4 d) 6 e) 2

11) (Unicamp-92) Sabendo que a equação $x^3 - 2x^2 + 7x - 4 = 0$ tem raízes a, b e c, escreva, com seus coeficientes numéricos, uma equação cúbica que tem como raízes $a + 1$, $b + 1$ e $c + 1$.

12) (Unifor-2003) Se a, b, c são as raízes do polinômio $f = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, o polinômio g, cujas raízes são a + 1, b + 1, c + 1 é tal que
a) $g = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$
b) $g = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$
c) $g = x^3 - 5x^2 + 10x - 7$
d) $g = x^3 - 5x^2 + 7x - 6$
e) $g = x^3 - 5x^2 + 7x - 7$

13) (Unifor-2003) Sejam a e b as raízes reais da equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$. A equação do 2º grau cujas raízes são a + 1 e b + 1 é
a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ b) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
c) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ d) $x^2 + 5x = 0$
e) $x^2 - 5x = 0$

14) (IME-64/65) Desenvolva em potências de $(x - 2)$ o polinômio: $P(x) = 2x^3 - 14x^2 + 8x + 48$.

15) (IME-67/68) Determine a transformação em $kx + h$ da equação $x^3 + 4x^2 - 12x + 160 = 0$, de tal forma que a se $2 - 4i$ fosse raiz dessa equação, a raiz correspondente da equação transformada seria $0,9 + 0,2i$.

16) Sejam r, s e t as raízes da equação cúbica $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$, onde a e b são inteiros. Seja $M(x)$ uma equação transformada de $P(x)$ da forma $M(x) = P(x - 1)$. Sendo $M(x) = y^3 + cy^2 + dy + 1$, onde c e d são inteiros, prove que outra raiz de $P(x)$ (s ou t), pode ser expressa da forma $s = -1/(r + 1)$ ou $s = -(r + 1)/r$.

17) Determinar a, b e c de modo que a equação $ax^5 + bx^4 + cx^3 + 2x^2 + 5x - 1 = 0$ seja equivalente à sua transformada recíproca.

18) (PUC-76) Os valores de a, b e c de modo que a equação $x^6 + 8ax^5 + (b - 2)x^4 + (4a + b + c)x^3 + 2ax^2 + (b - 2a)x - 1 = 0$ seja recíproca, são:
a) $a = 1$; $b = 3$; $c = -\frac{1}{2}$
b) $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$
c) $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = -1$

d) $a = -\frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = 3$

e) $a = -\frac{1}{2}$; $b = 3$; $c = -1$

19) (AFA-99) Se a, b, c, d, e são as raízes do polinômio $P(x) = 2x^5 - 6x^4 + 3x^3 + x^2 + 7x + 5$, então, o valor de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$ é

a) $-\frac{7}{5}$. b) $-\frac{2}{5}$. c) $\frac{3}{7}$. d) $\frac{1}{3}$.

20) (ITA-74) O valor absoluto da soma das duas menores raízes da equação

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4 \text{ é:}$$

a) 2 b) 3

c) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$ d) 4

e) nenhuma das respostas anteriores

21) (ITA-75) Sendo a, b, c, d as raízes da equação $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$, podemos afirmar que:

a) a, b, c, d são reais positivas.

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é igual a 13/5.

c) $\frac{1}{bcd}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{abc}$ é a soma das raízes.

d) a, b, c, d não são reais.

e) nenhuma das anteriores.

22) (ITA-62) Resolver a equação $4x^6 - 21x^4 + 21x^2 - 4 = 0$.

23) (ITA-67) A equação $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = 0$ tem raízes:

a) $\pm i$; $\frac{1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$ b) $2i \pm 3$; $\frac{7 \pm 3i}{2}$

c) $i \pm 1$; $\frac{2 \pm 2i}{3}$ d) $\pm i$; $\frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$

e) $\frac{1 \pm 3}{5}$; $\frac{2 \pm i}{2}$

24) (ITA-68) Para que a equação $2x^4 + bx^3 - bx - 2 = 0$ tenha quatro soluções reais e distintas devemos ter:

a) b um número real qualquer b) $b = 0$

c) $b > 0$ d) $b < -1$

e) $b > 4$

25) (ITA-78) Sejam x_1, x_2, x_3, ..., x_6 raízes do polinômio $P(x) = 6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6$, então:

a) P (x) admite mais de duas raízes negativas.

b) $\sum_{j=1}^{6} x_j > \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{x_j}$

c) P (x) admite duas raízes irracionais.

d) $\sum_{j=1}^{6} x_j = 0$ pois P(x) = 0 é uma equação recíproca.

e) n.d.a.

26) (ITA-85) Como $ax^4 + bx^3 + 5x + 3 = 0$ é recíproca e tem o 1 como raiz, o produto das raízes reais desta equação é:

a) 2 b) −1 c) 1 d) 3 e) 4

27) (ITA-91) Considere as afirmações:

I - A equação $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$ só admite raízes reais.

II - Toda equação recíproca admite um número par de raízes.

III - As raízes da equação $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$. São exatamente o dobro das raízes de $x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$.

Então:

a) Apenas I é verdadeira.

b) Apenas II é falsa.

c) Apenas III é verdadeira.

d) Todas são verdadeiras.

e) n.d.a.

28) (ITA-92) Sejam a e b constante reais. Sobre a equação: $x^4 - (a + b)x^3 + (ab + 2)x^2 - (a + b)x + 1 = 0$ podemos afirmar que:

a) Não possui raiz real se $a < b < -3$.

b) Não possui raiz real se $a > b > 3$.

c) Todas as raízes são reais se $|a| \geq 2$ e $|b| > 2$.

d) Possui pelo menos uma raiz real se $-1 < a \leq b < 1$.

e) n.d.a.

29) (ITA-93) Sabendo-se que a equação de coeficientes reais $x^6 - (a + b + c)x^5 + 6x^4 + (a - 2b)x^3 - 3cx^2 + 6x - 1 = 0$ é uma equação recíproca de segunda classe, então o número de raízes reais desta equação desta equação é:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

30) Resolver a equação $6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$.

31) (IME-66/67) Forme a equação recíproca de menor grau que admite como raiz o maior dos restos das divisões de P(x) por (2x – 1) e por (x + 1), sendo $P(x) = 16x^6 - 4x^4 + 16x - 1$.

32) (IME-67/68) Seja m um inteiro maior que zero. Calcule o valor do somatório dos inversos dos cubos das raízes da equação $mx^4 + 8x^3 - 139x^2 - 18x + 9 = 0$ (sem resolvê-la).

33) (ITA-2011) Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in R$, admite a raiz -i. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:
I – Quatro das raízes são imaginárias puras.
II – Uma das raízes tem multiplicidade dois
III – Apenas uma das raízes é real
Desta, é (são) verdadeira(s) apenas
a) I b) II c) III
d) I e III e) II e III.

34) (IME-70/71) Resolver a equação $6x^6 + 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 - 35x - 6 = 0$.

35) (IME-87/88) Mostre que se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_1x^3 + a_0x^4$, então existe um polinômio g(x) do 2º grau, tal que $p(x) = x^2g(x + x^{-1})$.
b) Determine todas as raízes do polinômio $p(x) = 1 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + x^4$.

36) (ITA-70) Sejam $P(x) = x^4 + a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ e $Q(x) = a_3x^4 + a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x$ dois polinômios. Sabendo-se que $P(x) > 0$ para todo x real, temos, então, que:
a) $Q(a_3) > -2$
b) $Q(a_3) \leq 0 - 3$
c) $-2 < Q(a_3) < -1$
D) $Q(a_3) < -3$
e) nenhuma das anteriores

37) Resolver a equação recíproca $8x^4 - 54x^3 - 101x^2 - 54x + 8 = 0$.

38) Dada a equação $x^6 + 8ax^5 + (b - 2)x^4 + (4a + b + c)x^3 + 2ax^2 + (b - 2)x - 1 = 0$, determinar a, b e c de modo que seja recíproca e resolver.

39) Dada a equação $x^3 + px + q = 0$, de raízes a, b, c, demonstrar que o valor da expressão $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$ é $\frac{3+p}{1+p-q}$.

40) Seja a equação $x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$, cujas raízes são a, b e c. Determine o valor $\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c}$.

41) Se α, β e γ são as raízes de $x^3 - x - 1 = 0$, calcule $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.

42) Quando a, b, c designam as raízes da equação $x^3 + qx + r = 0$, demonstre que a equação cujas raízes são $\frac{1-a}{a}$, $\frac{1-b}{b}$, $\frac{1-c}{c}$ é $ry^3 + (q + 3r)y^2 + (2q + 3r)y + q + r + 1 = 0$.

43) Fatore o polinômio $P(x) = x^8 + 98x^4 + 1$ como a multiplicação de dois polinômios de grau 4 com coeficientes inteiros.
Dica: Observe que as raízes de P(x) podem separadas em dois grupos: (a, 1/a, b, 1/b) e (– a, – 1/a, – b e – 1/b)

45) Determine o valor mínimo de $a^2 + b^2$ se a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ possui raízes reais.

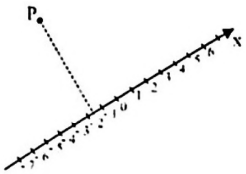
45) O polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ possui coeficientes inteiros a, b, c e d, com ad ímpar e bc par. Demonstre que ao menos uma das raízes do polinômio é irracional.
Dica: Faça a substituição $x = ay$ e determine uma equação transformada cujas raízes sejam inteiras.

Estudo do Ponto

5.1. PLANO CARTESIANO

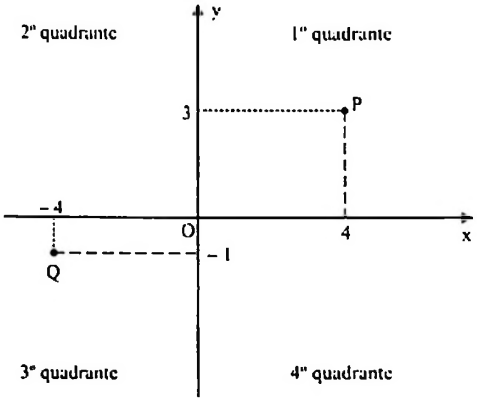
Idealizado pelo famoso matemático francês René Descartes, os sistema de eixos cartesianos é uma forma de mapear todos os pontos de um plano. Para tanto, a todos os pontos de um plano são associadas coordenadas retangulares, coordenadas estas que são definidas pela projeção do ponto sobre dois eixos perpendiculares.

O exemplo abaixo mostra como identificar a coordenada de um ponto P sobre um eixo qualquer.



Inicialmente, um eixo real deve estar devidamente definido (direção e sentido) e identificado (neste caso está denominado de eixo x). Um eixo real é uma reta orientada onde cada ponto desta reta representa um diferente número real. Depois deve-se observar a escala do eixo. Finalmente, basta projetar este ponto sobre o eixo e identificar o ponto de interseção desta projeção com o próprio eixo. No caso da figura ao lado a projeção do ponto P sobre o eixo x intersectou o eixo em um ponto no intervalo $[-1, -2]$. Desta maneira, a coordenada do ponto P medida pelo eixo x poderia ser, por exemplo, $x_P = -1{,}6$.

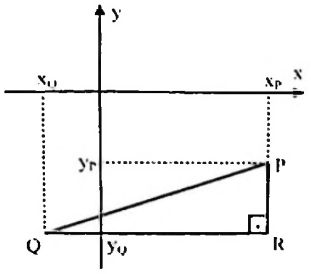
No sistema de eixos cartesianos lançamos mão de dois eixos perpendiculares, geralmente denominados de eixos x (também chamado de eixo das abscissas) e eixo y (ou eixo das ordenadas) para mapear todos os pontos de um plano, associando duas coordenadas a cada ponto. Observe a figura abaixo, onde iremos identificar os principais itens de um sistema de eixos cartesianos.



- os dois eixos, x e y, são perpendiculares e a interseção deles ocorre no ponto que representa o número zero em cada eixo. Este ponto é denominado de origem do sistema de eixos e é representado pela letra O;
- as coordenadas de um ponto neste sistema de eixos são determinadas pelas projeções do ponto sobre os eixos x e y. Por exemplo, na figura ao lado pode-se identificar que $x_P = 4$ e $y_P = 3$. Da mesma forma, conclui-se que $x_Q = -4$ e $y_P = -1$;
- A simbologia mais sintética para representar as coordenadas de um ponto é $P = (x_P, y_P)$. Por exemplo, os pontos P e Q da figura são representados por $P = (4, 3)$ e $Q = (-4, -1)$;
- os dois eixos dividem o plano em quatro regiões, denominadas de quadrantes, conforme mostra a figura;
- Todo ponto pertencente ao 1º quadrante possui coordenadas x e y positivas. Todo ponto pertencente ao 2º quadrante possui coordenada x negativa e y positiva. Todo ponto pertencente ao 3º quadrante possui coordenadas x e y negativas. Todo ponto pertencente ao 4º quadrante possui coordenada x positiva e y negativa;
- Todo ponto pertencente ao eixo x possui coordenada y igual a zero. Todo ponto pertencente ao eixo y possui coordenada x igual a zero;
- A origem do plano cartesiano é o único ponto do plano cujas ambas coordenadas são nulas.

5.2. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Observe a figura abaixo, onde estão representados dois pontos, P e Q, distintos:



Prolongue a projeção de P sobre o eixo x até encontrar a projeção do ponto Q sobre o eixo y. Seja R a interseção destes dois prolongamentos, como está indicado na figura ao lado.

Note que o ponto P está localizado no 4º quadrante e o ponto Q esta no 3º quadrante, porém, para uma localização qualquer de um ponto no plano cartesiano pode-se afirmar que $\overline{QR} = |x_P - x_Q|$ e $\overline{PR} = |y_P - y_Q|$.

Uma vez que o triângulo PQR é retângulo:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 + \overline{PR}^2 \Rightarrow \boxed{\overline{PQ} = \sqrt{|x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2}}$$

Observação: Caso os pontos distintos P e Q pertençam a uma reta horizontal ou vertical a expressão fica bem mais simples:

i) Pontos P e Q alinhados horizontalmente ($y_P = y_Q$): $\overline{PQ} = |x_P - x_Q|$

) Pontos P e Q alinhados verticalmente ($x_P = x_Q$): $\overline{PQ} = |y_P - y_Q|$

Exemplos:

1) Determinar a distância entre os pontos P(– 3, 2) e Q(2, – 10).

Solução:

$$\overline{PQ} = \sqrt{|x_P - x_Q|^2 + |y_P - y_Q|^2} = \sqrt{|-3-2|^2 + |2-(-10)|^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

2) Determinar x de modo que o triângulo ABC seja retângulo em B, onde A(4, 5), B(1, 1) e C(x, 4).

Solução:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \Rightarrow$

$(x-4)^2 + (4-5)^2 = (4-1)^2 + (5-1)^2 + (x-1)^2 + (4-1)^2 \Rightarrow$

$x^2 - 8x + 16 + 1 = 9 + 16 + x^2 - 2x + 1 + 9 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow x = -3$

3) Considere os pontos A(1, – 2) e B(– 3, 1) no plano cartesiano. Determine as coordenadas do ponto C tal que ABC seja um triângulo equilátero.

Solução:

Inicialmente deve-se observar que:

$$\overline{AB} = \sqrt{|x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2} = \sqrt{|1-(-3)|^2 + |-2-1|^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Suponha que as coordenadas do ponto C sejam C(a, b). Assim:

$\overline{AC} = \sqrt{|x_C - x_A|^2 + |y_C - y_A|^2} = \sqrt{|a-1|^2 + |b-(-2)|^2} = 5 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 + 4b + 4 = 25 \Rightarrow$

$a^2 + b^2 - 2a + 4b = 20$ (1)

$\overline{BC} = \sqrt{|x_C - x_B|^2 + |y_C - y_B|^2} = \sqrt{|a-(-3)|^2 + |b-1|^2} = 5 \Rightarrow a^2 + 6a + 9 + b^2 - 2b + 1 = 25 \Rightarrow$

$a^2 + b^2 + 6a - 2b = 15$ (2)

Subtraindo as equações (1) e (2): $8a - 6b = -5 \Rightarrow a = \dfrac{6b-5}{8}$ (3)

Substituindo a equação (3) na (1): $\left(\dfrac{6b-5}{8}\right)^2 + b^2 - 2\left(\dfrac{6b-5}{8}\right) + 4b = 20 \Rightarrow$

$\dfrac{36b^2 - 60b + 25}{64} + b^2 - \dfrac{6b-5}{4} + 4b = 20 \Rightarrow 36b^2 - 60b + 25 + 64b^2 - 96b + 80 + 256b = 1280 \Rightarrow$

$100b^2 + 100b - 1175 = 0 \Rightarrow 4b^2 + 4b - 47 = 0 \Rightarrow b = \frac{4 \pm 16\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2} \pm 2\sqrt{3}$

i) Se $b = \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{6b-5}{8} = \frac{3-12\sqrt{3}-5}{8} = -\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ii) Se $b = \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{6b-5}{8} = \frac{3+12\sqrt{3}-5}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Deste modo, tem-se que $C\left(\frac{-1-6\sqrt{3}}{4}, \frac{1-4\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $C\left(\frac{-1+6\sqrt{3}}{4}, \frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)$

4) Dados A(8, 7) e C(– 2, – 3), vértices opostos de um quadrado ABCD, determina as coordenadas dos pontos B e D.

Solução:

Cálculo da diagonal AC do quadrado:

$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{[8-(-2)]^2 + [7-(-3)]^2} = \sqrt{100+100} = 10\sqrt{2}$

Deste modo, se ABCD é um quadrado então $\overline{AB} = 10$ e $\overline{BC} = 10$.

Supondo que as coordenadas de B sejam (a, b):

i) $\overline{AB} = 10 \Rightarrow 10 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(a-8)^2 + (b-7)^2} \Rightarrow$

$100 = a^2 - 16a + 64 + b^2 - 14b + 49 \Rightarrow a^2 + b^2 - 16a - 14b = -13 \quad (1)$

ii) $\overline{BC} = 10 \Rightarrow 10 = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{[a-(-2)]^2 + [b-(-3)]^2} \Rightarrow$

$100 = a^2 + 4a + 4 + b^2 + 6b + 9 \Rightarrow a^2 + b^2 + 4a + 6b = 87 \quad (2)$

Subtraindo as equações (1) e (2):

$20a + 20b = 100 \Rightarrow a + b = 5 \Rightarrow b = 5 - a \quad (3)$

Substituindo o resultado (3) na equação (1):

$a^2 + (5-a)^2 + 4a + 6(5-a) = 87 \Rightarrow a^2 + 25 - 10a + a^2 + 4a + 30 - 6a = 87 \Rightarrow$

$2a^2 - 12a - 32 = 0 \Rightarrow a^2 - 6a - 16 = 0 \Rightarrow (a-8)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 8$ ou $a = -2$

Se $a = 8 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow B(8, -3)$

Se $a = -2 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow B(-2, 7)$

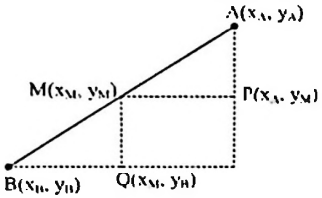
Desde que o procedimento para a determinação de D é idêntico ao de B, conclui-se que os outros dois vértices do quadrado ABCD são (8, – 3) e (– 2, 7)

5.3. PONTO MÉDIO

5.3.1. Definição: O ponto médio M de um segmento $\overline{AB}$ é o ponto deste segmento tal que $\overline{AM} = \overline{BM}$.

5.3.2. Teorema: Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos no plano cartesiano. As coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ são $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Demonstração:



A partir de A deve-se traçar uma reta vertical (paralela ao eixo y) até encontrar a reta horizontal (paralela ao eixo x) traçada a partir de B. A partir de M traça-se uma reta horizontal e uma vertical, até encontrarem as retas já traçadas a partir de A e B nos pontos P e Q, respectivamente, como indicado na figura.

Assim, conclui-se que: $x_P = x_A$, $y_P = y_M$, $x_Q = x_M$ e $y_Q = y_B$.

Uma vez que $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$, $\angle AMP \equiv \angle MBQ$ e $\angle APM \equiv = \angle MQB$ então tem-se que $\Delta AMP \equiv \Delta MBQ$:

i) $\overline{MP} \equiv \overline{BQ} \Rightarrow x_A - x_M = x_M - x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

ii) $\overline{AP} \equiv \overline{MQ} \Rightarrow y_A - y_M = y_M - y_B \Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Exemplos:

1) Calcular o comprimento da mediana AM do triângulo ABC cujos vértices são os pontos A(0, 0), B(3, 7) e C(5, – 1)

Solução:

M é ponto médio do segmento $\overline{BC}$:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7+(-1)}{2} = 3$$

$$\overline{AM} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

2) Se M(2, 1), N(3, 3) e P(6, 2) são os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente, de um triângulo ABC, determinar as coordenadas de A, B e C.

Solução:

i) M é ponto médio AB:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \Rightarrow x_A + x_B = 4 \quad (1)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \Rightarrow y_A + y_B = 2 \quad (2)$$

ii) N é ponto médio BC:

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = 3 \Rightarrow x_B + x_C = 6 \quad (3)$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = 3 \Rightarrow y_B + y_C = 6 \quad (4)$$

iii) P é ponto médio AC:

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} = 6 \Rightarrow x_A + x_C = 12 \quad (5)$$

$y_P = \frac{y_A + y_C}{2} = 2 \Rightarrow y_A + y_C = 4$ (6)

Somando as expressões (1), (3) e (5): $x_A + x_B + x_C = 11$ (7)
Subtraindo as equações (7) e (1) segue que $x_C = 7$.
Subtraindo as equações (7) e (3) segue que $x_A = 5$.
Subtraindo as equações (7) e (5) segue que $x_B = -1$.
Somando as expressões (2), (4) e (6): $y_A + y_B + y_C = 6$ (8)
Subtraindo as equações (8) e (2) segue que $y_C = 4$.
Subtraindo as equações (8) e (4) segue que $y_A = 0$.
Subtraindo as equações (8) e (6) segue que $y_B = -2$.
Deste modo, os vértices do triângulo são A(5, 0), B(– 1, – 2) e C(7, 4).

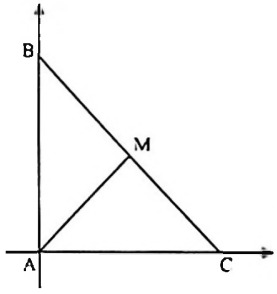
3) Determine condições necessárias e suficientes de modo que os pontos distintos M(a, b), N(c, d), P(e, f) e Q(g, h) sejam vértices de um paralelogramo.
Solução:
A condição necessária e suficiente para que MNPQ seja um paralelogramo é que as diagonais MP e NQ se cortem em seus respectivos pontos médios.

Se R é o ponto médio MP: $x_R = \frac{x_M + x_P}{2} = \frac{a+e}{2}$ ^ $y_R = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{b+f}{2}$

Se S é o ponto médio NQ: $x_S = \frac{x_N + x_Q}{2} = \frac{c+g}{2}$ ^ $y_S = \frac{y_N + y_Q}{2} = \frac{d+h}{2}$

De modo que R e S coincidam deve-se ter $x_R = x_S$ ^ $y_R = y_S \Rightarrow a + c = c + g$ ^ $b + f = d + h$

4) Demonstrar que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade de comprimento da hipotenusa.
Solução:



Note que qualquer triângulo retângulo pode ser desenhado em um sistema de eixos cartesianos de modo que o vértice do ângulo reto coincida com a origem do sistema cartesiano e os catetos estejam localizados ao longo dos eixos coordenados, conforme mostra a figura ao lado.
Desta forma os vértices são dados por: A(0, 0), B(0, b) e C(c, 0)
Se M o ponto médio da hipotenusa BC tem-se que:

$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+c}{2} = \frac{c}{2}$

$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{b+0}{2} = \frac{b}{2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(0-c)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

$\overline{AM} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$

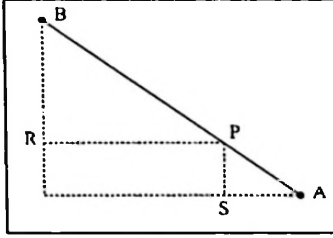
Desde modo, segue diretamente que $\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2}$

5.4. RAZÃO DE SECÇÃO

5.4.1. Definição: Um ponto P divide um segmento de reta $\overline{AB}$ na razão m : n (m e n números reais) se $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n}$.

5.4.2. Teorema: Um ponto $P(x_P, y_P)$ divide um segmento de reta $\overline{AB}$, onde $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, na razão m : n se $\frac{m}{n} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P}$ e $\frac{m}{n} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_P}$, onde $x_P \neq x_A \neq x_B$ e $y_P \neq y_A \neq y_B$.

Demonstração:



Pela construção da figura ao lado tem-se $\Delta BRP \sim \Delta PSA$:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{BR}} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{x_A - x_S}{x_R - x_P} = \frac{y_P - y_S}{y_B - y_R}$$

Entretanto, $x_S = x_P$, $x_R = x_B$, $y_S = y_A$ e $y_R = y_P$. Assim:

$$\frac{m}{n} = \frac{x_A - x_P}{x_B - x_P} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} \text{ e } \frac{m}{n} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_P}$$

Observações

1) Caso $x_A = x_B$ então a razão de se secção fica definida somente pela equação $\frac{m}{n} = \frac{y_P - y_A}{y_B - y_P}$. Neste case tem-se necessariamente que $x_P = x_A = x_B$.

2) Caso $y_A = y_B$ então a razão de se secção fica definida somente pela equação $\frac{m}{n} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P}$. Neste case tem-se necessariamente que $y_P = y_A = y_B$.

3) Também é possível estender o conceito de razão de secção para pontos fora do interior do segmento. Por exemplo, um ponto P pertencente à reta que passe por A e B localizado de tal modo que A esteja entre B e P divide o segmento AB numa razão negativa.

Exemplo:

1) Considere o triângulo ABC, tal que A(– 10, – 5), B(15, – 5) e C(6, 7). Determine o ponto de encontro da bissetriz interna do ângulo A com o lado BC.

Solução:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-10-15)^2 + [(-5-(-5))]^2} = 25$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-10-6)^2 + (-5-7)^2} = 20$$

Suponha que P é o ponto onde a bissetriz interna de A intersecta o lado BC. Pelo teorema de bissetriz interna sabe-se que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$. Logo:

i) $\frac{5}{4} = \frac{x_P - x_B}{x_C - x_P} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{x_P - 15}{6 - x_P} \Rightarrow 30 - 5x_P - 4x_P - 60 \Rightarrow 9x_P = 90 \Rightarrow x_P = 10$

ii) $\frac{5}{4} = \frac{y_P - y_B}{y_C - y_P} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{y_P + 5}{7 - y_P} \Rightarrow 35 - 5y_P = 4y_P + 20 \Rightarrow 9y_P = 15 \Rightarrow x_P = 5/3$

Assim, o ponto de encontro da bissetriz de A com o lado BC é o ponto P(10, 5/3)

5.5. TRÊS PONTOS ALINHADOS

Há três casos a considerar na análise da colinearidade de três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ num plano cartesiano

1° caso: $x_1 = x_2 = x_3$
Nesta situação, os pontos A, B e C são colineares e pertencem a uma reta paralela ao eixo das ordenadas.

2° caso: $y_1 = y_2 = y_3$
Nesta situação, os pontos A, B e C são colineares e pertencem a uma reta paralela ao eixo das abscissas.

3° caso: $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ e $y_1 \neq y_2 \neq y_3$
Suponha que o ponto C divida o segmento $\overline{AB}$ na razão m : n. Assim, tem-se que:

$$\frac{m}{n} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} \quad e \quad \frac{m}{n} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} \Rightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} \Rightarrow \boxed{\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}}$$

Exemplos:

1) Determinar y para que os pontos A(3, 5), B(– 3, 8) e C(4, y) sejam colineares.
Solução:

$$\frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_C - y_A}{y_C - y_B} \Rightarrow \frac{4-3}{4+3} = \frac{y_C - 5}{y_C - 8} \Rightarrow y_C - 8 = 7y_C - 35 \Rightarrow 6y_C = 27 \Rightarrow y_C = 9/2$$

2) Determinar P(a, b) colinear simultaneamente com A(– 1, – 2) e B(2, 1) e com C(– 2, 1) e D(1, – 4).
Solução:

i) P, A e C alinhados: $\frac{x_A - x_P}{x_A - x_B} = \frac{y_A - y_P}{y_A - y_B} \Rightarrow \frac{-1-a}{-1-2} = \frac{-2-b}{-2-1} \Rightarrow 1 + a = 2 + b \Rightarrow a = b + 1$

ii) P, C e D alinhados: $\frac{x_C - x_P}{x_C - x_D} = \frac{y_C - y_P}{y_C - y_D} \Rightarrow \frac{-2-a}{-2-1} = \frac{1-b}{1+4} \Rightarrow 5(2 + a) = 3(1 - b) \Rightarrow$

$10 + 5a = 3 - 3b \Rightarrow 5a = -7 - 3b \Rightarrow 5(b + 1) = -7 - 3b \Rightarrow 5b + 5 = -7 - 3b \Rightarrow 8b = -12 \Rightarrow$
$b = -3/2 \Rightarrow a = -1/2$
Logo: P(– 1/2, – 3/2)

3) Demonstrar que os pontos A(a, 2a – 1), B(a + 1, 2a + 1) e C(a + 2, 2a + 3) são colineares para todo possível valor real do número a.
Solução:

$$\frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} = \frac{a+2-a}{a+2-(a+1)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{y_C - y_A}{y_C - y_B} = \frac{2a+3-(2a-1)}{2a+3-(2a+1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Como $\frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_C - y_A}{y_C - y_B}$ segue que os pontos A, B e C estão alinhados, para qualquer valor real de a.

Estudo da Reta

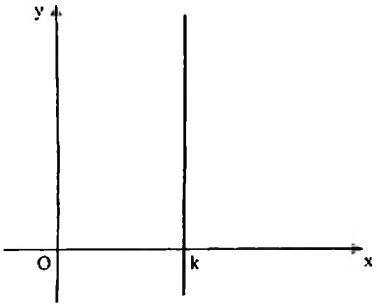
5.6. EQUAÇÃO GERAL DA RETA

5.6.1. Teorema: As coordenadas (x, y) de todos os pontos P de uma reta r no plano cartesiano estão relacionadas por uma equação da forma $ax + by + c = 0$, denominada de equação geral da reta.

Demonstração:

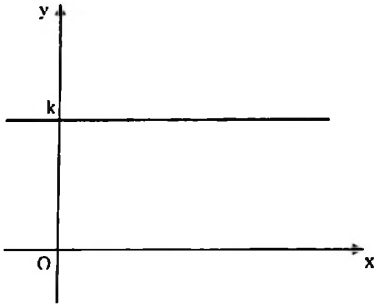
Suponha que r é a reta determinada pelos pontos distintos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Há três casos a considerar:

1º CASO: $x_1 = x_2 = k$



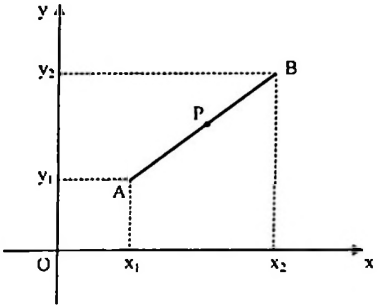
Neste caso, a reta determinada pelos pontos A e B é paralela ao eixo das ordenadas (reta vertical) e todos os pontos P desta reta possuem coordenada x igual a k. Assim, a equação geral da reta r é $x - k = 0$. Portanto, a equação geral da reta é da forma $ax + by + c = 0$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = -k$.

2º CASO: $y_1 = y_2 = k$



Neste caso, a reta determinada pelos pontos A e B é paralela ao eixo das abscissas (reta horizontal) e todos os pontos P desta reta possuem coordenada y igual a k. Assim, a equação geral da reta r é $y - k = 0$. Logo, a equação geral da reta é da forma $ax + by + c = 0$, onde $a = 0$, $b = 1$ e $c = -k$.

3º CASO: $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$



Como os pontos A, B e P são colineares então:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} \Rightarrow (x - x_1)(y - y_2) = (x - x_2)(y - y_1) \Rightarrow$$

$$xy - xy_2 - yx_1 + x_1y_2 = xy - xy_1 - yx_2 + x_2y_1 \Rightarrow$$

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$$

Mais uma vez tem-se que a equação geral da reta é da forma $ax + by + c = 0$, onde:

$a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ e $c = x_2y_1 - x_1y_2$.

Observações:

1) Observe que para uma mesma reta existem infinitas equações gerais, uma vez que se $ax + by + c = 0$ então tem-se também que $akx + bky + ck = 0$, com $k \neq \mathbb{R}^*$. Neste caso, afirma-se que as equações são equivalentes. Assim, pode-se afirmar que toda reta do plano cartesiano está associada a um conjunto de equações gerais equivalentes entre si.

2) Desde que os pontos A e B devem ser distintos, então a e b são podem ser simultaneamente nulos.

5.6.1.2. Teorema: No plano cartesiano, os pontos P(x, y) cujas coordenadas estão relacionadas por uma equação da forma $ax + by + c = 0$ (a ou $b \neq 0$) formam uma reta.

Demonstração:

Se $a = 0$ então $by + c = 0 \Rightarrow y = -c/b \Rightarrow$ todos os pontos pertencem a uma reta paralela ao eixo x

Se $b = 0$ então $ax + c = 0 \Rightarrow x = -c/a \Rightarrow$ todos os pontos pertencem a uma reta paralela ao eixo y

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, suponha que $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são três pontos distintos no plano cartesiano cujas coordenadas estão relacionadas pela equação $ax + by + c = 0$. Logo:

$ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow ax_1 = -by_1 - c$

$ax_2 + by_2 + c = 0 \Rightarrow ax_2 = -by_2 - c$

$ax_3 + by_3 + c = 0 \Rightarrow ax_3 = -by_3 - c$

Desta maneira:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{ax_3 - ax_1}{ax_3 - ax_2} = \frac{-by_3 - c + by_1 + c}{-by_3 - c + by_2 + c} = \frac{b(y_1 - y_3)}{b(y_2 - y_3)} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$$

Concluímos, então, que o ponto C pertence à reta determinada pelos pontos A e B. Como bastam dois pontos distintos para determinar uma reta, o ponto C é variável e percorre toda a reta determinada pelos pontos A e B.

5.7. EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

5.7.1.. Teorema: As coordenadas de todos os pontos P(x, y) pertencentes a uma reta r não paralela ao eixo y podem ser relacionadas por uma equação da forma $y = mx + n$.

Demonstração:

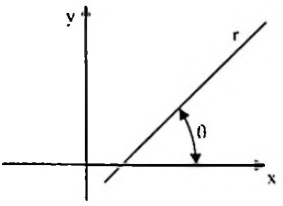
Como a reta é não paralela ao eixo y, então $b \neq 0$.

Sabe-se que a equação geral de uma reta é dada por $ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

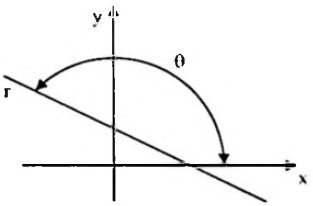
Assim, pode-se identificar que $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$.

5.7.1. Coeficiente Angular

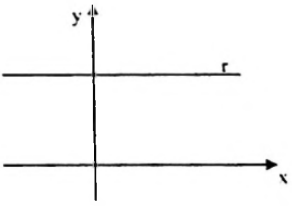
5.7.1.1. Ângulo entre Reta e o eixo x: O ângulo entre uma reta r e o eixo x é medido a partir do semi-eixo x positivo, conforme mostram as figuras abaixo.



ângulo θ agudo: $0 < \theta < 90°$



ângulo θ obtuso: $90° < \theta < 180°$

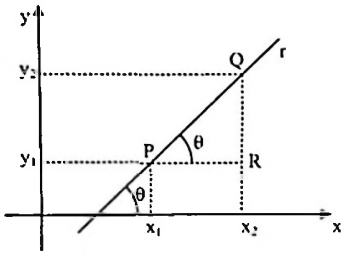


se r // x então $\theta = 0$

5.7.1.2. Definição: Coeficiente angular é igual à tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo x. Desta forma, toda reta crescente possui coeficiente angular positivo, toda reta decrescente possui coeficiente angular negativo e toda reta horizontal possui coeficiente angular nulo. Não é definido o valor do coeficiente angular de uma reta vertical.

5.7.1.3. Cálculo do Coeficiente Angular

1° CASO: Determinação do coeficiente angular a partir de dois pontos distintos de uma reta não vertical.



Considere a reta r que passa pelos pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$.
Projete os pontos P e Q nos eixos cartesianos. Denomine de R o ponto de interseção da projeção de P sobre o eixo y e a projeção de Q sobre o eixo x.
Observe que o ângulo θ formado pela reta r e o eixo x é igual ao ângulo ∠QPR.

Portanto: $tg\theta = \dfrac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Rightarrow \boxed{tg\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$, com $x_1 \neq x_2$

Observações:

1) Apesar da demonstração anterior ter sido feita para o caso de uma reta crescente (coeficiente angular positivo), a mesma equação para o cálculo do coeficiente angular será encontrada para o caso de uma reta decrescente (coeficiente angular negativo).

2) Se $y_1 = y_2$ tem-se que a reta é horizontal (paralela ao eixo x) e assim tem-se $tg\ \theta = 0$.

2° CASO: Determinação do coeficiente angular a partir da equação geral de uma reta

No item referente a equação geral de uma reta concluiu-se que a expressão da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por $ax + by + c = 0$, onde $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ e $c = x_2y_1 - x_1y_2$.

Como o coeficiente angular de uma reta é dado por $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, então a partir da equação geral de uma reta dada por $ax + by + c = 0$ tem-se que o coeficiente angular é dado por $\boxed{tg\ \theta = -\dfrac{a}{b}}$

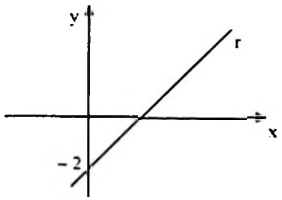
3° CASO: Determinação do coeficiente angular a partir da equação reduzida de uma reta

Sabe-se que a partir da equação geral $ax + by + c = 0$ pode-se concluir que a equação reduzida é dada por $y = mx + n$, onde $m = -\dfrac{a}{b}$ e $n = -\dfrac{c}{a}$. Como o coeficiente angular de uma reta é dada por $-\dfrac{a}{b}$, então, em uma equação reduzida da forma $y = mx + n$, o coeficiente angular é dado por $\boxed{tg\ \theta = m}$

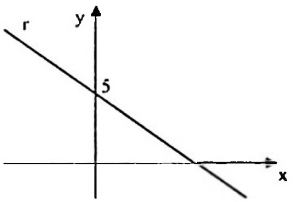
A partir de agora, de modo a diminuir as expressões, o coeficiente angular de uma reta será designado pela letra **m**.

5.7.2. Coeficiente Linear

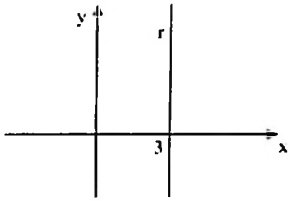
5.7.2.1. Definição: Coeficiente linear é igual a coordenada y do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas. Os exemplos abaixo mostram como identificar o coeficiente linear a partir do gráfico de uma reta.



coeficiente linear igual a – 2



coeficiente linear igual a 5



não possui coeficiente linear, pois a reta r não corta o eixo y

5.7.2.2. Cálculo do Coeficiente Linear

1º CASO: Determinação do coeficiente linear a partir da equação geral de uma reta

Sabe-se que equação geral de uma reta é dada por $ax + by + c = 0$. O ponto onde a reta corta o eixo das ordenadas possui coordenada x igual a 0. Substituindo $x = 0$ na equação geral da reta obtém-se:

$$by + c = 0 \Rightarrow by = -c \Rightarrow \boxed{y = -\frac{c}{b}}, \text{ com } b \neq 0$$

2º CASO: Determinação do coeficiente linear a partir da equação reduzida de uma reta

A equação reduzida de uma reta é dada por $y = mx + n$. O coeficiente linear é obtido substituindo $x = 0$ nesta equação: $\boxed{y = n}$

A partir deste ponto o coeficiente linear de uma reta será designado pela letra **n**.

Exemplos:

1) Calcular o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos A(0, 2) e B(– 3, 5).

Solução:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{-3-0} = \frac{3}{-3} = -1$$

2) Determinar o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta dada por $7x + 2y + 8 = 0$.

Solução:

A reta foi dada pela sua equação geral. Escrevendo na forma da equação reduzida:

$$7x + 2y + 8 = 0 \Leftrightarrow 2y = -7y - 8 \Rightarrow y = -\frac{7}{2}y - 4$$

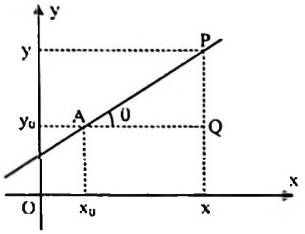
Desde que a equação reduzida de uma reta é dada por $y = mx + n$, onde m é o coeficiente angular e n é o coeficiente linear da reta, então o coeficiente angular da reta dada por $7x + 2y + 8 = 0$ é igual a $-\frac{7}{2}$ e o coeficiente linear é igual a – 4.

5.8. DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO DE UMA RETA

1º CASO: Determinação da reta a partir do coeficiente angular e do coeficiente linear

Sendo dados os valores do coeficiente angular m e do coeficiente linear n pode-se determinar diretamente a equação reduzida de uma reta, bastando para isso substituir m e n na equação $y = mx + n$. Por exemplo, a equação reduzida de uma reta cujo coeficiente angular é – 1 e cujo coeficiente linear é igual a 3 é dada por $y = -x + 3$.

2º CASO: Determinação da reta a partir do coeficiente angular e das coordenadas de um ponto da reta



Considere que seja dado o coeficiente angular m de uma reta e um ponto $A(x_0, y_0)$. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da reta. Pela construção da figura tem-se que o coeficiente angular da reta m pode ser calculado pela tangente do ângulo $\angle P\hat{A}Q$:

$$m = tg(\angle P\hat{A}Q) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Desta forma, a equação da reta que possui coeficiente angular igual a – 2 e que passa pelo ponto (1, 3) pode ser determinada da seguinte maneira:

$y - 3 = (-2)(x - 1) \Rightarrow y - 3 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 5$ (eq reduzida) $\Rightarrow 2x + y - 5 = 0$ (eq geral)

Observação:

Se for citado que o coeficiente angular da reta não está definido então é imediata a conclusão que o ângulo que a reta faz com o eixo x é igual a 90º (reta vertical) e assim a equação da reta é igual a $x = x_0$.

3º CASO: Determinação da reta que passa por dois pontos distintos

Considere que agora são dadas as coordenadas de dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ distintos. O processo de determinação da equação da reta a partir das coordenadas de dois pontos da reta é o mesmo do item anterior, bastando calcular o valor de m a partir das coordenadas de A e B. No tem 6.2.1.3 foi demonstrado que o coeficiente angular de uma reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Assim, a equação da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por:

$$\boxed{y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

onde (x_0, y_0) é um ponto qualquer da reta, podendo ser escolhido entre (x_1, y_1) ou (x_2, y_2).

Assim, a reta que passa pelos pontos (– 1, 2) e (3, 5) é dada por:

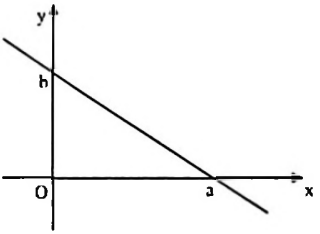
$$y - 5 = \frac{5-2}{3-(-1)}(x-3) \Rightarrow y - 5 = \frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow y - 5 = \frac{3x}{4} - \frac{9}{4} \Rightarrow y = \frac{3x}{4} + \frac{11}{4} \text{ (eq reduzida)} \Rightarrow$$

$3x - 4y + 11 = 0$ (eq geral)

Observação:

Se $x_1 = x_2$ então o coeficiente angular da reta não é definido (reta vertical). A equação da reta, neste caso, é dada por $x = x_1$.

5.9. EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DA RETA



A equação segmentária de uma reta consiste em determinar a equação da reta em função das coordenadas dos pontos onde a reta corta os eixos ordenados. A reta da figura corta o eixo x no ponto (a, 0) e o eixo y no ponto (0, b). Desta forma, a equação da reta é:

$$y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - b = \frac{0 - b}{a - 0}(x - 0) \Rightarrow$$

$$y - b = -\frac{b}{a}x \Rightarrow \frac{y}{b} - 1 = -\frac{x}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Por exemplo, a reta que corta os eixos cartesianos nos pontos (0, 2) e (– 3, 0) possui equação segmentária dada por $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$. Desenvolvendo:

$$-\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow -2x + 3y = 6 \Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0 \text{ (eq geral)} \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + 3 \text{ (eq reduzida)}$$

5.10. EQUAÇÃO PARAMÉTRICA DA RETA

A equação paramétrica de uma reta consiste em escrever as coordenadas, x e y, de um ponto qualquer de uma reta como função de uma outra variável. Esta representação é, em geral, linear. A forma geral de escrever a equação paramétrica de uma reta, em função da variável auxiliar t, onde as duas equações são lineares, é:

$$\boxed{\begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d \end{cases}}$$

onde a, b, c e d são constantes reais.

A partir da equação paramétrica é possível determinar as equações reduzida e geral de uma reta, bastando isolar a variável auxiliar em cada uma das equações e fazer a devida substituição, de modo a conseguir uma equação somente nas variáveis x e y.

Exemplos:

1) (UCPel-2010) A equação da reta determinada pelos pontos A (0, 3) e B (3, 0) é
(A) $-2x + y + 3 = 0$ (B) $x - y - 3 = 0$ (C) $x + y + 3 = 0$ (D) $x - y + 3 = 0$ (E) $x + y - 3 = 0$

Solução:

A equação segmentária da reta que corta os eixos cartesianos em (0, 3) e (3, 0) é dada por:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow x + y = 3 \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

2) Determine a equação geral da reta dada pela equação paramétrica $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \end{cases}$.

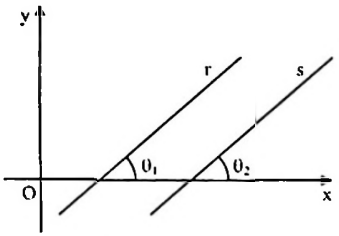
Solução:

Da 1ª equação tem-se que $t = \frac{x - 2}{3}$ e da 2ª equação tem-se que $t = 1 - y$

Igualando: $\frac{x - 2}{3} = 1 - y \Rightarrow x - 2 = 3 - 3y \Rightarrow x + 3y - 5 = 0$

5.11. POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

5.11.1. Retas Paralelas



Considere que duas retas r e s no plano cartesiano possuem equações dadas por $\boxed{r: y = m_1x + n_1}$ e $\boxed{s: y = m_2x + n_2}$

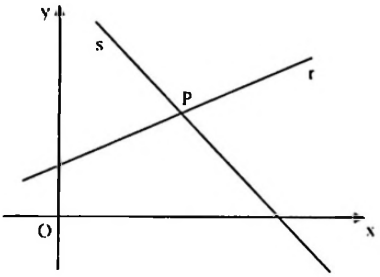
Sabe-se que $m_1 = tg\ \theta_1$ e $m_2 = tg\ \theta_2$, onde θ_1 e θ_2 são os ângulos que as retas r e s fazem com o eixo x, respectivamente.
Sabe-se também que r e s são paralelas se e somente se $\theta_1 = \theta_2$.
Assim, tem-se que $tg\ \theta_1 = tg\ \theta_2 \Rightarrow \boxed{m_1 = m_2}$

Portanto, afirma-se que as retas $y = 2x + 3$ e $y = 2x - 10$ são paralelas, uma vez que possuem o mesmo coeficiente angular.

Observações:
1) Duas retas coincidentes também são paralelas. Assim, a reta $y = 3x - 2$ e a reta $9x - 3x - 6 = 0$ são paralelas.

2) Caso os coeficientes angulares de duas retas não sejam definidos, tem-se que as retas são ambas perpendiculares ao eixo x e, portanto, paralelas.

6.11.2. Retas Concorrentes

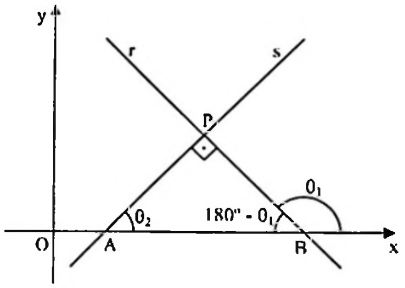


Considere duas retas r e s no plano cartesiano, cujas equações são dadas por r: $y = m_1x + n_1$ e s: $y = m_2x + n_2$.
Se $\boxed{m_1 \neq n_1}$ então as retas não são paralelas. No caso do plano cartesiano (duas dimensões) se duas retas não são paralelas então obrigatoriamente são concorrentes.
Note que o ponto P, interseção entre r e s, é um ponto cujas coordenadas respeitam tanto a equação de r quanto a equação de s. Portanto, para determinar as coordenadas do ponto P, basta resolver o sistema linear formado pelas equações das retas r e s: $\boxed{\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases}}$

Por exemplo, o ponto de interseção das retas $y = 2x + 3$ e $y = 6x - 1$ é determinado resolvendo o sistema linear. $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 6x - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3 = 6x - 1 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow P(1, 5)$

Observação:
1) Caso as retas sejam dadas a partir de suas equações gerais o procedimento é o mesmo, bastando resolver o sistema linear formado pelas duas equações: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

5.11.3. Retas Perpendiculares



Sejam A e B os pontos onde as retas r e s interceptam o eixo x. Seja P o ponto de interseção entre as retas r e s. Observe o triângulo PAB. O ângulo $\angle APB$ será reto se e somente se:

$\angle PAB = 90° - \angle PBA \Leftrightarrow \theta_2 = 90° - (180° - \theta_1) \Leftrightarrow$

$\theta_2 = -90° + \theta_1 \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 90° \Leftrightarrow$

$1 + tg\,\theta_1.tg\,\theta_2 = 0 \Leftrightarrow 1 + m_1.m_2 = 0 \Leftrightarrow m_1.m_2 = -1$

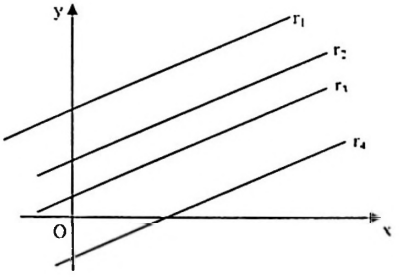
Deste modo, $\boxed{r \perp s \Leftrightarrow m_1.m_2 = -1}$

Deste modo, pode-se afirmar que as retas r: $3x + 4y - 1 = 0$ e s: $4x - 3y + 9 = 0$ são perpendiculares, uma vez que $m_r = -\frac{3}{4}$ e $m_s = \frac{4}{3}$, fazendo com que $m_r.m_s = -1$.

Observação:

1) Há apenas uma exceção a esta regra, que ocorre no caso de uma reta r vertical (paralela ao eixo y), cujo coeficiente angular não é definido, e uma reta s horizontal (paralela ao eixo x), cujo coeficiente angular é nulo. É evidente que r e s são perpendiculares, entretanto o produto $m_r.m_s$ não vale -1.

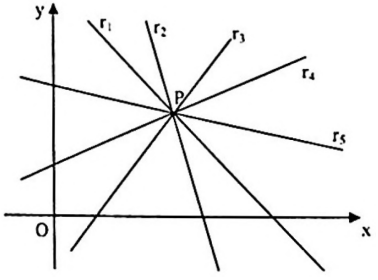
5.11.4. Feixe de Retas Paralelas



Suponha que as retas r_1, r_2, r_3, ... são todas paralelas. Desta forma, todas estas retas fazem o mesmo ângulo com o eixo x, implicando que possuem o mesmo coeficiente angular. Logo, um feixe de retas paralelas pode ser representado pelo conjunto de retas:

$$\begin{cases} ax + by + c_1 = 0 \\ ax + by + c_2 = 0 \\ \dots \\ ax + by + c_n = 0 \end{cases}$$

5.11.5. Feixe de Retas Concorrentes



Considere n retas no plano, todas concorrentes num mesmo ponto $P(x_0, y_0)$. Sejam r_i: $ax + by + c = 0$ e r_j: $dx + ey + f = 0$, com $i \neq j$, duas destas retas. Como estas duas retas interceptam-se no ponto P, então (x_0, y_0) é solução do sistema linear $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$. Além disso, qualquer outra reta do plano que passe por P pode ser obtida através de uma combinação linear das retas r_i e r_j. Desta forma, a expressão:

$$k_1(ax + by + c) - k_2(dx + ey + f) = 0$$

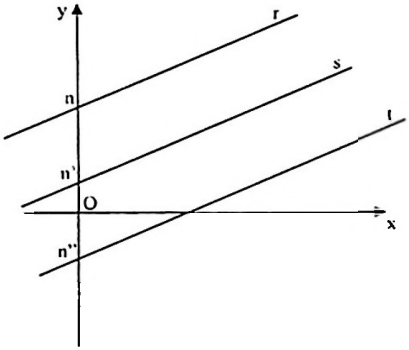
onde k_1 e k_2 são números reais, representa um feixe de retas concorrentes no ponto $P(x_0, y_0)$

5.11.6. Retas Simétricas

Suponha que r e s são duas retas no plano cartesiano. Os critérios para a determinação de uma terceira reta t que é simétrica de r em relação a s dependem se as retas r e s são paralelas ou concorrentes. Assim, esta definição será dividida em dois casos, como segue abaixo.

1° CASO: As retas r e s são paralelas

Definição: A reta t é simétrica de r em relação a s se e somente se t é paralela a r e s e se a distância entre as retas r e s é igual a distância entre as retas t e s.



Suponha que as equações de r e s sejam dadas por:

r: $y = mx + n$ s: $y = mx + n$

Como a reta t é paralela a r e s então a sua equação reduzida é dada por t: $y = mx + n"$

Sabe-se que a ordenada do ponto de interseção de uma reta com o eixo y é igual ao seu coeficiente linear. Como a distância entre as retas r e s é igual a distância entre as retas t e s, então o ponto de interseção da reta s com o eixo y é o ponto médio do seguimento definido pelos pontos de interseção das retas r e t com o eixo y. Logo:

$$n' = \frac{n + n"}{2} \Rightarrow n" = 2n' - n$$

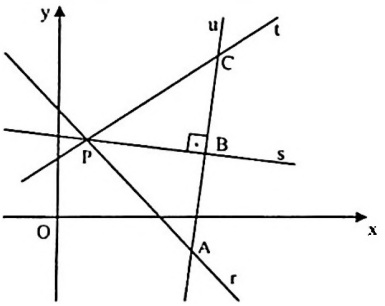
Assim, a reta t é dada por $\boxed{t: y = mx + 2n' - n}$

ica a cargo do leitor demonstrar o caso em que as retas sejam dadas pelas suas equações gerais:

$\boxed{\text{A reta t simétrica de r: } ax + by + c = 0 \text{ em relação a s: } ax + by + c' = 0 \text{ é dada por t: } ax + by + 2c' - c = 0}$

2° CASO: As retas r e s são concorrentes

Definição: A reta t é simétrica de r em relação a s se e somente se t passa pelo ponto de interseção de r e s e se o ângulo formado pelas retas r e s é igual ao ângulo formado pelas retas t e s.



A demonstração do caso geral leva a expressões algébricas muito extensas. Portanto, este caso será analisado a partir de um exemplo. Suponha que as retas r e s sejam dadas por:

r: $5x + 4y - 13 = 0$ s: $x + 3y - 7 = 0$

O ponto de interseção entre r e s é determinado resolvendo o sistema linear: $\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ -5x - 15y = -35 \end{cases} \Rightarrow$

$-11y = -22 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$

Assim, a reta t deve passar pelo ponto P (1, 2)

Seja B um ponto qualquer (distinto de P) sobre a reta s. Traçando a reta u perpendicular a s passando por B, sejam A e C, respectivamente, os pontos de interseção desta com as retas r e t, respectivamente.

Como $\angle CPB \equiv \angle APB$ então $\Delta CPB \equiv \Delta APB$ e assim tem-se que $\overline{BC} \equiv \overline{AB}$, fazendo com que B seja o ponto médio do segmento $\overline{AC}$. Como $u \perp s$ então $m_u.m_s = -1 \Rightarrow m_u = 3$

Escolhendo B(4, 1) então a reta u é dada por: $y - y_B = m_u(x - x_B) \Rightarrow y - 1 = 3(x - 4) \Rightarrow$

$y - 1 = 3x - 12 \Rightarrow u: 3x - y - 11 = 0$

$$\begin{cases} 3x - y = 11 \\ 5x + 4y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 4y = 44 \\ 5x + 4y = 13 \end{cases} \Rightarrow 17x = 57 \Rightarrow x_A = \frac{57}{17} \Rightarrow y_A = -\frac{16}{17}$$

Como B é ponto médio do segmento $\overline{AC}$:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{\frac{57}{17} + x_C}{2} \Rightarrow 8 = \frac{57}{17} + x_C \Rightarrow x_C = \frac{79}{17}$$

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 1 = \frac{-\frac{16}{17} + y_C}{2} \Rightarrow 2 = -\frac{16}{17} + y_C \Rightarrow y_C = \frac{50}{17}$$

A reta t passa pelos pontos P e C:

$$y - y_P = \frac{y_C - y_P}{x_C - x_P}(x - x_P) \Rightarrow y - 2 = \frac{\left(\frac{50}{17} - 2\right)}{\left(\frac{79}{17} - 1\right)}(x - 1) \Rightarrow y - 2 = \frac{16}{62}(x - 1) \Rightarrow$$

$31y - 62 = 8x - 8 \Rightarrow 8x - 31y + 54 = 0$

Em resumo, o processo para determinar uma reta t que seja simétrica de uma reta r em relação a uma reta s (r e s concorrentes) é:

1) Determinar as coordenadas do ponto P interseção entre r e s. Note que t passa por P.
2) Escolher um ponto qualquer B (distinto de P), sobre a reta s.
3) Determinar a equação da reta u que é perpendicular a s passando por B.
4) Determinar as coordenadas do ponto A que é interseção da reta u com a reta r.
5) Sabendo que B é ponto médio de $\overline{AC}$ deve-se determinar as coordenadas do ponto C.
6) De posse das coordenadas de P e C, determina-se a reta t simétrica de r em relação a s.

Exemplos:

1) (AFA-2003) Dadas as retas de equações
$r: y = ax + b$
$r_1: y = a_1x + b_1$
determine a relação entre a, a_1, b e b_1 que está correta.
a) Se $a = a_1$ e $b \neq b_1$ tem-se $r // r_1$.
b) Se $a = a_1$ e $b = b_1$ tem-se $r \neq r_1$.
c) Se $a \neq a_1$ e tem-se $r = r_1$.
d) Se $a \neq a_1$ e $b \neq b_1$ tem-se $r // r_1$.
Solução:
Analisando cada alternativa:
a) Se $a = a_1$ as duas retas possuem o mesmo coeficiente angular e portanto são paralelas, independemente da relação entre b e b_1. VERDADEIRO
b) Se $a = a_1$ e $b = b_1$ então as retas são coincidentes. FALSO
c) Se $a \neq a_1$ então certamente as retas são distintas. FALSO
d) Somente teremos $r // r_1$ se $a = a_1$. FALSO
Assim, a única alternativa correta é a A.

2) (UFMG-2010) No plano cartesiano, o ponto A = (1, 11) é vértice do quadrado ABCD , cuja diagonal BD está sobre a reta de equação $y = x/2 + 3$.
Considerando essas informações,
1. DETERMINE as coordenadas do centro M do quadrado ABCD.
2. DETERMINE as coordenadas do vértice C.
3. DETERMINE as coordenadas dos vértices B e D.
Solução:

a) Sabe-se que as diagonais de um quadrado são perpendiculares, então:

$m_{AC}.m_{BD} = -1 \Rightarrow m_{AC}.(1/2) = -1 \Rightarrow m_{AC} = -2$

Logo, a reta AC é dada por: $y - y_A = m_{AC}(x - x_A) \Rightarrow y - 11 = (-2)(x - 1) \Rightarrow$

$y - 11 = -2x + 2 \Rightarrow y = -2x + 13$

Fazendo a interseção entre as retas AC e BD encontramos as coordenadas do ponto M de interseção das diagonais do quadrado:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} + 3 \\ y = -2x + 13 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} + 3 = -2x + 13 \Rightarrow \frac{5x}{2} = 10 \Rightarrow x_M = 4 \Rightarrow y_M = 5$$

b) Sabe-se que o ponto M é o ponto médio das duas diagonais. Logo:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{1 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 7$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 5 = \frac{11 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -1$$

c) Uma vez que os pontos B e D pertencem à reta BD dada por $y = x/2 + 3$ então suas coordenadas são da forma $B(x_B, x_B/2 + 3)$ e $D(x_D, x_D/2 + 3)$. Como o ponto M é o ponto médio das diagonais tem-se que

$$\overline{AM} = \overline{BM} \Rightarrow \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} \Rightarrow$$

$$(1-4)^2 + (11-5)^2 = (x_B - 4)^2 + (x_B/2 + 3 - 5)^2 \Rightarrow 9 + 36 = x_B^2 - 8x_B + 16 + \frac{x_B^2}{4} - 2x_B + 4 \Rightarrow$$

$$\frac{5x_B^2}{4} - 10x_B - 25 = 0 \Rightarrow x_B^2 - 8x_B - 20 = 0 \Rightarrow (x_B - 10)(x_B + 2) = 0 \Rightarrow x_B = 10 \text{ ou } x_B = -2$$

Como $y_B = x_B/2 + 3$, quando $x_B = 10$ então $y_B = 8$ e quando $x_B = -2$ então $y_B = 2$.

Na verdade, como a expressão para o cálculo de x_D é a mesma do cálculo de x_B, então se $x_B = 10$ então $x_D = -2$, enquanto se $x_B = -2$ então $x_D = 10$.

Desta forma, os pontos B e D são dados por (10, 8) e (– 2, 2)

3) (ESPM-2006) Dado no plano cartesiano o triângulo de vértices A(4, 0), B(0, 2) e C(8, 8), a medida da altura relativa ao vértice A é igual a:

a) 4 b) 5 c) $4\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$

Solução:

O coeficiente angular da reta BC é dado por $m_{BC} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{8-2}{8-0} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

Como a altura relativa h ao vértice A é perpendicular a BC então $m_h = -\dfrac{1}{m_{BC}} = -\dfrac{4}{3}$

Assim, a equação de h é dada por:

$y - y_A = m_h(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y = -4x + 16 \Rightarrow 4x + 3y - 16 = 0$

A equação da reta BC é dada por:

$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 2 = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow 4y - 8 = 3x \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

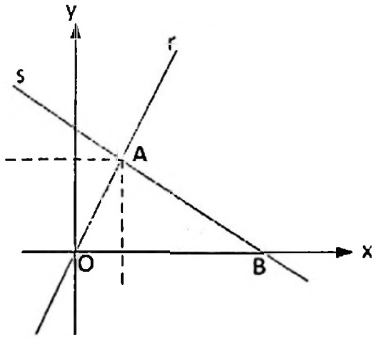
As coordenadas do ponto P, pé da altura relativa ao vértice A, são determinadas pela interseção da reta h com a reta BC:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 16 \\ 3x - 4y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x + 12y = 64 \\ 9x - 12y = -24 \end{cases} \Rightarrow 25x = 40 \Rightarrow x_P = \frac{8}{5} \Rightarrow y_P = \frac{16}{5}$$

O valor da altura relativa ao vértice A é igual à distância entre os pontos P e A:

$$h = \overline{PA} = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{5} - 4\right)^2 + \left(\frac{16}{5} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{256}{25}} = \sqrt{\frac{400}{25}} = \sqrt{16} = 4$$

4) (Udesc-2011) Na figura abaixo, a reta s tem equação $3y + 2x - 16 = 0$, e a reta r passa pela origem e tem coeficiente angular igual a 2. Calcule a área (em unidades de área) do triângulo compreendido entre as retas e o eixo das abscissas.



Solução:

Uma vez que o coeficiente angular da reta r vale e a coeficiente linear vale 0, então r: $y = 2x$.

As coordenadas do ponto A são dadas pela solução do sistema linear: $\begin{cases} 3y + 2x - 16 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow$

$6x + 2x + 16 = 0 \Rightarrow x_A = 2 \Rightarrow y_A = 4$

A coordenada x do ponto B é obtida substituindo $y = 0$ na equação geral de s:

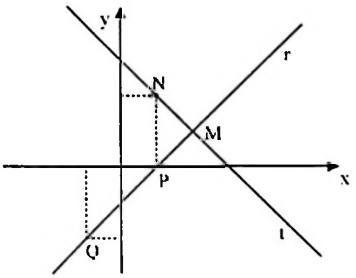
$3.0 + 2.x_B - 16 = 0 \Rightarrow x_B = 8$

A área do triângulo ABO é dada por $S = \frac{\overline{OB}.y_A}{2} = \frac{x_B.y_A}{2} = \frac{8.4}{2} = 16$

5) (UFC-99) Seja r a reta que passa pelos pontos P(1, 0) e Q(– 1, – 2). Então, o ponto simétrico de N(1, 2), com relação a reta r é:

a) (0, 0) b) (3, 0) c) (5/2, 1) d) (0, –1) e) (1, 1).

Solução:



A reta r é dada por: $y - y_P = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}(x - x_P) \Rightarrow$

$y - 0 = \frac{0 + 2}{1 + 1}(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$

Observando a equação de r tem-se que $m_r = 1$.

A reta t é perpendicular a r: $m_t.m_r = -1 \Rightarrow m_t = -1$

Logo, a equação de t é dada por: $y - y_N = m_t(x - x_N) \Rightarrow$

$y - 2 = (-1)(x - 1) \Rightarrow y = -x + 3$

O ponto M, interseção de r e t, é dado por:

$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = -x + 3 \Rightarrow x_M = 2 \Rightarrow y_M = 1$

Seja S o ponto simétrico de N com relação a r. Assim, o ponto M é o ponto médio do segmento $\overline{NS}$:

$x_M = \frac{x_N + x_S}{2} \Rightarrow 2 = \frac{1 + x_S}{2} \Rightarrow x_S = 3$

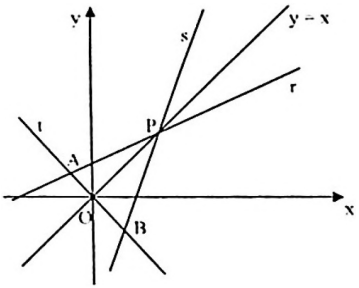
$y_M = \frac{y_N + y_S}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2 + y_S}{2} \Rightarrow y_S = 0$

Logo, o ponto S é dado por (3, 0)

6) (FMTM-2008) As retas r e s são simétricas com relação à reta y = x. Se a equação de r é y = ax + b, com a ≠ 0 e b ≠ 0, então a equação de s é

a) y = x/a + b b) y = – x/a + b c) y = – x/a – b
d) y = x/a + b/a e) y = x/a – b/a

Solução:



Seja P a interseção de r com y = x:

$$\begin{cases} y = x \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x = ax + b \Rightarrow x_P = y_P = \frac{b}{1-a}$$

Se t a reta que passa por (0, 0) e é perpendicular a y = x, segue diretamente que t: y = – x

O ponto A é a interseção de t e r: $\begin{cases} y = -x \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow$

$$-x = ax + b \Rightarrow x_A = -\frac{b}{1+a} \Rightarrow y_A = \frac{b}{1+a}$$

Se B é a interseção de t com s, tem-se que O é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$:

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 0 = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -x_A = \frac{b}{1+a}$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 0 = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_B = -y_A = -\frac{b}{1+a}$$

A reta s é a reta que passa pelos pontos P e B: $m_S = \dfrac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \dfrac{\dfrac{b}{1-a} + \dfrac{b}{1+a}}{\dfrac{b}{1-a} - \dfrac{b}{1+a}} = \dfrac{\cancel{b}(1+a+1-a)}{\cancel{(1-a)(1+a)}} = \dfrac{1}{a}$

$$y - y_P = m_S(x - x_P) \Rightarrow y - \frac{b}{1-a} = \frac{1}{a}\left(x - \frac{b}{1-a}\right) \Rightarrow y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a(1-a)} + \frac{b}{1-a} = \frac{x}{a} + \frac{b(a-1)}{a(1-a)} \Rightarrow$$

$$y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

7) (AFA-2006) Considerando no plano cartesiano ortogonal as retas r, s e t, tais que (r) $\begin{cases} x = 2v + 3 \\ y = 3v - 2 \end{cases}$, (s) mx + y + m = 0 e (t) x = 0, analise as proposições abaixo, classificando-as em (V) verdadeira(s) ou (F) falsa(s).

( ) $\exists$ m ∈ IR / r = s
( ) $\exists$ m ∈ IR / s ⊥ t
( ) Se m = 0, as retas r, s e t determinam um triângulo retângulo.
( ) As retas r e s poderão ser retas suportes de lados opostos de um paralelogramo se m = –1,5

A seqüência correta é

a) F – V – F – F c) V – F – F – V
b) V – V – V – F d) F – V – V – V

Solução:

Determinando a equação geral de r:

$$\begin{cases} x = 2v + 3 \\ y = 3v - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{x-3}{2} \\ v = \dfrac{y+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} \Leftrightarrow 3x - 9 = 2y + 4 \Leftrightarrow 3x - 2y - 13 = 0$$

Desta forma, o coeficiente angular de r é dado por $m_r = \frac{3}{2}$ e o coeficiente linear é dado por $n_r = -\frac{13}{2}$.

Na reta s, $mx - y + m - 0$ pode-se identificar que $m_s = -m$ e $n_s = -m$.
Analisando cada um dos itens:
1) Desde que $m_s = n_s$ e $m_r \neq n_r$ então não existe m de modo que r = s. FALSO
2) Se m = 0 então s ⊥ t. VERDADEIRO
3) Se m = então s ⊥ t e r não é paralelo a s e nem a t. VERDADEIRO
4) r //s então $m_s = m_r = -m = 3/2 \Rightarrow m = -1{,}5$. VERDEIRO

8) (ITA-88) Num triângulo ABC, retângulo em A, de vértices B: (t, 1) e C: (3, - 2), o cateto que contém o ponto B é paralelo à reta de equação $3x - 4y + 2 = 0$. Então a reta que contém o cateto AC é dada por:
a) $4x + 3y - 6 = 0$ b) $4x + 3y - 3 = 0$ c) $3x - 4y + 1 = 0$
d) $2x + 5y = 0$ e) $4x - 3y + 6 = 0$
Solução:
A reta de equação $3x - 4y + 2 = 0$ possui coeficiente angular igual a 3/4, implicando que $m_{AB} = 3/4$.
Como os catetos AB e AC são perpendiculares então $m_{AC} = -1/m_{AB} = -4/3$.

Assim, a reta AC é dada por: $y - y_C = m_{AC}(x - x_C) \Rightarrow y + 2 = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y + 6 = -4x + 12 \Rightarrow$

$4x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow$ ALTERNATIVA A

9) (ITA-89) Determine a equação da reta suporte de um segmento que tem seu centro do ponto (5, 0) e extremidade em cada uma das retas $x - 2y - 3 = 0$ e $x + y + 1 = 0$. Dê a resposta na forma $Ax + By + C = 0$.
Solução:
Seja AB o segmento indicado no enunciado. Como A pertence à reta $x - 2y - 3 = 0$ então $x_A = 2y_A + 3$.
Logo, a forma geral do ponto A é dada por $(2y_A + 3, y_A)$.
Como B pertence à reta de equação $x + y + 1 = 0$ então $x_B = -y_B - 1$. Assim, a forma geral do ponto B é dada por $(-y_B - 1, y_B)$.
Como M (5, 0) é o ponto médio do segmento AB:

i) $5 = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{2y_A + 3 - y_B - 1}{2} \Rightarrow 2y_A - y_B = 8$

ii) $0 = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_A = -y_B \Rightarrow -2y_B - y_B = 8 \Rightarrow y_B = -\frac{8}{3} \Rightarrow x_B = -y_B - 1 = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$.

A reta que passa por M e B é dada por: $y - y_M = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M}(x - x_M) \Rightarrow y - 0 = \frac{-\frac{8}{3} - 0}{\frac{5}{3} - 5}(x - 5) \Rightarrow$

$y = \frac{4}{5}(x - 5) \Rightarrow 5y = 4x - 20 \Rightarrow 4x - 5y - 20 = 0$

10) (ITA-93) Sendo (r) uma reta dada pela equação $x - 2y + 2 = 0$, então, a equação da reta (s) simétrica a (r) em relação ao eixo das abscissas é descrita por:
a) $x + 2y = 0$ c) $2x + 3y + 1 = 0$ e) $x - 2y - 2 = 0$
b) $3x - y + 3 = 0$ d) $x + 2y + 2 = 0$
Solução:
O ponto de interseção A de r com o eixo das abscissas é obtido substituindo y = 0 em r:
$x_A - 2.0 + 2 = 0 \Rightarrow x_A = -2 \Rightarrow A(-2, 0)$
O coeficiente angular de r: $x - 2y + 2 = 0$ é dado por $m_r = 1/2$
Desde que s é a reta simétrica de r com relação a x = 0, então o ângulo que a reta s faz com o eixo x é igual a $\pi - \theta$, onde θ é o ângulo que r faz com o eixo x.

Desta forma, $m_s = tg(\pi - 0) = -tg\,0 = -m_r = -1/2$

Assim, s é dada por: $y - y_A = m_s(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow 2y = -x - 2 \Rightarrow x + 2y + 2 = 0$

11) (ITA-98) As retas $y = 0$ e $4x + 3y + 7 = 0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4 cm e 6 cm, então, a área deste paralelogramo, em cm^2, vale:

a) $\frac{36}{5}$ b) $\frac{27}{4}$ c) $\frac{44}{3}$ d) $\frac{48}{3}$ e) $\frac{48}{5}$

Solução:

O ângulo θ que a reta $4x + 3y + 7 = 0$ faz com o eixo x é tal que $tg\,\theta = -\frac{4}{3} \Rightarrow sen\theta = \frac{4}{5}$

Entretanto, o eixo x coincide com a reta $y = 0$, implicando que o ângulo formado pelas diagonais do paralelogramo é igual a θ.

Assim, a área do paralelogramo é dado por $S = \frac{p.q.sen\theta}{2} = \frac{4.6}{2}.\frac{4}{5} \Rightarrow S = \frac{48}{5}\ cm^2$

12) (ITA-97) Seja A o ponto de interseção das retas r e s dadas, respectivamente pelas equações $x + y = 3$ e $x - y = -3$. Sejam B e C pontos situados no primeiro quadrante com $B \in r$ e $C \in s$. Sabendo que $d(A,B) = d(A,C) = \sqrt{2}$, então a reta passando por B e C é dada pela equação:

a) $2x + 3y = 1$ b) $y = 1$ c) $y = 2$
d) $x = 1$ e) $x = 2$

Solução:

O ponto A é determinado resolvendo o sistema linear: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -3 \end{cases} \Rightarrow x_A = 0 \quad y_A = 3$

Se $B \in r$ então $B(x_B, 3 - x_B)$ e se $C \in s$ então $C(x_C, x_C + 3)$

$[d(A,B)]^2 = 2 \Rightarrow (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 2 \Rightarrow (x_B - 0)^2 + (3 - x_B - 3)^2 = 2 \Rightarrow x_B^2 + x_B^2 = 2 \Rightarrow$

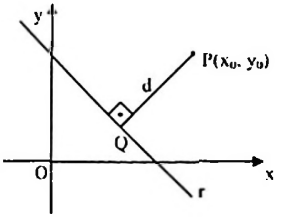
$2x_B^2 = 2 \Rightarrow x_B^2 = 1 \Rightarrow x_B = \pm 1 \overset{x_B > 0}{\Rightarrow} x_B = 1 \Rightarrow y_B = 2$

$[d(A,C)]^2 = 2 \Rightarrow (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = 2 \Rightarrow (x_C - 0)^2 + (x_C + 3 - 3)^2 = 2 \Rightarrow x_C^2 + x_C^2 = 2 \Rightarrow$

$2x_C^2 = 2 \Rightarrow x_C^2 = 1 \Rightarrow x_C = \pm 1 \overset{x_C > 0}{\Rightarrow} x_C = 1 \Rightarrow y_C = 4$

Como $x_B = x_C = 1$ então a reta que passa por B e C é dada por $x = 1$.

5.12. DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA



Considere a reta r de equação ax + by + c = 0 e o ponto $P(x_0, y_0)$.
Designa-se de $d_{P,r}$ como a distância entre o ponto P e a reta r.
Seja Q a interseção entre a reta r e a reta perpendicular a r passando por Q. Assim, tem-se que $d_{P,r} = \overline{PQ}$.

Se r: ax + by + c = 0 então: $m_r = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_{PQ} = \frac{b}{a}$

Assim, a reta que passa por PQ é dada por:

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$$

As coordenadas de Q são determinadas pela solução do sistema linear: $\begin{cases} bx - ay = bx_0 - ay_0 \\ ax + by = -c \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} b^2x - aby = b^2x_0 - aby_0 \\ a^2x + aby = -ac \end{cases} \Rightarrow x_Q = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} \Rightarrow y_Q = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

$$d_{P,r} = \sqrt{(x_0 - x_Q)^2 + (y_0 - y_Q)^2} \Rightarrow d_{P,r} = \sqrt{\left(x_0 - \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$d_{P,r} = \sqrt{\left(\frac{a^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{abx_0 + b^2y_0 + bc}{a^2 + b^2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$d_{P,r} = \sqrt{a^2\left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)^2 + b^2\left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)^2} \Rightarrow d_{P,r} = \sqrt{\left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}\right)^2 \cdot (a^2 + b^2)} \Rightarrow$$

$$d_{P,r} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} \Rightarrow \boxed{d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Observações:

1) Observe que a expressão da reta que aparece na fórmula final da distância entre um ponto e uma reta é a equação geral da reta. Assim, se a reta for dada por uma de suas outras formas (reduzida, segmentária ou paramétrica) é necessário, através de operações algébricas, transformá-la na forma da equação geral.

2) Perceba que se o ponto $P(x_0, y_0)$ pertence à reta r: ax + by + c = 0 então $ax_0 + by_0 + c = 0$, fazendo com que $d_{P,r} = 0$.

3) Nos casos de retas r horizontais (equação geral by + c = 0) a fórmula funciona muito bem, entretanto é mais rápido chegar ao valor da distância entre um ponto $P(x_0, y_0)$ observando que todos os pontos da reta r possuem coordenada y igual a $-\frac{c}{b}$. Assim, a distância entre o ponto P e a reta r é dada por $\left|-\frac{c}{b} - y_0\right|$.

4) Analogamente ao caso anterior, nas retas r verticais (equação geral da forma ax + c = 0) a fórmula também funciona muito bem, entretanto é mais rápido chegar ao valor da distância de P(x0, y0) à r notando que todos os pontos de r satisfazem $x = -\frac{c}{a}$. Logo, a distância de P à r é dada por $\left|-\frac{c}{a} - x_0\right|$.

5.12.1. Distância entre a origem e uma reta

Considere a reta r definida a partir de sua equação geral ax + by + c = 0. Como a origem O do sistema cartesiano possui coordenadas (0, 0), então substituindo $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ na expressão da distância entre ponto e reta encontra-se: $\boxed{d_{O,r} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$

Observação:
Lembre que uma reta que passa pela origem possui equação geral da forma ax + by = 0, ou seja, c = 0, implicando que $d_{P,r} = 0$.

Exemplos:

1) (UFMS-2008) Sabendo-se que um quadrado tem um de seus vértices na origem do sistema cartesiano e que as equações das retas suportes de dois de seus lados são 3x – y = 0 e 3x – y + 10 = 0, então a medida de sua diagonal é igual a

a) $2\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}$

Solução:
Uma vez que a origem é um dos vértices do quadrado e (0, 0) pertence à reta r: 3x – y = 0 mas não pertence a reta s: 3x – y + 10 = 0, então o comprimento ℓ do lado do quadrado é dado pela distância da reta s à origem do sistema cartesiano: $\ell = d_{O,s} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Assim, a diagonal do quadrado vale $d = \sqrt{2}.\ell = \sqrt{2}.\sqrt{10} = 2\sqrt{5}$.

2) (UESB-2010) O ponto M(– 1, – 1) é vértice de um triângulo equilátero MNP, cujo lado NP está sobre a reta 3x + 4y – 3 = 0. Com base nessas informações, pode-se afirmar que o perímetro desse triângulo, em u.c., é igual a

01) $\sqrt{3}$ 02) $4\sqrt{3}$ 03) 8 04) $6\sqrt{3}$ 05) $8\sqrt{3}$

Solução:
O comprimento da altura h do lado do triângulo é igual à distância entre o ponto M e a reta NP:

$$h = d_{M,NP} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(-1) + 4(-1) - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-10|}{5} = 2$$

Num triângulo equilátero sabe-se que $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Desta forma, o perímetro do triângulo é igual a $3\ell = 4\sqrt{3}$

3) (ITA-90) Considere a reta (r) mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta 2x – 3y + 7 = 0 intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ à reta (r) é:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ c) $3\sqrt{13}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Solução:
Os pontos A e B onde a reta s: 2x – 3y + 7 = 0 encontra os eixos coordenados são obtidos substituindo x = 0 ou y = 0 em sua equação:

i) $2x_A - 3.0 + 7 = 0 \Rightarrow x_A = -\frac{7}{2}$

ii) $2.0 - 3.y_B + 7 = 0 \Rightarrow y_B = \frac{7}{3}$

Assim, a reta s intercepta os eixos coordenados nos pontos $\left(-\frac{7}{2}.0\right)$ e $\left(0.\frac{7}{3}\right)$.

Assim, o ponto médio de AB é $\left(-\frac{7}{4},\frac{7}{6}\right)$

O coeficiente angular de s é dado por $m_s = \frac{2}{3}$. Como $r \perp s$ então $m_r = -\frac{3}{2}$.

Assim, a reta r é dada por: $y-\frac{7}{6} = -\frac{3}{2}(x+\frac{7}{4}) \Rightarrow 24y - 28 = -36x - 63 \Rightarrow 36x + 24y - 35 = 0$

Logo, a distância de $(\frac{1}{4}.\frac{1}{6})$ à reta $36x + 24y + 35 = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|36.\frac{1}{4} + 24.\frac{1}{6} + 35|}{\sqrt{36^2 + 24^2}} = \frac{|9+4+35|}{\sqrt{1872}} = \frac{48}{12\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

4) (ITA-94) Duas retas r e s são dadas, respectivamente, pelas equações $3x - 4y = 3$ e $2x - y = 2$. Um ponto P pertencente à reta s tem abscissa positiva e dista 22 unidades de medida da reta r. Se $ax + by + c = 0$ é a equação da reta que contém P e é paralela a r, determine o valor de a, b e c.

Solução:

Uma vez que a reta s é dada por $2x + y = 2$, então $y_P = 2 - 2x_P$.

Assim, a forma geral de todo ponto pertence a s é dada por $(x_P, 2 - 2x_P)$.

$$d_{P,r} = 22 \Rightarrow 22 = \frac{|3x_P - 4y_P - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \Rightarrow 22 = \frac{|3x_P - 4(2-2x_P) - 3|}{5} \Rightarrow |11x_P - 11| = 110$$

i) $11x_P - 11 = 110 \Rightarrow 11x_P = 121 \Rightarrow x_P = 11 \Rightarrow y_P = -20$

ii) $11x_P - 11 = -110 \Rightarrow 11x_P = -99 \Rightarrow x_P = -9$ não convém, pois o enunciado afirma que $x_P > 0$

Assim, o ponto P possui coordenadas (11, – 20).

O coeficiente angular de r: $3x - 4x - 3 = 0$ é dado por $m_r = \frac{3}{4}$.

Logo, a reta que contém P e é paralela a r é dada por:

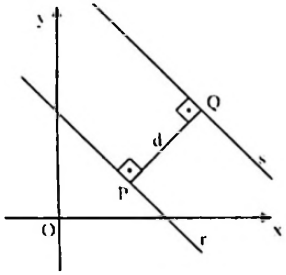
$$y - y_P = m_r(x - x_P) \Rightarrow y + 20 = \frac{3}{4}(x - 11) \Rightarrow 4y + 80 = 3x - 33 \Rightarrow 3x - 4y - 113 = 0$$

Assim, tem-se $a = 3$, $b = -4$ e $c = -113$.

Observação:

O enunciado desta questão foi levemente modificado para ser possível encontrar um resultado. A versão oficial desta questão foi anulada pela banca examinadora.

5.13. DISTÂNCIA ENTRE RETAS PARALELAS



Sejam r e s duas retas paralelas. Denomina-se de $d_{r,s}$ à distância entre as retas r e s. Uma vez que seus coeficientes angulares devem ser iguais, as equações gerais de r e s devem ser dadas por.

$$r: ax + by + c = 0 \quad e \quad s: ax + by + c' = 0.$$

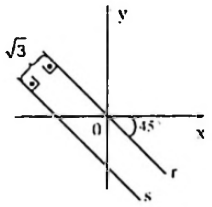
Assim, um ponto Q qualquer da reta s satisfaz $by_Q = -ax_Q - c'$.

Desta forma: $d_{r,s} = d_{Q,r} = \dfrac{|ax_Q + by_Q + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|\cancel{ax_Q} - \cancel{ax_Q} - c' + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow$

$$\boxed{d_{r,s} = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Exemplos:

1) (AFA-2003) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. Se $P(x,y) \in s$, então $x + y$ é igual a



a) $\sqrt{3}$
b) $-\sqrt{3}$
c) $-\sqrt{6}$
d) $\sqrt{6}$

Solução:

A reta r possui coeficiente angular igual a $\text{tg}(135°) = -1$ e coeficiente linear igual a 0. Assim, tem-se que a equação reduzida de r é dada por $y = -x$, cuja equação geral é dada por $x + y = 0$.

A reta s é paralela à reta r, implicando que sua equação geral seja $x + y + c = 0$.

Como a distância entre r e s é $\sqrt{3}$ então $\sqrt{3} = \dfrac{|c-0|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow |c| = \sqrt{6} \Rightarrow c = \pm\sqrt{6}$.

Observe que a coordenada y do ponto que a reta s corta o eixo y é negativa.

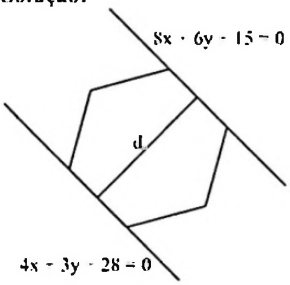
Fazendo $x = 0$ em s tem-se que $y = -c$. De modo que $y < 0$ conclui-se que $c = \sqrt{6}$.

Assim, a reta s é dada por $x + y + \sqrt{6} = 0 \Rightarrow x_P + y_P = -\sqrt{6}$

2) (Ciaba-2009) Dois dos lados de um hexágono regular estão contidos nas retas definidas pelas equações $4x + 3y + 28 = 0$ e $8x - 6y + 15 = 0$, respectivamente. A área desse hexágono é um número entre

(A) 13 e 14 (B) 14 e 15 (C) 15 e 16 (D) 16 e 17 (E) 17 e 18

Solução:



Multiplicando a equação de r por 2: $8x + 6y + 56 = 0$

Calculando a distância d entre r e s: $d = \dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|56-15|}{\sqrt{8^2+6^2}} = \dfrac{41}{10}$

Note que a distância entre estas duas retas é igual a duas vezes o apótema do hexágono regular: $2a_h = \dfrac{41}{10} \Rightarrow a_h = \dfrac{41}{20}$

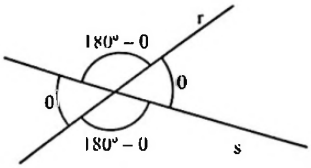
Num hexágono regular: $a_h = \dfrac{\ell_h\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell_h = \dfrac{41\sqrt{3}}{30}$

Assim: $S = 6\dfrac{\ell_h^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{41\sqrt{3}}{30}\right)^2 = \dfrac{15129\sqrt{3}}{1800} \cong 14{,}56$

5.14. ÂNGULOS ENTRE DUAS RETAS

5.14.1. Definição

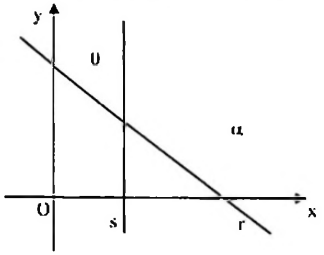
O ângulo formado por duas retas r e s num plano é definido como o ângulo θ tal que $0 \le \theta \le \pi/2$ formado pelas retas r e s. Observe a figura abaixo:



Perceba que as retas r e s formam dois ângulos, θ e seu suplementar, 180° – θ. Entretanto, convencionou-se que o ângulo formado pelas retas r e s é o ângulo θ tal que $0 \le \theta \le \pi/2$.

Note também que $\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}(180^\circ - \theta)$

5.14.2. Se uma das retas é vertical



Suponha que a reta s seja vertical (paralela ao eixo y) e que o ângulo que a reta r faz com o eixo x seja igual a α. Assim, tem-se que $m_r = \operatorname{tg}\alpha$.

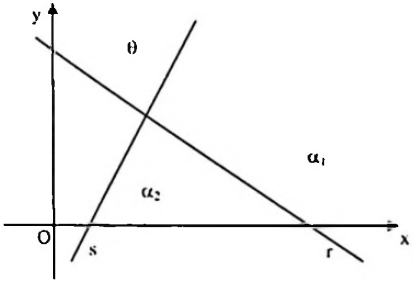
O ângulo θ formando por r e s é tal que $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

Como tg θ deve ser maior ou igual a zero:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\operatorname{ctg}(\alpha)\right| \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_r}\right|}$$

Observação:
Se as duas retas foram verticais é evidente que o ângulo entre elas é igual a zero (retas paralelas).

5.14.3. Caso Geral



Suponha que r e s são duas retas tais que r forma um ângulo α_1 com o eixo x e s forma um ângulo α_2 com o eixo x. Assim, $m_r = \operatorname{tg}\alpha_1$ e $m_s = \operatorname{tg}\alpha_2$.
Note que o ângulo θ formado pelas retas r e s é tal que:

$$\theta = \alpha_1 - \alpha_2 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1.\operatorname{tg}\alpha_2}$$

Uma vez que $\operatorname{tg}\theta \ge 0$ deve-se fazer: $\boxed{\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r.m_s}\right|}$

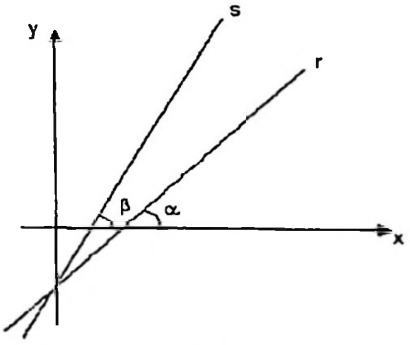
Observações:
1) O módulo é apenas para garantir que o valor calculado para a tangente de θ seja maior ou igual a zero, uma vez que o valor de $\frac{m_r - m_s}{1 + m_r.m_s}$ pode ser negativo e indicar, na verdade, o valor de $\operatorname{tg}(180^\circ - \theta)$.

2) Note que se $m_r = m_s$ então as retas r e s são paralelas e assim $\operatorname{tg}\theta = 0$, como já era de se esperar.

3) Se $m_r.m_s = -1$ então o valor de tg θ não é definido. Entretanto, sabe-se que se $m_r.m_s = -1$ então as retas r e s são perpendiculares.

Exemplos:

1) (Escola Naval-2008) Os ângulos α e β na figura abaixo são tais que $\beta = \alpha + \frac{\pi}{12}$, e a equação da reta r é $y = x - 2$. Então $tg(\alpha + \beta)$ vale.



a) $-2+\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $-2-\sqrt{3}$ d) $2+\sqrt{3}$ e) $-2\sqrt{3}+2$

Solução:

Se a equação de r é $y = x - 2$ então $m_r = 1$ e assim tem-se que $\alpha = \pi/4$.

Desta forma tem-se que $\beta = \alpha + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

Logo: $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta} = \frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{3}}{1 - tg\frac{\pi}{4}.tg\frac{\pi}{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = -2-\sqrt{3}$

2) (ITA-98) Considere o paralelogramo ABCD onde A = (0 , 0), B = (– 1, 2) e C = (– 3, – 4). Os ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:

a) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e D = (– 2 , – 5) b) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e D = (– 1 , – 5) c) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e D = (– 2 , – 6)

d) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e D = (– 2 , – 6) e) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e D = (– 2 , – 5)

Solução:

Num paralelogramo as diagonais de encontram nos respectivos pontos médios. Logo, o ponto médio M de AC é o ponto médio de BD:

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 0 - 3 = -1 + x_D \Rightarrow x_D = -2$$

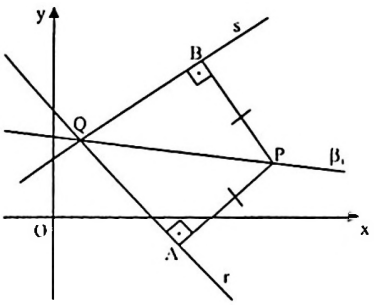
$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 0 - 4 = 2 + y_D \Rightarrow y_D = -6$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{-1-0} = -2 \qquad m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{2+4}{-1+3} = 3$$

$$\alpha = \left|\frac{m_{AB} - m_{BC}}{1 + m_{AB}.m_{BC}}\right| = \left|\frac{-2-3}{1+(-2)(3)}\right| = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Como os ângulos internos de um paralelogramo são suplementares, então o outro ângulo é igual a $\frac{3\pi}{4}$.

5.15. BISSETRIZES ENTRE DUAS RETAS



Sejam r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ duas retas não paralelas que interseptam-se no ponto Q.

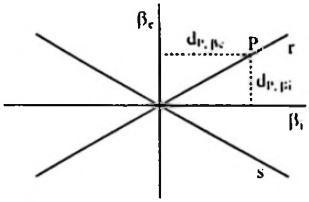
Seja β_i a reta suporte da bissetriz interna do ângulo formado pelas retas r e s.

Considere que P(x, y) é um ponto qualquer, distinto de Q, da reta β_i. Sabe-se que as distâncias de um ponto qualquer de uma bissetriz às duas retas que formam o ângulo são iguais:

$$d_{P,r} = d_{P,s} \Rightarrow \frac{|a_1x + b_1x + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2x - c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow$$

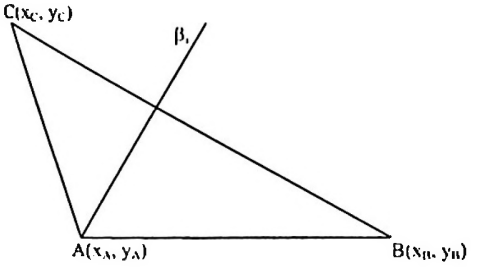
$$\boxed{\frac{a_1x + b_1x + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2x + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}$$

Note que a resolução da equação anterior resulta na equação de duas retas, cada uma para cada sinal do ± da equação. Uma delas é a equação de β_i, a bissetriz interna do ângulo formado por r e s. A outra equação representa a bissetriz externa β_e do ângulo formado por r e s, que é perpendicular a β_i. Isto ocorre porque todos os pontos de β_e também estão a uma mesma distância das retas r e s. O problema agora reside em decidir qual das retas obtidas representa a bissetriz interna do ângulo formado por r e s.



Uma das maneiras de decidir qual das equações representa a bissetriz interna do ângulo entre r e s é calcular as distâncias de um ponto P qualquer da reta r (ou da reta s) às duas bissetrizes já determinadas. Sabendo-se que $d_{P,\beta_i} < d_{P,\beta_e}$ então a reta que está mais próxima de P representa a bissetriz interna de r e s.

5.15.1. Bissetriz interna de um triângulo



Considere que A, B e C são três pontos alinhados no plano cartesiano. Para determinar a reta que representa bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ inicialmente deve-se calcular as retas AC e AB.

Suponha que AC é dada por $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e que AB é dada por $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Pode-se determinar a bissetriz de $\hat{A}$ resolvendo a equação $\frac{a_1x + b_1x + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2x + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$, onde são obtidas duas retas como resposta, cada uma para cada sinal do ±. Suponha que as retas obtidas sejam t_1: $a_3x + b_3y - c_3 = 0$ e t_2: $a_4x + b_4y + c_4 = 0$. Uma delas representa a bissetriz interna de $\hat{A}$ e a outra a bissetriz externa de $\hat{A}$.

Resta agora determinar qual destas retas representa a bissetriz interna de $\hat{A}$. Não é possível utilizar o mesmo procedimento que foi usado para determinar a bissetriz do ângulo entre duas retas porque o conceito de ângulo entre duas retas é distinto do conceito de ângulo interno de um triângulo. Enquanto que o ângulo entre duas retas é definido como o ângulo agudo formado pelas retas, o ângulo interno de um triângulo é definido como a parte do ângulo que é interna ao triângulo. Assim, o ângulo interno de um triângulo pode ser obtuso, como é o caso do ângulo $\hat{A}$ da figura acima.

Uma forma de determinar a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ é observar que apenas a bissetriz interna de A separa os pontos B e C em semi-planos distintos. Portanto, substituindo as coordenadas dos pontos B e C nas expressões $t_1(x, y) = a_3x + b_3y - c_3$ e $t_2(x, y) = a_4x + b_4y + c_4$ obtém-se:

$t_1(x_B, y_B) = a_3x_B - b_3y_B + c_3$
$t_1(x_C, y_C) = a_3x_C - b_3y_C + c_3$
$t_2(x_B, y_B) = a_4x_B + b_4y_B + c_4$
$t_2(x_C, y_C) = a_4x_C - b_4y_C + c_4$

Se $t_1(x_B, y_B).\ t_1(x_C, y_C) < 0$ então a bissetriz interna do ângulo Â é t_1: $a_3x + b_3y + c_3 = 0$, enquanto que se $t_2(x_B, y_B).\ t_2(x_C, y_C) < 0$ então a bissetriz interna de Â é t_2: $a_4x + b_4y + c_4 = 0$.

Exemplos:

1) (Ciaba-95) A equação da bissetriz do ângulo formado pelas retas de equações $3x - 4y + 6 = 0$ e $4x - 3y + 3 = 0$ é:
a) $x + y - 3 = 0$ b) $7x - 7y + 9 = 0$ c) $x + y - 9 = 0$
d) $7x - 7y - 9 = 0$ e) $x + y - 0$
Solução:
As equações das bissetrizes interna e externa dos ângulos formados pelas retas dadas são as soluções da equação $\dfrac{3x-4y+6}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \pm\dfrac{4x-3y+3}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \Rightarrow 3x - 4y + 6 = \pm(4x - 3y + 3)$

i) $3x - 4y + 6 = 4x - 3y + 3 \Rightarrow x + y - 3 = 0$ reta r
ii) $3x - 4y + 6 = -4x + 3y - 3 \Rightarrow 7x - 7y + 9 = 0$ reta s
Seja P(– 2, 0) um ponto da reta $3x - 4y + 6 = 0$. Assim:

$$d_{P,r} = \frac{|x_P + y_P - 3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-2+0-3|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$d_{Q,r} = \frac{|7x_P - 7y_P + 9|}{\sqrt{7^2+7^2}} = \frac{|7(-2)-7(0)+9|}{7\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{14}$$

Como $d_{Q,r} < d_{P,r}$ então a bissetriz pedida é a reta s: $7x - 7y + 9 = 0$

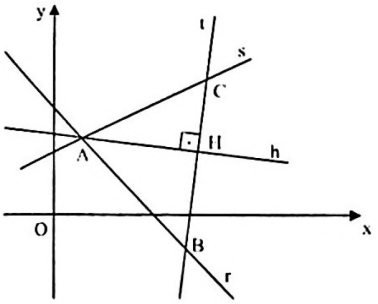
2) (UEFS-2009) Um triângulo possui vértices nos pontos A = (1, 4), B = (4, 4) e C = (4, 7). Uma equação da reta que contém a bissetriz do ângulo B é
A) $y + x - 8 = 0$ B) $y - x - 8 = 0$ C) $2y - x - 4 = 0$
D) $2y + x - 12 = 0$ E) $y - 2x + 4 = 0$
Solução:
Como $y_A = y_B$ então a reta AB é dada por $y - 4 = 0$
Como $x_B = x_C$ então a reta BC é dada por $x - 4 = 0$

Bissetriz de B: $\dfrac{y-4}{\sqrt{0^2+1^2}} = \pm\dfrac{x-4}{\sqrt{1^2+0^2}} \Rightarrow y - 4 = \pm(x - 4)$

i) $y - 4 = x - 4 \Rightarrow x - y = 0$
ii) $y - 4 = 0 - x + 4 \Rightarrow x + y - 8 = 0$
Sejam $t_1(P) = x_P - y_P$ e $t_2(P) = x_P + y_P - 8$. Assim:
$t_1(A) = x_A - y_A = 1 - 4 = -3$ $t_2(A) = x_A + y_A - 8 = 1 + 4 - 8 = -3$
$t_1(C) = x_C - y_C = 4 - 7 = -3$ $t_2(C) = x_C + y_C - 8 = 4 + 7 - 8 = 3$
Como $t_1(A).t_1(C) > 0$ então os pontos A e C estão no mesmo semi-plano em relação à reta $x - y = 0$. Desta forma, a reta $x - y = 0$ é a bissetriz externa do ângulo B.
Como $t_2(A).t_2(C) < 0$ então os pontos A e C estão semi-planos opostos em relação à reta $x + y - 8 = 0$. Desta forma, a reta $x + y - 8 = 0$ é a bissetriz interna do ângulo B.

5.16. ÁREA DE POLÍGONOS

5.16.1. Área do Triângulo



Considere três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ não alinhados no plano cartesiano.
Desta forma, sabe-se que a distância entre os pontos B e C é dada por: $\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

Sejam:
r a reta que passa por A e B
s a reta que passa por A e C,
t a reta que passa por B e C.

Assim, a reta t é dada por:

$$y - y_B = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}(x - x_B) \quad \Rightarrow \quad (y_B - y_C)x - (x_B - x_C)y - x_B(y_B - y_C) + y_B(x_B - x_C) = 0$$

O valor da altura de A com relação à BC é igual a distância do ponto A é reta t:

$$h_A = \frac{|(y_B - y_C)x_A - (x_B - x_C)y_A - x_B(y_B - y_C) + y_B(x_B - x_C)|}{\sqrt{(y_C - y_B)^2 + (x_C - x_B)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{BC}.h_A = |x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - (x_A y_C + x_B y_A + x_C y_B)|$$

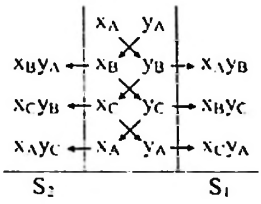
Uma vez que $S_{ABC} = \frac{\overline{BC}.h_A}{2}$ então $S_{ABC} = \frac{|x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - (x_A y_C + x_B y_A + x_C y_B)|}{2}$

Assim, sendo $S_1 = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A$ e $S_2 = x_A y_C + x_B y_A + x_C y_B$ então tem-se que $S_{ABC} = \frac{|S_1 - S_2|}{2}$.

De modo a calcular os valores de S_1 e S_2 pode-se utilizar um dispositivo prático, denominado de dispositivo Delta, que se baseia em organizar as coordenadas dos pontos que compõe o triângulo em uma matriz 4x2, como indicado abaixo, onde as coordenadas de A devem estar na 1ª e na 4ª linhas:

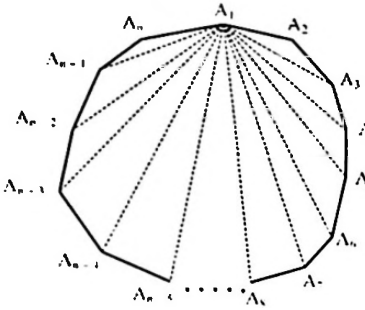
$$\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix}$$

Os termos algébricos que compõe S_1 podem ser determinados calculando o produto de cada elemento da 1ª coluna com o elemento da 2ª coluna diagonalmente abaixo. Do mesmo modo, cada termo de S_2 pode ser calculado multiplicando cada elemento da 2ª coluna com o elemento da 1ª coluna diagonalmente abaixo. O esquema abaixo mostra a aplicação do dispositivo Delta para a determinação de S_1 e S_2.



Depois de determinados S_1 e S_2 a área do triângulo ABC é dada por $S_{ABC} = \frac{|S_1 - S_2|}{2}$.

5.16.2. Área de Polígono Qualquer



Sejam $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ n pontos no plano cartesiano formando o polígono convexo $A_1A_2...A_n$, como indica a figura ao lado.

Pode-se dividir este polígono em n – 2 triângulos:

$$A_1A_2A_3,\ A_1A_3A_4,\ A_1A_4A_5,\ ...,\ A_1A_{n-1}A_n$$

Assim, a área do polígono $A_1A_2...A_n$ é igual a soma das áreas dos triângulos $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, ... e $A_1A_{n-1}A_n$.

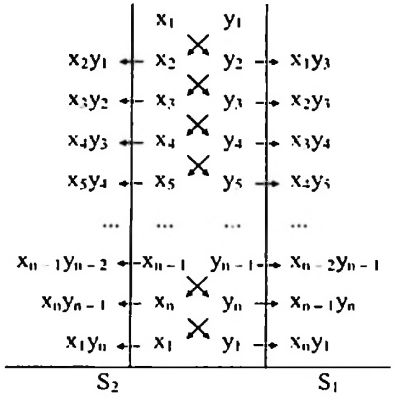
Aplicando o dispositivo Delta para calcular as áreas dos triângulos tem-se a sequência de matrizes:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

. creeba agora que quando as áreas dos triângulos são somadas os mesmo termos algébricos aparecem em S_1 um triângulo e em S_2 em outro triângulo. Por exemplo, no cálculo da área de $\Delta A_1A_2A_3$ o termo x_1y_1 aparece em S_1 e no calculo da área de $\Delta A_1A_3A_4$ o termo x_3y_1 aparece em S_2. Os termos que aparecem com sinais contrários no cálculo das áreas dos triângulos são os que resultam do cálculo das últimas duas linhas de um triângulo com os das primeiras duas linhas do próximo triângulo. Estes termos que possuem sinal contrário são cancelados quando as áreas de todos os triângulos forem somadas. Depois de todos os cancelamentos, encontra-se para a área do polígono a expressão:

$$S = \frac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + ... + x_{n-1}y_n + x_ny_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_5y_4 + ... + x_ny_{n-1} + x_1y_n)|}{2}$$

Esta expressão aparece quando todas coordenadas dos vértices são organizadas de acordo com o dispositivo Delta, com o primeiro vértice sendo repetido no final da seqüência.



Depois de determinados S_1 e S_2 a área do polígono $A_1A_2...A_n$ é dada por $S_{APC} = \frac{|S_1 - S_2|}{2}$.

Observação:
Qualquer um dos vértices do polígono pode iniciar a sequência dos vértices no dispositivo Delta. Após escolhido A_1 os demais vértices da sequência devem ser consecutivos no polígono, seguindo o sentido horário ou anti-horário, sempre fechando a sequência o vértice A_1.

Exemplos:

1) (ITA-2007) Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas $2x = y$, $x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede.
a) 15/2 b) 13/4 c) 11/6 d) 9/4 e) 7/2
Solução:
Calculando as interseções:

i) $\begin{cases} 2x = y \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow (0,0)$; ii) $\begin{cases} 2x = y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \Rightarrow (2,4)$; iii) $\begin{cases} x = 2y \\ x = -2y + 10 \end{cases} \Rightarrow \left(5, \frac{5}{2}\right)$.

Pelo dispositivo delta:

	0	0	
0	2	4	0
20	5	5/2	5
0	0	0	0
20		5	

Logo $S = \frac{|5 - 20|}{2} = \frac{15}{2}$

2) (PUC/RJ-2009) Calcule a área do quadrilátero de vértices (3,5), (1,3), (2,1) e (5,4).
Solução:
Pelo dispositivo Delta:

	3	5	
5	1	3	9
6	2	1	1
5	5	4	8
12	3	5	25
28			43

Portanto, a área do quadrilátero vale $S = \frac{|43 - 28|}{2} = \frac{15}{2}$

5.17. INEQUAÇÕES DO 1° GRAU

Sabe-se que a equação $y = mx + n$ representa, no plano cartesiano, todos os pontos de uma reta, onde (x, y) são as coordenadas destes pontos. Logo, todos os pontos desta reta possuem coordenadas que podem ser escritas da forma $(x, mx + n)$, onde m é o coeficiente angular e n o coeficiente linear da reta. Assim, os pontos do plano cartesiano que satisfazem a inequação $y > mx + n$ são os pontos que possuem coordenada y maior que a do ponto da reta com a mesma coordenada x, ou seja, os pontos que satisfazem a inequação $y > mx + n$ são todos os pontos que estão acima da reta $y = mx + n$. Do mesmo modo, os pontos do plano cartesiano que satisfazem a inequação $y < mx + n$ são os pontos que estão abaixo da reta $y = mx + n$.

Observe os exemplos abaixo para entender melhor como identificar as regiões do plano que satisfazem as inequações de 1° grau.

Exemplos:

1) Determine os pontos do plano cartesiano que satisfazem $2x - y + 5 > 0$.

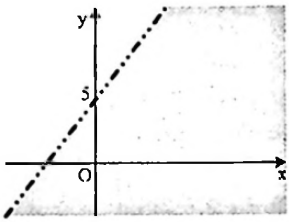
Solução:

Isolando a variável y tem-se: $y < 2x + 5$.

Assim, todos os pontos que satisfazem $y < 2x + 5$ estão abaixo da reta definida pela equação reduzida $y = 2x + 5$.

Na figura ao lado a região em cinza indica o conjunto dos pontos que satisfazem a inequação $2x - y + 5 > 0$.

Note que os pontos da reta não fazem parte da região, por isso a reta está indicada por uma reta tracejada.

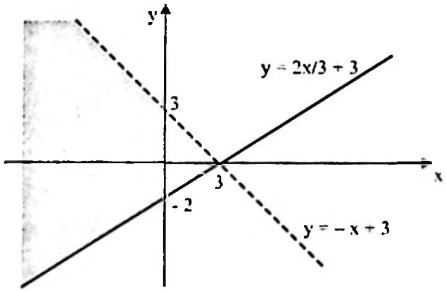


2) Determine todos os pontos do plano cartesiano que satisfazem o sistema de inequações do 1° grau seguinte $\begin{cases} x + y - 3 < 0 \\ 2x - 3y - 6 \leq 0 \end{cases}$.

Solução:

Isolando y nas duas inequações obtém-se $\begin{cases} y < -x + 3 & (1) \\ y \geq \dfrac{2x}{3} - 2 & (2) \end{cases}$

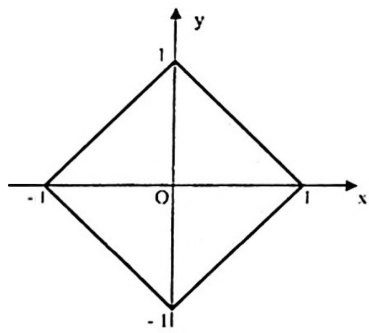
Os pontos que satisfazem a inequação 1 são os pontos que estão abaixo da reta $y = -x + 3$, enquanto que os pontos que satisfazem a inequação 2 são os pontos que estão acima da reta $y = \dfrac{2x}{3} - 2$, incluindo os pontos da própria reta. A solução do sistema de inequação é igual à interseção da região do plano cartesiano que está abaixo da reta $y = -x + 3$ com a região que está acima da reta $y = \dfrac{2x}{3} - 2$.



3) Determine a área da região do plano cartesiano definida pelos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem $|x| + |y| \leq 1$.

Solução:

Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (1º quadrante) tem-se $x + y \leq 1 \Rightarrow$
$y \leq -x + 1 \Rightarrow$ pontos abaixo da reta $y = 1 - x$
Se $x \leq 0$ e $y \geq 0$ (2º quadrante) tem-se $-x + y \leq 1 \Rightarrow$
$y \leq x + 1 \Rightarrow$ pontos abaixo da reta $y = 1 + x$
Se $x \leq 0$ e $y \leq 0$ (3º quadrante) tem-se $-x - y \leq 1 \Rightarrow$
$y \geq -x - 1 \Rightarrow$ pontos acima da reta $y = -1 - x$
Se $x \geq 0$ e $y \leq 0$ (4º quadrante) tem-se $x - y \leq 1 \Rightarrow$
$y \geq x - 1 \Rightarrow$ pontos acima da reta $y = x - 1$
Fazendo a interseção das regiões acima tem-se a região ao lado:

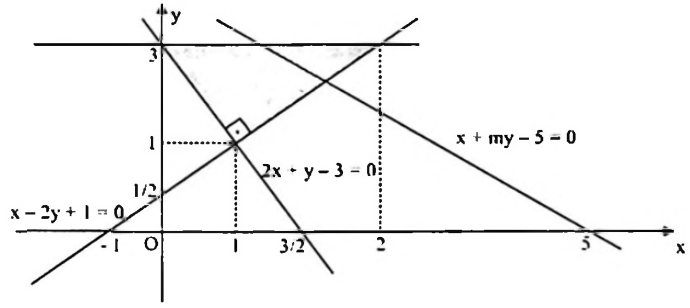


4) (ITA-75) Seja S o conjunto das soluções do sistema de desigualdades:
$2x + y - 3 > 0 \quad x - 2y + 1 < 0 \quad y - 3 < 0 \quad x + my - 5 < 0$,
onde m é real. A representação geométrica de S, em coordenadas cartesianas ortogonais (x, y) é:

a) um quadrilátero para qualquer $m > 0$
b) um triângulo isósceles para qualquer $m < 0$
c) um triângulo retângulo para $m < 0$ ou $5/3 < m < 4$
d) S é o conjunto vazio para $m > 5/3$
e) nenhuma das anteriores

Solução:

$2x + y - 3 > 0 \Rightarrow y > -2x + 3 \Rightarrow$ região acima da reta $y = -2x + 3$ (reta r)
$x - 2y + 1 < 0 \Rightarrow y > x/2 + 1/2 \Rightarrow$ região acima da reta $y = x/2 + 1/2$ (reta s)
$y - 3 < 0 \Rightarrow y < 3 \Rightarrow$ região abaixo da reta $y = 3$ (reta t)
Note também que as retas $y = -2x + 3$ e $y = x/2 + 1/2$ são perpendiculares
Identificando no plano cartesiano a interseção das três regiões definida pelas retas r, s e t:



A região ao lado é um triângulo retângulo.
Note que, independentemente do valor de m, a reta $x + my - 5 = 0$ passa pelo ponto (5, 0).
Seja (0, k) o ponto que a reta $x + my - 5 = 0$ corta o eixo y. Pela equação segmentária:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{k} = 1 \Rightarrow x + \frac{5y}{k} - 5 = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{m}$$

Inicialmente pode-se notar que se $m = 0$ então $x < 5$, ou seja, a região à esquerda da reta $x = 5$. Fazendo a interseção desta região com o triângulo acima tem-se que a região final é o triângulo já desenhado.
Perceba que se $m < 0$ então $x + my - 5 < 0$ representa a região acima da reta $x + my - 5 = 0$, que é uma reta crescente que não corta o triângulo assinalado na figura. Assim, se $m < 0$ a região final é um triângulo retângulo.

Se $m > 0$ a reta $x + my - 5 = 0$ é decrescente e a região definida por $x + my - 5 < 0$ é o semi-plano abaixo da reta $x + my - 5 = 0$. Logo, a região final será um triângulo retângulo se $k \leq 3$ e se o ponto (1, 1) estiver abaixo da reta $x + my - 5 = 0$:

i) $k \leq 3 \Rightarrow \frac{5}{m} \leq 3 \Rightarrow m \geq \frac{5}{3}$; ii) $1 + m.1 - 5 < 0 \Rightarrow m < 4$

A região final será um quadrilátero se $k > 3$ e se o ponto (2, 3) estiver acima da reta $x + my - 5 = 0$ ou contido na mesma:

i) $k > 3 \Rightarrow \frac{5}{m} > 3 \Rightarrow m < \frac{5}{3}$; ii) $2 + m.3 - 5 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$

Para $m > 0$, se o ponto (1, 1) estiver acima da reta $x + my - 5 = 0$ o conjunto é vazio:
$1 + m.1 - 5 > 0 \Rightarrow m > 4$
Para $m > 0$, se o ponto (2, 3) estiver abaixo da reta $x + my - 5 = 0$ então o conjunto será vazio:
$2 + m.3 - 5 < 0 \Rightarrow 0 < m < 1$
Se $m = 4$ o conjunto é unitário: ponto (1, 1)

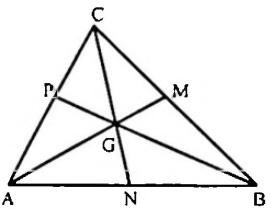
Resumindo, a região final será:
1) Conjunto vazio se $0 < m < 1$ ou se $m > 4$
2) Conjunto unitário se $m = 4$
3) Triângulo Retângulo se $m \leq 0$ ou se $\frac{5}{3} \leq m < 4$
4) Quadrilátero se $1 \leq m < \frac{5}{3}$

5.18. PONTOS CLÁSSICOS DE UM TRIÂNGULO

5.18.1. Baricentro

Teorema: As coordenadas do baricentro G de um triângulo ABC, onde $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são pontos não alinhados, são dadas por $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$ e $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Demonstração:



Sejam M o ponto médio do lado BC do triângulo ABC, N o ponto médio de AB e P o ponto médio de AC. Assim, as medianas de ABC são AM, BN e CP. A interseção destas três retas é o baricentro de ABC.

Como M é ponto médio de BC: $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$ e $y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$

Como o baricentro divide a mediana na razão 2:1 tem-se que:

$$\overline{AG} = 2\overline{GM} \Rightarrow x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \Rightarrow x_G = \frac{2x_M + x_A}{3} \Rightarrow$$

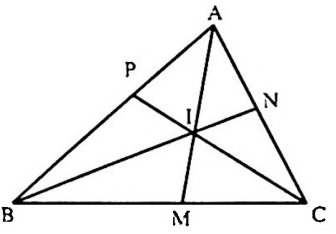
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

Analogamente, pode-se demonstrar que $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

5.18.2. Incentro

Teorema: As coordenadas do incentro I de um triângulo ABC, onde $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são pontos não alinhados, são dadas por $x_I = \frac{a.x_A + b.x_B + c.x_C}{a+b+c}$ e $y_I = \frac{a.y_A + b.y_B + c.y_C}{a+b+c}$.

Demonstração:



Pelo teorema da bissetriz interna em ΔABC tem-se que:

$$\frac{BM}{c} = \frac{CM}{b} = \frac{BM + CM}{b+c} = \frac{a}{b+c} \Rightarrow BM = \frac{ac}{b+c}$$

Por outro lado, os comprimentos de BM e CM são proporcionais às distâncias entre as abscissas dos pontos que delimitam os respectivos segmentos:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{x_M - x_B}{x_C - x_M} = \frac{c}{b} \Rightarrow b.x_M - b.x_B = c.x_C - c.x_M \Rightarrow$$

$$x_M = \frac{b.x_B + c.x_C}{b+c}$$

Mais uma vez, pelo teorema da bissetriz interna em ΔABM:

$$\frac{AI}{MI} = \frac{c}{BM} \Rightarrow \frac{x_A - x_I}{x_I - x_M} = \frac{\cancel{c}}{\frac{a\cancel{c}}{b+c}} \Rightarrow a(x_A - x_I) = (b+c)(x_I - x_M) \Rightarrow$$

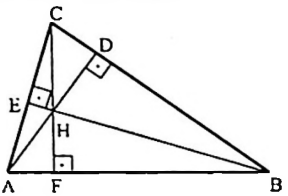
$$(a+b+c)x_I = a.x_A + (b+c)x_M \Rightarrow (a+b+c)x_I = ax_A + b.x_B + c.x_C \Rightarrow x_I = \frac{a.x_A + b.x_B + c.x_C}{a+b+c}.$$

Realizando cálculos análogos demonstra-se que $y_I = \frac{a.y_A + b.y_B + c.y_C}{a+b+c}$.

5.18.3. Ortocentro:

Teorema: As coordenadas do ortocentro H de um triângulo ABC, onde $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são pontos não alinhados, são $x_H = \dfrac{x_A.tgA + x_B.tgB + x_C.tgC}{tgA + tgB + tgC}$ e $y_H = \dfrac{y_A.tgA + y_B.tgB + y_C.tgC}{tgA + tgB + tgC}$.

Demonstração:



Sejam D, E e F os pés das alturas relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente.

Inicialmente, alguns comprimentos serão calculados:

ΔBHF: $BF = BH.\cos(90° - A) \Rightarrow BF = BH.\text{sen } A$

ΔBCF: $BF = a.\cos B \Rightarrow a.\cos B = BH.\text{sen } A$

Lei dos Senos em ΔABC: $b.\text{sen } A = a.\text{sen } B$

Portanto: $b\dfrac{\text{sen } A}{\text{sen } B}\cos B = BH.\text{sen } A \Rightarrow BH = \dfrac{b}{tgB}$ (1)

Além disso: $h_B = AE.tgA = CE.tgC \Rightarrow \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{tgC}{tgA}$ (2)

Portanto: $\dfrac{AE}{tgC} = \dfrac{CE}{tgA} = \dfrac{AE + CE}{tgA + tgC} = \dfrac{b}{tgA + tgC} \Rightarrow \dfrac{AE}{tgC} = \dfrac{b}{tgA + tgC}$

Como $\angle AHB = C$ então $HE = \dfrac{AE}{tgC} = \dfrac{b}{tgA + tgC}$ (3)

Assim, dividindo-se as expressões (1) e (3) obtém-se: $\dfrac{BH}{HE} = \dfrac{tgA + tgC}{tgB}$ (4)

De (2) tem-se que $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{tgC}{tgA} \Rightarrow \dfrac{x_E - x_A}{x_C - x_E} = \dfrac{tgC}{tgA} \Rightarrow x_E.tgA - x_A.tgA = x_C.tgC - x_E.tgC \Rightarrow$

$x_E(tgA + tgC) = x_A.tgA + x_C.tgC$

De (4) tem-se que: $\dfrac{BH}{HE} = \dfrac{tgA + tgC}{tgB} \Rightarrow \dfrac{x_B - x_H}{x_H - x_E} = \dfrac{tgA + tgC}{tgB} \Rightarrow$

$x_B.tgB - x_H.tgB = x_H(tgA + tgC) - x_E(tgA + tgC) \Rightarrow$

$x_B.tgB = x_H.tgB + x_H(tgA + tgC) - x_A.tgA + x_C.tgC \Rightarrow$

$x_H(tgA + tgB + tgC) = x_A.tgA + x_C.tgC + x_B.tgB \Rightarrow x_H = \dfrac{x_A.tgA + x_B.tgB + x_C.tgC}{tgA + tgB + tgC}$

De forma completamente análoga demonstra-se que $y_H = \dfrac{y_A.tgA + y_B.tgB + y_C.tgC}{tgA + tgB + tgC}$

Apesar de demonstradas, é necessário fazer a ressalva que a determinação do ortocentro por estas fórmulas é de aplicação menos prática que o cálculo envolvendo a interseção de duas alturas de ABC. Por exemplo, tome o triângulo formado pelos vértices A(1, 3), B(2, 1) e C(4, 5).

i) Calculando o ortocentro H pelas expressões demonstradas no capítulo:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-1}{1-2} = -2; \quad m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5-3}{4-1} = \frac{2}{3}; \quad m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5-1}{4-2} = 2$$

$$tgA = \frac{m_{AC} - m_{AB}}{1 + m_{AC}.m_{AB}} = \frac{\frac{2}{3} + 2}{1 - \frac{2}{3}.2} = -8; \quad tgB = \frac{m_{AB} - m_{BC}}{1 + m_{AB}.m_{BC}} = \frac{-2-2}{1-2.2} = \frac{4}{3}; \quad tgC = \frac{m_{BC} - m_{AC}}{1 + m_{BC}.m_{AC}} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{1 + 2.\frac{2}{3}} = \frac{4}{7}$$

$$x_H = \frac{x_A.tgA + x_B.tgB + x_C.tgC}{tgA + tgB + tgC} = \frac{1.(-8) + 2.\frac{4}{3} + 4.\frac{4}{7}}{-8 + \frac{4}{3} + \frac{4}{7}} = \frac{1}{2}$$

$$y_H = \frac{y_A.tgA + y_B.tgB + y_C.tgC}{tgA + tgB + tgC} = \frac{3.(-8) + 1.\frac{4}{3} + 5.\frac{4}{7}}{-8 + \frac{4}{3} + \frac{4}{7}} = \frac{13}{4}$$

ii) Calculando o ortocentro H pela interseção de duas alturas de ABC.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-1}{1-2} = -2; \quad m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5-3}{4-1} = \frac{2}{3}$$

Altura de AB: $y - y_C = -\frac{1}{m_{AB}}(x - x_C) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2}(x-4) \Rightarrow x - 2y + 6 = 0$

Altura de AC: $y - y_B = -\frac{1}{m_{AC}}(x - x_B) \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2}(x-2) \Rightarrow 3x + 2y - 8 = 0$

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ 3x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x_H = \frac{1}{2} \Rightarrow y_H = \frac{x_H + 6}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 6}{2} = \frac{13}{4}$$

Perceba que a determinação das coordenadas do ortocentro utilizando as expressões demonstradas no capítulo produziu cálculos mais extensos que a determinação do ortocentro através da interseção entre duas alturas do triângulo ABC. Entretanto, as expressões para as coordenadas do ortocentro em função de tgA, tgB e tgC não deixam de ter sua importância teórica.

5.18.4. Circuncentro

Teorema: As coordenadas do circuncentro O de um triângulo ABC, onde $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$ são $x_O = \frac{x_A.sen2A + x_B.sen2B + x_C.sen2C}{sen2A + sen2B + sen2C}$ e $y_O = \frac{y_A.sen2A + y_B.sen2B + y_C.sen2C}{sen2A + sen2B + sen2C}$.

Demonstração:

Para demonstrar este teorema será usado o teorema da reta de Euler: "Em um triângulo ABC o baricentro (G), o circuncentro (O) e o ortocentro (H) estão alinhados e pertencem a uma reta denominada reta de Euler. Além disso HG = 2GO."

$$HG = 2GO \Rightarrow x_G - x_H = 2(x_O - x_G) \Rightarrow x_O = \frac{3x_G - x_H}{2} \Rightarrow$$

$$x_O = \frac{x_A + x_B + x_C - \frac{x_A.tgA + x_B.tgB + x_C.tgC}{tgA + tgB + tgC}}{2} \Rightarrow$$

$$x_O = \frac{x_A(tgB + tgC) + x_B(tgA + tgC) + x_C(tgA + tgB)}{2(tgA + tgB + tgC)} \Rightarrow$$

Note agora que $tgx + tgy = \frac{senx}{\cos x} + \frac{seny}{\cos y} = \frac{senx.\cos y + seny.\cos x}{\cos x.\cos y} = \frac{sen(x+y)}{\cos x.\cos y}$

Assim: $x_O = \frac{x_A(\frac{sen(B+C)}{\cos B.\cos C}) + x_B(\frac{sen(A+C)}{\cos A.\cos C}) + x_C(\frac{sen(A+B)}{\cos A.\cos B})}{\frac{sen(B+C)}{\cos B.\cos C} + \frac{sen(A+C)}{\cos A.\cos C} + \frac{sen(A+B)}{\cos A.\cos B}} \Rightarrow$

$$x_O = \frac{x_A(senA.\cos A) + x_B(senB.\cos B) + x_C(senC.\cos C)}{senA.\cos A + senB.\cos B + senC.\cos C} \Rightarrow x_O = \frac{x_A.sen2A + x_B.sen2B + x_C.sen2C}{sen2A + sen2B + sen2C}$$

Analogamente demonstra-se que $y_O = \frac{y_A.sen2A + y_B.sen2B + y_C.sen2C}{sen2A + sen2B + sen2C}$

Apesar de sintéticas, as fórmulas acima possuem uma aplicação restrita para o cálculo das coordenadas do circuncentro de um triângulo. Isto ocorre porque, dados os vértices de um triângulo, a determinação de sen2A, sen2B e sen2C é um tanto quanto extensa. Assim, para determinar o circuncentro de um triângulo é mais eficiente determinar as equações de duas mediatrizes e calcular sua interseção. Por exemplo, na determinação do circuncentro do triângulo ABC, onde A(5, 2), B(1, 3) e C(3, 4), pode-se proceder de duas maneiras:

i) utilizando a expressão envolvendo sen2A, sen2B e sen2C:

$a = \overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$b = \overline{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$c = \overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

Pela lei dos cossenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Rightarrow 5 = 8+17-2.2\sqrt{2}.\sqrt{17}.\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \text{sen}A = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow$

$\text{sen}2A = 2\text{sen}A.\cos A = \frac{15}{17}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B \Rightarrow 8 = 5+17-2.\sqrt{5}.\sqrt{17}.\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{7}{\sqrt{85}} \Rightarrow \text{sen}B = \frac{6}{\sqrt{85}} \Rightarrow$

$\text{sen}2B = 2\text{sen}B.\cos B = \frac{84}{85}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos A \Rightarrow 17 = 5+8-2.\sqrt{5}.2\sqrt{2}.\cos C \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{sen}C = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow$

$\text{sen}2C = 2\text{sen}C.\cos C = -\frac{6}{10}$

$$x_O = \frac{x_A.\text{sen}2A + x_B.\text{sen}2B + x_C.\text{sen}2C}{\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C} = \frac{5.\frac{15}{17} + 1.\frac{84}{85} + 3(-\frac{6}{10})}{\frac{15}{17} + \frac{84}{85} - \frac{6}{10}} = \frac{612}{216} = \frac{17}{6}$$

$$y_O = \frac{y_A.\text{sen}2A + y_B.\text{sen}2B + y_C.\text{sen}2C}{\text{sen}2A + \text{sen}2B + \text{sen}2C} = \frac{2.\frac{15}{17} + 3.\frac{84}{85} + 4(-\frac{6}{10})}{\frac{15}{17} + \frac{84}{85} - \frac{6}{10}} = \frac{396}{216} = \frac{11}{6}$$

ii) utilizando a interseção entre duas mediatrizes

$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2-3}{5-1} = -\frac{1}{4}$; $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4-2}{3-5} = -1$

Ponto médio M de AB: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$

Ponto médio N de AC: $x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$; $y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$

Mediatriz de AB: $y - y_M = -\frac{1}{m_{AB}}(x - x_M) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = 4(x-3) \Rightarrow 8x - 2y - 19 = 0$

Mediatriz de AC: $y - y_N = -\frac{1}{m_{AC}}(x - x_N) \Rightarrow y - 3 = 1(x-4) \Rightarrow x - y - 1 = 0$

$$\begin{cases} 8x - 2y - 19 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y - 19 = 0 \\ -2x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_O = \frac{17}{6} \Rightarrow y_O = \frac{11}{6}$$

Exemplos:

1) (ITA-82) Considere o triângulo ABC do plano cartesiano, onde A = (p, q), B = (2p, 3q) e C = (3p, 2q), sendo p e q reais. Se M é o ponto de interseção de suas medianas, então a reta que passa por M e é paralela à reta BC intercepta os eixos coordenados nos pontos:

a) (0, p) e (4p, 0) d) (0, q) e (p, 0)
b) (0, 4q) e (4p, 0) e) (0, 3q) e (3p, 0)
c) (0, 4p) e (4q, 0)

Solução:

Baricentro de ABC:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{p + 2p + 3p}{3} = 2p\,; \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{q + 3p + 2p}{3} = 2q$$

Coeficiente angular de BC: $m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{3q - 2q}{2p - 3p} = -\frac{q}{p}$

Assim, a reta r que passa por M e é paralela a BC é dada por:

$$y - y_G = m_{BC}(x - x_G) \Rightarrow y - 2q = -\frac{q}{p}(x - 2p) \Rightarrow py - 2pq = -qx + 2pq \Rightarrow qx + py - 4pq = 0$$

Esta reta intersecta os eixos coordenados quando x = 0 ou y = 0:

i) $x = 0 \Rightarrow y = 4q \Rightarrow (0, 4q)$
ii) $y = 0 \Rightarrow x = 4p \Rightarrow (4p, 0)$

2) (UEFS-2011) Considerando-se o triângulo cujos vértices são A(9, 1), B(4, 11) e C(1, 5), tem-se que a medida do raio da circunferência inscrita nesse triângulo é igual a

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{7}$

1ª Solução:

Área de ABC:

	9	1	
4	4	11	99
11	1	5	20
45	9	1	1
60			120

Assim, $S = \frac{|120 - 60|}{2} = 30$

Lados de ΔABC:

$$a = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$$

$$b = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$$

$$c = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{25 + 100} = 5\sqrt{5}$$

Como $S = pr \Rightarrow r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{60}{3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} + 5\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

2ª Solução:

Lados de ΔABC:

$$a = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$$

$$b = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$$

$c = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{25+100} = 5\sqrt{5}$

$$x_I = \frac{a.x_A + b.x_B + c.x_C}{a+b+c} = \frac{3\sqrt{5}.9 + 4\sqrt{5}.4 + 5\sqrt{5}.1}{3\sqrt{5}+4\sqrt{5}+5\sqrt{5}} = 4$$

$$y_I = \frac{a.y_A + b.y_B + c.y_C}{a+b+c} = \frac{3\sqrt{5}.1 + 4\sqrt{5}.11 + 5\sqrt{5}.5}{3\sqrt{5}+4\sqrt{5}+5\sqrt{5}} = 6$$

Reta AB: $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = \frac{11-1}{4-9}(x-9) \Rightarrow y - 1 = (-2)(x-9) \Rightarrow$

$2x + y - 19 = 0$

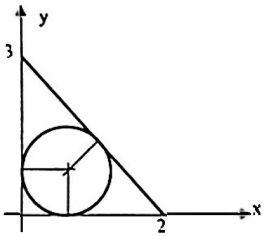
Como r é igual a distância entre I e a reta AB: $r = \frac{|2x_I + y_I - 19|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|2.4+6-19|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

3) (ITA-97) Considere os pontos A: (0, 0) e B: (2, 0) e C: (0, 3). Seja P: (x, y) o ponto da interseção das bissetrizes internas do triângulo ABC. Então x + y é igual a:

a) $12/(5+\sqrt{13})$ b) $8/(2+\sqrt{11})$ c) $10/(6+\sqrt{13})$

d) 5 e) 2

1ª Solução:



Como $\angle BAC = 90^o$ então o incentro de ABC pertence bissetriz dos quadrantes ímpares: $y = x \Rightarrow I = (x_I, y_I) = (r, r)$

reta BC: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 2y + 3x - 6 = 0$

A distância de I à reta BC é igual a r:

$r = \frac{|2r+3r-6|}{\sqrt{13}} \Rightarrow r\sqrt{13} = |5.r - 6|$

Como $r < 1 \Rightarrow \sqrt{13}r = 6 - 5.r \Rightarrow r = 6/(5+\sqrt{13})$

Logo: $x + y = 2.r \Rightarrow x + y = 12/(5+\sqrt{13})$

2ª Solução:

Como o incentro de ABC pertence à reta y = x então tem-se que $x_I = y_I$

Das coordenadas dos vértices conclui-se que $a = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$; $b = 3$; $c = 2$

Assim: $x_I = \frac{a.x_A + b.x_B + c.x_C}{a+b+c} = \frac{\sqrt{13}.0 + 3.2 + 2.0}{\sqrt{13}+3+2} \Rightarrow x_I = y_I = \frac{6}{5+\sqrt{13}} \Rightarrow x_I + y_I = \frac{12}{5+\sqrt{13}}$

4) (UFRJ-2009) Os pontos A(− 6, 2), B(3, − 1), e C(− 5, − 5) pertencem a uma circunferência. Determine o raio dessa circunferência.

1ª Solução:

Área de ABC:

	− 6	2	
6	3	− 1	6
5	− 5	− 5	− 15
30	− 6	2	− 10
41			− 19

Assim, $S = \frac{|-19-41|}{2} = 30$

Lados de ΔABC:

$a = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$

$b = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$

$c = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$

Desde que $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 30 = \frac{4\sqrt{5}.5\sqrt{2}.3\sqrt{10}}{4R} \Rightarrow R = 5$

2ª Solução:

Sendo A(− 6, 2), B(3, − 1), e C(− 5, − 5) então:

$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2+1}{-6-3} = -\frac{1}{3}$; $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5-2}{-5+6} = -7$

Ponto médio M de AB: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-6+3}{2} = -\frac{3}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

Ponto médio N de AC: $x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-6-5}{2} = -\frac{11}{2}$; $y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$

Mediatriz de AB: $y - y_M = -\frac{1}{m_{AB}}(x - x_M) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 3\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow 3x - y + 5 = 0$

Mediatriz de AC: $y - y_N = -\frac{1}{m_{AC}}(x - x_N) \Rightarrow y + \frac{3}{2} = \frac{1}{7}\left(x + \frac{11}{2}\right) \Rightarrow x - 7y - 5 = 0$

$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x - 7y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -5 \\ -3x + 21y = -15 \end{cases} \Rightarrow y_O = -1 \Rightarrow x_O = -2$

Logo: $R = \overline{OB} = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(3+2)^2 + (-1+1)^2} = 5$

Exercícios

01) (UCPel-2010) Se o ponto (x, x) é equidistante dos pontos (4, 8) e (-2, 2), então x vale
(A) 2 (B) 0 (C) 1
(D) 3 (E) -1

02) (Uncisal-2010) Os pontos A(–2,5) e B(4,5) são dois vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD, e P(1,2) é o ponto de encontro de suas diagonais. Os outros dois vértices desse paralelogramo são
(A) (–4,1) e (–2,–1). (B) (4,1) e (2,1).
(C) (4,–1) e (–2,–1). (D) (3,3) e (4,–1).
(E) (–1,–2) e (4,–2).

03) (UFPA-2009) Considere um terreno que tenha a forma de um paralelogramo. Sabendo-se que as coordenadas de três vértices deste paralelogramo são A(2,3), B(8,9) e C(6,5), é correto afirmar que o quarto vértice é um dos pontos de coordenadas
(A) (12,11), (4,7) e (0,1).
(B) (12,10), (4,7) e (0,-1).
(C) (12,10), (3,7) e (0,-1).
(D) (12,11), (4,7) e (0,-1).
(E) (12,10), (3,7) e (0,1).

04) (Furg-2008) Os pontos (1,3), (2,7) e (4,k) do plano cartesiano estão alinhados se e somente se
A) k = 15 B) k = 11 C) k = 14
D) k = 12 E) k = 13

05) (UECE-2007) O ponto (2,1) é o centro de um quadrado no qual um dos vértices é o ponto (5,5). A soma das coordenadas dos outros 3 vértices deste quadrado é
A) 12 B) 8 C) 4 D) 2

06) (UEFS-2010) Os pontos O = (0, 0), M = ($\sqrt{3}$, 1), N e P = (0, p), são vértices consecutivos de um losango. Sabendo-se que p > 0, pode-se concluir que o produto das coordenadas do ponto N é igual a
a) $3+\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) 6
d) $6+2\sqrt{3}$ e) 12

07) (UFC-2009) Os vértices do quadrado ABCD no plano cartesiano são A(–1, 3), B(1, 1), C(3, 3) e D(x, y). Então, os valores de x e y são:
A) $x = 1$ e $y = 5$.
B) $x = 5$ e $y = 1$.
C) $x = 1+\sqrt{5}$ e $y = 1+\sqrt{5}$.
D) $x = 1-\sqrt{5}$ e $y = 1$.
E) $x = 1$ e $y = 1-\sqrt{5}$.

08) (IBMEC-2005) Para que os pontos do plano cartesiano de coordenadas (1: 1), (a: 2) e (2: b) estejam sobre uma mesma reta é necessário e suficiente que
a) $ab = a - b$. b) $ab = a + b$.
c) $ab = b - a$. d) $ab = a^2 - b^2$.
e) $ab = a^2 + b^2$.

09) (UESPI-2009) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, os pontos com coordenadas (1,2) e (x,7), com x sendo um número real, estão no primeiro quadrante e distam 13 entre si. Qual o valor de x?
A) 15 B) 14 C) 13
D) 12 E) 11

10) (ITA-95) Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (b, 2b) e (5b, 0), com b > 0, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:
a) (– b, – b) b) (– 2b, – b) c) (4b, – 2b)
d) (3b, – 2b) e) (– 2b, – 2b)

11) (FEI-2008) Num sistema cartesiano ortogonal (O, x, y), se a distância entre os pontos A = (4, - 5) e B = (m, 7) é igual a 13, então a soma dos possíveis valores de "m" é igual a:
(A) 8 (B) -1 (C) 10
(D) 9 (E) 0

12) (UFRJ-97) Sejam $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (3,4)$ e $M_3 = (1,- 1)$ os pontos médios dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

13) (Unicamp-92) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ duas progressões aritméticas. Mostre que os pontos (a_j, b_j), $j = 1, 2 \ldots$, estão em uma mesma reta.

14) (UFPel-2007) Na arquitetura, a Matemática é usada a todo momento. A Geometria é especialmente necessária no desenho de projetos. Essa parte da Matemática ajuda a definir a forma dos espaços, usando as propriedades de figuras planas e sólidas. Ajuda também a definir as medidas desses espaços. Uma arquiteta é contratada para fazer o jardim de uma residência.

que deve ter formato triangular. Analisando a planta baixa, verifica-se que os vértices possuem coordenadas A (8, 4), B (4, 6) e C (2, 4). No ponto médio do lado formado pelos pontos A e C, é colocado um suporte para luminárias. Considerando o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que a distância do suporte até o ponto B mede, em unidades de comprimento,

a) $\sqrt{37}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$

15) (UFAM-2013) Sejam A(− 4, 2), B(− 8, − 8), C(0, 2) e D(4, 12) vértices consecutivos de um paralelogramo. A altura relativa ao lado BC deste paralelogramo é igual a:

a) $2\sqrt{29}$ b) $2\sqrt{41}$ c) $\frac{12}{\sqrt{41}}$
d) $\frac{20}{\sqrt{29}}$ e) $\frac{20}{\sqrt{41}}$

16) (UFJF-2009) Em uma planície, dois caçadores armados estão localizados nos pontos A(2,1) e B(14,2) . Nos pontos de coordenadas C(4,7) e D(11,14) , encontram-se duas árvores. Um ponto que está livre do alcance das balas de ambos os caçadores é:

a) (43,−83) b) (−7,3)
c) (43,83) d) (−7,−22)
e) (9,22)

17) (UEPB-2010) Os pontos A(1, 1), B(−2, m), C(0, 2) no plano cartesiano são vértices de um triângulo, se:

a) $m \neq 2$ d) $m \neq 1$
b) $m \neq 6$ e) $m \neq 4$
c) $m \neq 3$

18) (UEPG-2010) Sabendo que os pontos A(−3, −1), B(−2, 6) e C(5, 5) são vértices de um quadrado ABCD, assinale o que for correto.

01) A área do quadrado vale 50 u.a.
02) O vértice D tem coordenadas (4, −2).
04) A circunferência que circunscreve o quadrado tem raio igual a 5 u.c.
08) A reta suporte da diagonal BD tem equação 4x + 3y − 10 = 0.
16) As diagonais do quadrado se interceptam no ponto (1, 2).

19) (Unioeste-2011) Qual a equação que representa a reta que passa pelos pontos (4, 5/2) e (2, 9/2)?

A) 2x − 2y − 13 = 0. B) 12x − 5y + 8 = 0.
C) 2x + 2y − 5 = 0. D) − 2x − 2y + 13 = 0.
E) 2x + 5xy + 18 = 0.

20) (FUVEST-99) A reta r tem equação 2x + y = 3 e intercepta o eixo x no ponto A. A reta s passa pelo ponto P = (1, 2) e é perpendicular a r. Sendo B e C os pontos onde s intercepta o eixo x e a reta r, respectivamente.

a) Determine a equação de s. b) Calcule a área do triângulo ABC.

21) (UFRR-2008) A reta que passa pelo ponto de intersecção das retas x − 4y = 6 e 3x + 2y = 4 e é perpendicular ao eixo das ordenadas OY tem por equação:

(A) y = - 1 (B) x = 2
(C) x + y = 2 (D) x - y = 2
(E) x + 2y = 4

22) (Unifesp-2008) Dadas as retas
r: 5x − 12y = 42,
s: 5x + 16y = 56 e
t: 5x − 20y = m,
o valor de m para que as três retas sejam concorrentes num mesmo ponto é

A) 14. B) 28. C) 36. D) 48. E) 58.

23) (FGV-2007) Seja PQRS um quadrado de diagonal PR, com P e R sendo pontos pertencentes à reta de equação x − y − 1 = 0. Se Q(4, 6), então a distância de S à origem (0, 0) do sistema cartesiano de coordenadas retangulares é

A) $3\sqrt{5}$. D) $\sqrt{58}$.
B) $\sqrt{51}$. E) $3\sqrt{7}$.
C) $3\sqrt{6}$.

24) (UECE-2010) As coordenadas do ponto P(x,y), no referencial cartesiano usual, satisfazem as equações $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-1=0$ e $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=0$. A distância de P à reta x + y + 1 = 0 é:

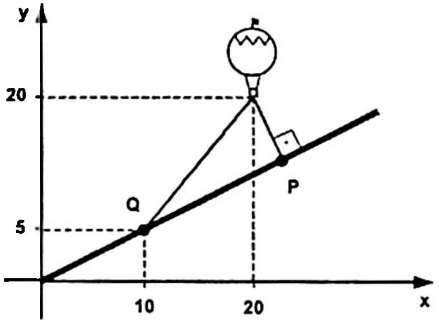
a) $\sqrt{2}$ u.c. b) $2\sqrt{2}$ u.c.
c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ u.c. d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ u.c.

25) (UFPR-2008) Sabe-se que a reta r passa pelos pontos A = (−2,0) e P = (0,1) e que a reta s é

paralela ao eixo das ordenadas e passa pelo ponto Q = (4,2). Se B é o ponto em que a reta s intercepta o eixo das abscissas e C é o ponto de interseção das retas r e s, então o perímetro do triângulo ABC é:

a) $3(3+\sqrt{5})$ b) $3(5+\sqrt{3})$
c) $5(3+\sqrt{5})$ d) $3(3+\sqrt{3})$
e) $5(5+\sqrt{3})$

26) (UFPR-2011) Um balão de ar quente foi lançado de uma rampa inclinada. Utilizando o plano cartesiano, a figura ao lado descreve a situação de maneira simplificada. Ao ser lançado, o balão esticou uma corda presa aos pontos P e Q, mantendo-se fixo no ar. As coordenadas do ponto P, indicado na figura, são, então:



a) (21,7). b) (22,8).
c) (24,12). d) (25,13).
e) (26,15).

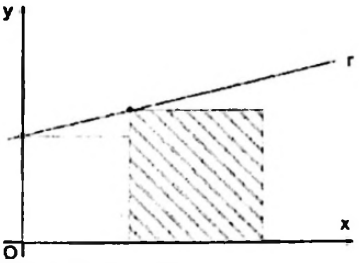
27) (UFC-99) Seja r a reta que passa pelos pontos P(1, 0) e Q(– 1, – 2). Então, o ponto simétrico de N(1, 2), com relação a reta r é:

a) (0, 0) b) (3, 0) c) (5/2, 1)
d) (0, –1) e) (1, 1).

28) (FEI-2008) Num sistema cartesiano ortogonal (O, x, y), considere a reta que passa pelos pontos A = (2, 0) e B = (0, 3). A equação da reta perpendicular à reta determinada pelos pontos A e B, no ponto B é:

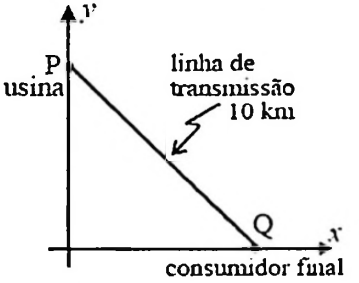
(A) 3x + 2y – 6 = 0 (B) 3x + 2y – 4 = 0
(C) 2x – 3y + 9 = 0 (D) 2x + 3y – 9 = 0
(E) 2x + 3y + 9 = 0

29) (UFPR-2012) Na figura ao lado estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é:



a) x – 2y = –4 b) 4x – 9y = 0
c) 2x + 3y = –1 d) x + y = 3
e) 2x – y = 3

30) (UNB/PAS Subprograma-2007)



No sistema de coordenadas cartesianas xOy mostrado na figura acima, os pontos P = (0, 8) e Q = (x_q, 0) representam, respectivamente, uma usina hidrelétrica e um consumidor final de energia. Considerando que, nesse sistema, a unidade de medida de distância seja o quilômetro, julgue os itens abaixo.

(1) A distância do ponto Q à origem do sistema de coordenadas é igual a 6 km.
(2) A reta que passa pelos pontos P e Q é representada pela equação
(3).A reta de equação 8x + 6y = 1 é paralela à reta que passa pelos pontos P e Q.
(4) Existem números inteiros x_0 e y_0, tais que o ponto R = (x_0, y_0) pertence à reta de equação 8x + 6y = 1.

31) (UFC-99) Seja r a reta que passa pelos pontos P(1, 0) e Q(– 1, – 2). Então, o ponto simétrico de N(1, 2), com relação a reta r é:

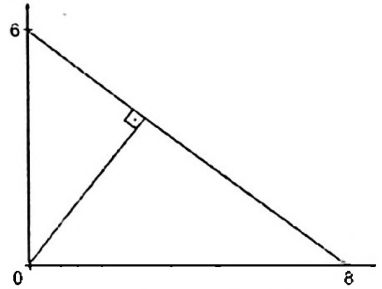
a) (0, 0) b) (3, 0) c) (5/2, 1)
d) (0, –1) e) (1, 1).

32) (Furg-2009) As coordenadas do ponto P pertencente à reta r, dada pela equação y = -2x , e equidistante dos pontos A (2,1) e B (4,3) são:
A) (3, 2) B) (5, -10) C) (-5, 10)
D) (-3, 6) E) (3, -6)

33) (UCPel-2011) A equação da reta r_1 é r_1: 2x − 3y + 5 = 0. Então, a equação da reta r_2 perpendicular à r_1 e que passa no ponto (2, 3) é
(A) 3x +2y = 0 (B) 3x − 2y + 5 = 0
(C) 3x + 2y − 5 = 0 (D) 3x − 2y = 0
(E) 2x − 3y = 0

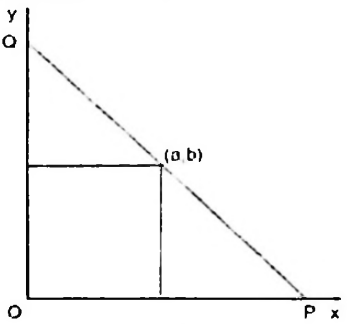
34) (UFBA-2011) Considerem-se em um sistema de coordenadas cartesianas — tendo o metro como unidade de medida para os eixos Ox e Oy — duas partículas P_1 e P_2. Sabendo que, no instante t = 0, a partícula P_1 parte da origem, na direção positiva do eixo Oy, com velocidade constante de 2m/s, e a partícula P_2 parte do ponto (10, 0) em direção à origem dos eixos com velocidade constante de 1m/s, escreva uma equação da reta que passa pelos pontos que determinam a posição das duas partículas no instante em que o quadrado da distância entre elas é mínimo.

35) (UFPE-2009) Qual a menor distância possível entre um ponto da reta com equação y = -3x/4 + 6, esboçada a seguir, e a origem do sistema cartesiano?



A) 4.4 B) 4.5 C) 4.6
D) 4.7 E) 4.8

36) (UFPE-2010) Sejam (a, b), com a e b positivos, as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, e r a reta com inclinação m < 0, que passa pelo ponto (a, b). A reta r intercepta o eixo das abscissas no ponto P, e o eixo das ordenadas no ponto Q, definindo desta maneira um triângulo OPQ, com O sendo a origem do sistema de coordenadas, como ilustrado a seguir.



Avalie a veracidade das afirmações a seguir, referentes a esta configuração.
0-0) A equação de r é y = mx + b − ma
1-1) P = (a + b/m, 0) e Q = (0, b − ma)
2-2) A área do triângulo OPQ é ab − $(ma^2 + b^2/m)/2$
3-3) A área de OPQ é sempre ≥ 2ab
4-4) Para o triângulo OPQ ter a menor área possível, a reta r deve interceptar os eixos coordenados nos pontos P = (2a, 0) e Q = (0, 2b).

37) (Escola Naval-90) No triângulo de vértices A (1, 3), B (4, 5) e C (7, 6), a equação da altura relativa ao vértice A é:
a) 3x + y - 6 = 0 b) x + 3y - 6 = 0
c) 3x - y = 0 d) x - 3y + 8 = 0
e) 5x - 9y + 22 = 0

38) (Fuvest-85) São dados os pontos A = (1, 1) e B = (9, 3). A mediatriz do segmento AB encontra o eixo dos y no ponto de ordenada igual a:
a) 20 b) 21 c) 22 d) 23 e) 24

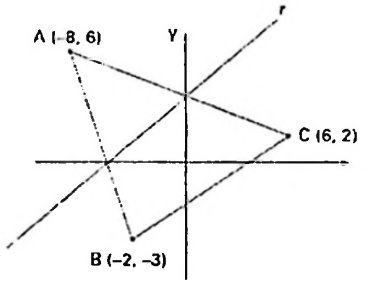
39) (UFRGS) Os vértices de um triângulo são os pontos A (− 1, 2), B (5, 1) e C (3, 6). O coeficiente linear da reta que passa por C e pelo ortocentro do triângulo é:
a) − 24 b) − 12 c) − 10 d) − 6 e) 6

40) (PUC/RJ-2011) Considere duas retas de equações y = 2x + 3 e y = x − 4. Marque a opção que apresenta a alternativa correta.
(A) As retas não se interceptam.
(B) As retas se interceptam no ponto (3, −4).
(C) As retas se interceptam no ponto (−7, −11).
(D) Não se pode dizer se as retas se interceptam ou não.
(E) As retas são iguais.

41) (AFA-2002) As diagonais de um losango estão contidas nas retas (r) $(3m - 1)x + (m - 2)y = 0$ e (t) $x + (m + 1)y + m + 2 = 0$. É correto afirmar que os possíveis valores de m
a) têm soma igual a 2
b) têm produto igual a 3
c) pertencem ao intervalo $]-3, 3]$
d) têm sinais opostos.

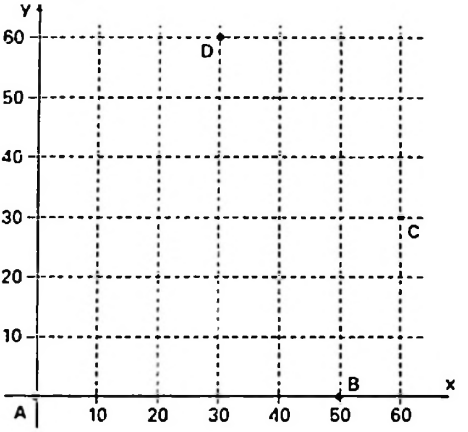
42) (Unicentro-2009) Os pontos A (4,6), B(- 2,3) e C(6,1) são vértices de um triângulo ABC. A equação da reta mediatriz relativa ao lado BC é
A) $4x - y - 6 = 0$ B) $4x - y - 10 = 0$
C) $4x - y + 6 = 0$ D) $4x + 2y - 6 = 0$
E) $4x - 2y + 4 = 0$

43) (ESPM-2007) A equação da reta r do plano cartesiano abaixo é:



a) $13x - 14y + 52 = 0$
b) $12x - 13y + 48 = 0$
c) $7x - 8y - 28 = 0$
d) $9x - 11y + 36 = 0$
e) $6x - 7y - 24 = 0$

44) (IBMEC-2005) Os pontos A, B, C e D do plano a seguir representam 4 cidades.



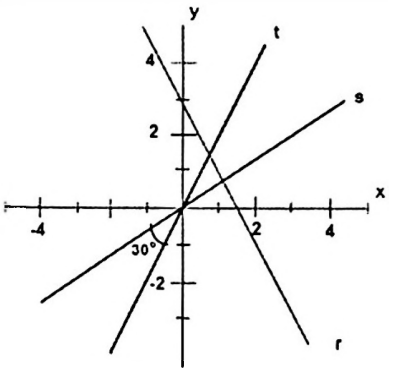
Uma emissora de televisão quer construir uma estação transmissora numa localização tal que:
• a distância entre a estação e a cidade localizada em A seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em B.
• a distância entre a estação e a cidade localizada em C seja igual à distância entre a estação e a cidade localizada em D.
Considerando as coordenadas do plano acima, a localização da estação deverá ser o ponto
a) (10; 10). d) (20; 20).
b) (10; 20). e) (25; 25).
c) (25; 10).

45) (IBMEC-2006) Considere, sobre o plano cartesiano, os pontos O(0, 0), A(2, 14) e B(25, 0). Sejam P o ponto médio do segmento OA e Q o ponto médio do segmento OB. A distância entre a interseção dos segmentos AQ e BP e o ponto P é igual a
a) 5 b) 25/4 c) 25/3
d) 25/2 e) 25

46) (IBMEC-2006) As retas r e s do plano cartesiano são perpendiculares e interceptam-se no ponto P(–1, 3). Se a reta r intercepta o eixo das abscissas no ponto Q(–7, 0), então a reta s intercepta esse mesmo eixo no ponto.
a) (– 1/3, 0) b) (0, 0) c) (1/2, 0)
d) (2/3, 0) e) (1, 0)

47) (Unicentro-2010) Sejam r e s, respectivamente, as retas de equações $2y + x - 6 = 0$ e $y = ax + b$, com a e b reais. Sabendo-se que r e s são perpendiculares e que intersectam o eixo das abscissas no mesmo ponto, então o valor de $(a + b)$ é
(A) – 12. (B) – 10. (C) – 8.
(D) – 6. (E) – 4.

48) (UFPI-2010) Considere, no plano, as retas r, s e t, tais que: a reta r: $y = -2x + 3$ seja perpendicular à reta s; s é concorrente a t e estas duas últimas se interceptam na origem formando um ângulo de 30°, conforme a figura abaixo.



Dessa forma, pode-se afirmar que as equações das retas s e t, são, respectivamente:

a) $x - 2y = 0$ e $5\sqrt{3}x - 11y + 8 = 0$

b) $x + 2y = 0$ e $4x - 11y = 0$

c) $x + 2y = 0$ e $3\sqrt{3}x - 11y = 0$

d) $2x - y = 0$ e $(8 + 5\sqrt{3})x - 11y = 0$

e) $x - 2y = 0$ e $(8 + 5\sqrt{3})x - 11y = 0$

49) (Unicentro-2011) Supondo-se que, em uma representação cartográfica de Curitiba, a Rua Comendador Norberto pudesse ser identificada, no plano cartesiano, por uma reta de equação $2x - y + 2 = 0$ e que encontrasse a Rua Capitão Rocha, perpendicular a ela, no ponto onde $x = 1$, é correto afirmar que é possível representar a Rua Capitão Rocha, no plano, por uma reta de equação

A) $2y + x - 9 = 0$ B) $x - 2y + 9 = 0$
C) $x + 2y + 9 = 0$ D) $4y - 2x - 9 = 0$
E) $4x + 2y - 9 = 0$

50) (PUC/RJ-2010) Quais os vértices do triângulo cujos lados são as retas $x + y = 0$, $y = x$ e $y = 3$?

a) (2,2), (2,-2) e (3,3)
b) (1,1), (2,2) e (3,-3)
c) (3,3), (0,0) e (-3,3)
d) (3,3), (-1,-1) e (2,2)
e) (0,0), (3,3) e (3,0)

51) (Unemat-2010) Dada a equação de reta (s): $2x - y + 1 = 0$, a equação de reta paralela a s pelo ponto P(1 , 1) será:

a) $2x - y = 0$ b) $2x + y + 1 = 0$
c) $2x + y - 1 = 0$ d) $2x - y - 1 = 0$
e) $2x - y + 2 = 0$

52) (PUC-SP-77) Dados os pontos $A = (0, -k)$, $B = (k, 1)$ e $C = (0, -1)$, sabendo que a área do triângulo ABC é 10, então k é igual a:

a) 3 e – 2 b) 5 e – 4 c) 6 e – 1
d) 2 e – 5 e) 4 e 2

53) (U.MACK-80) Os vértices de um triângulo são os pontos A = (1, k), B = (3, 0) e C = (2, 1); M é o ponto médio de AB e N é o ponto médio de BC. Se a área do triângulo MCN é 0,20 então k pode ser:

a) 6/5 b) 12/5 c) 18/5 d) 4 e) 5

54) (FGV-2009) Uma reta vertical divide o triângulo de vértices (0,0), (1,1) e (9,1), definido no plano ortogonal (x, y), em duas regiões de mesma área. A equação dessa reta é

A) $x - 5/2 = 0$. D) $x - 4 = 0$.
B) $x - 3 = 0$. E) $x + 5/2 = 0$.
C) $x - 7/2 = 0$.

55) (FGV-2008) As interseções de $y = x$, $y = -x$ e $y = 6$ são vértices de um triângulo de área

A) 36. D) $12\sqrt{2}$.
B) $24\sqrt{2}$. E) 12.
C) 24.

56) (UEM-2009) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy , os pontos A(0, 0), B(0, 5) e C(a, 2a), em que $a > 0$, e assinale a(s) alternativa(s) correta(s)

01) O triângulo ABC pode ser eqüilátero.
02) A reta de equação $y = -x/2 + 20$ é perpendicular à reta que contém os pontos A e C.
04) Se a = 2, então o triângulo ABC é retângulo.
08) Se a área do triângulo ABC mede 10 unidades de área, então C tem coordenadas (5,10) .
16) Se D é um ponto tal que ABCD seja um losango, então as coordenadas de D são (4, 3) .

57) (FEI-2008) Num sistema cartesiano ortogonal xOy a equação geral da reta t, que passa pelo ponto de interseção das retas r: $x + y - 5 = 0$ e s: $-3x + 2y = 0$ e que tem coeficiente angular igual a -1 é dada por:

(A) $x + y - 5 = 0$ (B) $x - y + 5 = 0$
(C) $x - y + 1 = 0$ (D) $x + y - 1 = 0$
(E) $-x - y + 7 = 0$

58) (IBMEC-2011) Considere a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0<x<2 \\ 4 & \text{se } 2 \le x \le 10 \\ 4x - 36 & \text{se } 10 \le x \le 12 \end{cases}$$

Colocando-se num mesmo plano a reta de equação $y = 0,6x + 1,4$ e o gráfico de f(x), formam-se dois triângulos. A diferença entre a área do maior triângulo e a área do menor triângulo é igual a

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

59) (Unicentro-2008) Sabendo-se que os vértices de um triângulo são os pontos A(-1;-3), B(3;0), e C(1;1), pode-se afirmar que a medida, em u.a., da área do triângulo ABC e a medida do comprimento, em u.c., da altura relativa ao lado AB, são, respectivamente,

A) 5 e 2
B) 25 e 2
C) 2 e 12,5
D) 12,5 e 3
E) 25 e 3

60) (PUC/RJ-2009) Calcule a área do triângulo de vértices A = (1, 2), B = (2, 4) e C = (4, 1).

a) 5/2
b) 3
c) 7/2
d) 4
e) 9/2

61) (Udesc-2011) A região sombreada na Figura 2 tem como limitantes as retas $y = 0$, $y = 2x$, $y = x + 2$, $y = 7$ e $y = 25 - 3x$.

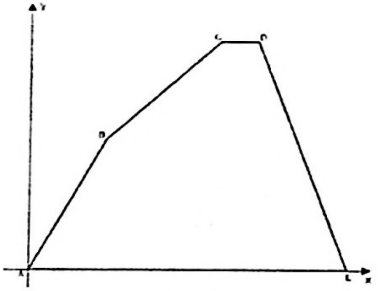


Figura 2

A área da região sombreada é:

a) 152/3
b) 319/6
c) 107/3
d) 214/3
e) 86/3

62) (UECE-2010) Para valores reais de k, as equações $(k - 4)x + 5y - 5k = 0$ representam no plano cartesiano uma família de retas que passam pelo ponto fixo P(m, n). O valor de m + n é

A) 9.
B) 11.
C) 13.
D) 14.

63) (UECE-2010) No sistema usual de coordenadas ortogonais, as equações $x + y = k$ e $x - y = t$ representam famílias de retas perpendiculares. Existem quatro destas retas que limitam a superfície de um quadrado cujo centro é a origem do sistema e a área é 6 ua (unidades de área). O produto dos valores de k e de t, que determinam estas retas, é

A) 9.
B) 8.
C) 6.
D) 4.

64) (UEFS-2009) A área da região limitada pelos eixos cartesianos coordenados pela reta r de equação $2y - x - 2 = 0$ e pela reta s, perpendicular a r e que passa pelo ponto P = (2, 2), mede, em u.a.,

A) 2,5
B) 3,4
C) 4,0
D) 5,8
E) 7,0

65) (UEL-2009) Dois dos pontos A = (2, - 1), B = (2, - 3), C = (1, 4), D = (4, - 3), estão numas das bissetrizes das retas $3y - 4x - 4 = 0$ e $4y - 3x - 4 = 0$. Nessas condições, a equação dessa bissetriz é

a) $y + x - 1 = 0$
b) $y + 7x - 11 = 0$
c) $y - x - 1 = 0$
d) $x = 2$
e) $y + x - 5 = 0$

66) (UEM-2010) Considerando que S é o conjunto de todas as retas do plano com equação da forma $ax + by = c$, em que a, b e c são números reais distintos em progressão geométrica, nessa ordem, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

01) Duas retas distintas de S podem ser paralelas.
02) O conjunto S não contém retas horizontais.
04) O conjunto S não contém retas verticais.
08) A reta $x - y = 0$ não intercepta nenhuma reta de S.
16) O conjunto S contém retas perpendiculares entre si.

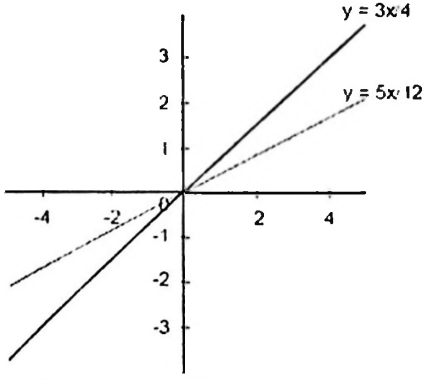
67) (UEM-2008) Em um sistema de eixos ortogonais xOy, em que as unidades correspondem a quilômetros, há três antenas de operadoras de celulares com raio de alcance até 10 km. As antenas estão localizadas nos pontos A(0,0), B(3,0) e C(-4,-4). Em um dado instante, as três antenas captam uma mesma ligação.

Se a antena localizada em A identificou a ligação a 5 km de distância e a antena localizada em B identificou a ligação a 4 km de distância, é correto afirmar que

01) a distância entre as antenas localizadas em B e C é 9 km.
02) o ponto que indica onde foi realizada a ligação e os pontos A, B e C são vértices de um paralelogramo.
04) os pontos que indicam as antenas A, B e C são colineares.
08) a antena localizada em C identificou a ligação a uma distância de 7 km.
16) o ponto que indica onde foi realizada a ligação e os pontos A e B são vértices de um triângulo retângulo.

68) (UEMS-2008) Considere os pontos A = (−2, 2), B = (1, 2), C = (4, 4) , D = (0, a) e E = (b, 4) do plano cartesiano, com a > 2 e b > 4. Se o triângulo com vértices nos pontos A,B,D tem a mesma área do paralelogramo com vértices nos pontos A,B,C, E, então a − b é igual a:
a) 5 b) 4 c) 3
d) 2 e) 1

69) (UFAL-2008) Qual a equação da reta que é bissetriz do ângulo obtuso formado pelas retas com equações y = 3x/4 e y = 5x/12, esboçadas a seguir?



A) y = -7x/4 B) y = -3x/7
C) y = -4x/5 D) y = -5x/7
E) y = -6x/7

70) (PUC-SP-79) As equações das retas que contem os lados de um triângulo ABC, são: reta AB: x + y − 5 = 0, reta BC: x + 7y − 7 = 0 e reta CA: 7x + y + 14 = 0. A equação da bissetriz do ângulo interno em B é:
a) 3x + 6y − 4 = 0 d) 3x + 6y − 18 = 0
b) 3x − 6y − 10 = 0 e) 3x + 6y − 20 = 0
c) 3x + 6y − 16 = 0

71) (UFPE-2011) Seja (a, b) o ortocentro do triângulo com vértices nos pontos com coordenadas (5, 1), (7, 2) e (1, 3). Assinale 4a − 2b.

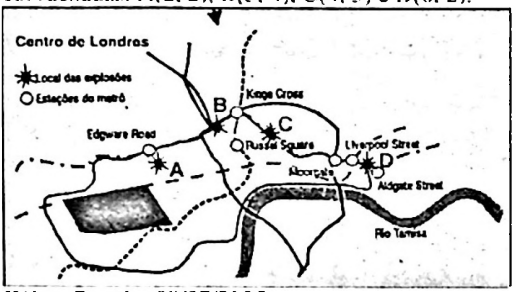
72) (UFMG-2008) Seja ABC um triângulo cujos vértices, em coordenadas cartesianas, são A = (1, 0), B = (3, 0) e C = (2, 1) CALCULE a inclinação m da reta que passa pelo ponto (0, 0) e divide esse triângulo em duas regiões de áreas iguais.

73) (UFMS-2009) Um triângulo isósceles ABC, não eqüilátero, é tal que seus vértices são A=(1,1), B = (2,4) e C um ponto pertencente à reta de equação y = x − 2. Então assinale a(s) afirmação(ões) correta(s).
(001) Existem 3 triângulos isósceles, não eqüiláteros, possíveis com áreas não nulas.
(002) O valor da área do triângulo isósceles, não eqüilátero, de maior área é igual a 5.
(004) O vértice C, do triângulo isósceles, não eqüilátero, de maior área é dado por C = (4, 2).
(008) A equação da reta suporte do lado AB do triangulo é 3x − y − 2 = 0.
(016) O valor do perímetro do triângulo isósceles, não eqüilátero, de menor perímetro, não nula, será obtido com vértice C = (3,1).

74) (UFMS-2008) Um triângulo ABC é tal que as coordenadas de dois de seus vértices são A = (−10,2) e B = (6,4). Sabendo-se que o ponto H= (5,2) é a interseção das alturas do triângulo ABC, sendo esse interno ao triângulo, assinale a(s) proposição(ões) correta(s):
(001) O outro vértice do triângulo é no ponto C = (5,−4).
(002) A equação da reta suporte do lado BC do triângulo é x − 6 = 0.
(004) A área do triângulo é 80.
(008) O triângulo ABC é isósceles.
(016) A equação da reta que contém o segmento dado pela altura do triângulo, relativa ao lado BC, é y − 2 = 0.

75) (UFPel-2006) Em julho de 2005, Londres foi alvo dos terroristas. Especialistas em combater o terrorismo advertem que é praticamente impossível evitar que a capital inglesa seja alvo de outro ataque terrorista, pois qualquer sociedade, não importa quão preparada esteja, é vulnerável ao terrorismo sofisticado, que possui informações de inteligência. Foram quatro as explosões em Londres, todas no centro da cidade. O mapa

abaixo pode ser representado no plano cartesiano, em que os pontos A, B, C e D terão as seguintes coordenadas. A(2, 2), B(3, 4), C(4, 3) e D(6, 2).



Diário Popular 08/07/2005.

Com base nos textos e em seus conhecimentos, é correto afirmar que o polígono formado pela união dos pontos A, B, C e D é um

(a) quadrilátero de 3,5 unidades de área.
(b) triângulo de 3,5 unidades de área.
(c) quadrilátero de 7 unidades de área.
(d) triângulo de 7 unidades de área.
(e) quadrilátero de 2 unidades de área.

76) (U. MACK-74) As desigualdades $y \leq 4$, $x \leq 1$ e $y + 2x \geq 0$ definem uma região de área:

a) indefinida b) 1 c) 7 d) 9 e) 13

77) (CESCEM-74) As regiões do plano definida por:

$x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0$

$2x_1 + x_2 \leq 2$, $x_2 \geq 0$

determinam um quadrilátero, no qual está definida a função $y = x_1 + x_2$. Sabendo-se que o máximo desta função está num dos vértices deste quadrilátero, o seu valor é:

a) 4/3 b) 2/3 c) 1/3 d) 0 e) −1/3

78) (UFPI-2009) Duas retas r e s do plano se interceptam no ponto (−1, 6) e formam, com o eixo das abscissas, ângulos agudos α e β, respectivamente. Se $tg(\alpha) = 3$ e $tg(\beta) = 2$, uma possibilidade para a medida da área do triângulo formado por r, s e o eixo das abscissas é

(A) 11 unidades de área.
(B) 12 unidades de área.
(C) 13 unidades de área.
(D) 14 unidades de área.
(E) 15 unidades de área.

79) (UFPR-2007) No plano cartesiano, considere os pontos A = (0, 1), B = (2, 3) e C = (3, 5) e a reta r definida pela equação $3x + 4y = 12$. Sabendo que a reta r divide o plano cartesiano em duas regiões, chamadas semiplanos, considere as afirmativas a seguir:

1. Os pontos A e B estão no mesmo semiplano determinado pela reta r.
2. A reta determinada por A e C é perpendicular à reta r.
3. A circunferência que passa pelos pontos A, B e C intercepta a reta r em dois pontos distintos.
4. Os pontos do semiplano que contém o ponto C satisfazem a desigualdade $3x + 4y \leq 12$.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 2 e 4 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.

80) (UFRN-2007) Um triângulo ABC possui vértices A = (2, 3), B = (5, 3) e C = (2, 6). A equação da reta bissetriz do ângulo Â é:

A) $y = 3x + 1$ B) $y = 2x$
C) $y = x - 3$ D) $y = x + 1$

81) (UNB-2011) Distante do rigor e do formalismo matemático, pode-se definir fractal como um objeto que apresenta autossemelhança e complexidade infinita ou, em outras palavras, que sempre tem cópias aproximadas de si mesmo no seu interior. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são, geralmente, autossimilares e independem de escala. Em muitos casos, um fractal é gerado por um padrão repetido, sendo, tipicamente, resultante de um processo recorrente ou iterativo.

A figura acima corresponde à representação de uma samambaia construída por meio de computador. Para a composição desse desenho,

constrói-se, primeiramente, um feto fractal. No plano de coordenadas cartesianas xOy, um feto fractal pode ser gerado por meio de um sistema de funções iteradas, começando-se com um ponto na origem, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, e determinando-se, iterativamente, novos pontos a partir do resultado da aplicação aleatória de sistemas de equações. Por exemplo, ao serem desenhadas algumas folhas da samambaia, podem ser encontrados, iterativamente, pares de pontos $P_n = (x_n; y_n)$, que satisfazem ao seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}2x_n - 0{,}26y_n \\ y_{n+1} = 0{,}23x_n + 0{,}22y_y + 1{,}6 \end{cases}$$

Internet: <www.insite.com.br> (com adaptações).

Considere que, a partir do sistema de equações acima apresentado, para a construção de uma samambaia no plano cartesiano xOy, os pontos $P_1 = (0, 1{,}6)$, $P_2 = (-0{,}416, 1{,}952)$ e $P_3 = (-0{,}59072, 1{,}93376)$ correspondam às etapas de 1 a 3 do processo de geração de um feto fractal, iniciando-se com $P_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$. A partir dessas informações, julgue os itens a seguir.

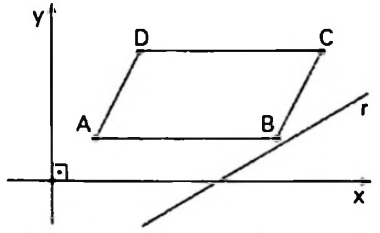
(1) Ao se desenhar a samambaia, o segmento de reta que une P_1 a P_2 é perpendicular ao segmento de reta que une P_1 a P_3.

(2) A reta mediatriz do segmento P_1P_2 passe pelo ponto $(-0{,}208; 1{,}776)$.

(3) É possível traçar uma circunferência que passe pelos pontos P_1, P_2 e P_3.

(4) O comprimento do segmento P_1P_0 é maior que 1,5.

82) (Unifesp-2009) Num sistema cartesiano ortogonal, são dados os pontos A(1, 1), B(5, 1), C(6, 3) e D(2, 3), vértices de um paralelogramo, e a reta r, de equação r: $3x - 5y - 11 = 0$. A reta s, paralela à reta r, que divide o paralelogramo ABCD em dois polígonos de mesma área terá por equação:



A) $3x - 5y - 5 = 0$.
B) $3x - 5y = 0$.
C) $6x - 10y - 1 = 0$.
D) $9x - 15y - 2 = 0$.
E) $12x - 20y - 1 = 0$.

83) (CESCEM-73) Dados os pontos de coordenadas cartesianas ortogonais O(0, 0), B(1, 2) e C(2, 1), o ângulo α entre as semi-retas OB e OC é tal que:

a) $\operatorname{tg} \alpha/2 = 1/3$
b) $\operatorname{tg} \alpha/2 = 2/3$
c) $\alpha = 30°$
d) $\alpha = 45°$
e) $\alpha = 60°$

84) (Unemat-2009) Um triângulo tem vértices A = (0, 3), B = (4, 0) e C = (x, 5) para algum x entre 0 e 4. Se a área do triângulo é 8, então o valor de x é:

a) 8/3 b) 1/2 c) 5/8
d) 8/5 e) 3/5

85) (PUC/MG-2010) A medida da área do triângulo limitado pelas retas $4x - 5y - 20 = 0$, $y = 0$ e $x = 0$, é:

a) 4 b) 5 c) 10 d) 16

86) (Unimontes-2010) A área do pentágono cujos vértices são A(0, 0), B(3, 2), C(2, 3), D(1, 5) e E(−2,1) é

A) 14,5. B) 10,5.
C) 12,5. D) 11,5.

87) (Fuvest-2002) Sejam A = (0, 0), B = (8, 0) e C = (−1, 3) os vértices de um triângulo e D = (u, v) um ponto do segmento BC. Sejam E o ponto de interseção de AB com a reta que passa por D e é paralela ao eixo dos y e F o ponto de interseção de AC com a reta que passa por D e é paralela ao eixo dos x.

a) Determine, em função de u, a área do quadrilátero AEDF.

b) Determine o valor de u para o qual a área do quadrilátero AEDF é máxima.

88) (Fuvest-2003) Duas retas s e t do plano cartesiano se interceptam no ponto (2, 2). O produto de seus coeficientes angulares é 1 e a reta s intercepta o eixo dos y no ponto (0, 3). A área do triângulo delimitado pelo eixo dos x e pelas retas s e t é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

89) (Fuvest-2006) A reta s passa pela origem O e pelo ponto A do primeiro quadrante. A reta r é perpendicular à reta s, no ponto A, e intercepta o eixo x no ponto B e o eixo y no ponto C. Determine o coeficiente angular de s se a área do

triângulo OBC for o triplo da área do triângulo OAB.

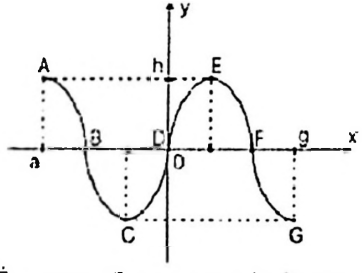
90) (Unicamp-92) Calcule a e b positivos na equação da reta $ax + by = 6$ de modo que passe pelo ponto (3, 1) e forme com os eixos coordenados um triângulo de área igual a 6.

91) (Unicamp-2006) Sabe-se que a reta $r(x) = mx + 2$ intercepta o gráfico da função $y = |x|$ em dois pontos distintos, A e B.
a) Determine os possíveis valores para m.
b) Se O é a origem dos eixos cartesianos, encontre o valor de m que faz com que a área do triângulo OAB seja mínima.

92) (Unicamp-2007) Seja dada a reta $x - 3y + 6 = 0$ no plano xy.
a) Se P é um ponto qualquer desse plano, quantas retas do plano passam por P e formam um ângulo de 45° com a reta dada acima?
b) Para o ponto P com coordenadas (2, 5), determine as equações das retas mencionadas no item (a).

93) (Ciaba-95) A equação da bissetriz do ângulo formado pelas retas de equações $3x - 4y + 6 = 0$ e $4x - 3y + 3 = 0$ é:
a) $x + y - 3 = 0$ b) $7x - 7y + 9 = 0$
c) $x + y + 9 = 0$ d) $7x + 7y - 9 = 0$
e) $x + y = 0$

94) (AFA-2004) Na figura abaixo tem-se a representação gráfica da função real $f(x) = 2\text{sen}\,\frac{x}{2}$ para $x \in [a, g]$.



É correto afirmar que o baricentro do triângulo DEF é o ponto
a) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right)$ c) $\left(\pi, \frac{1}{3}\right)$ d) $\left(\pi, \frac{2}{3}\right)$

95) (Escola Naval-88) O circuncentro do triângulo de vértice A(2, 6), B(4, 8) e C(8, 14) é o ponto:
a) (-15, 25) b) (14/3, 28/3) c) (44, -22)
d) (-10, 20) e) (5,9)

96) (Escola Naval-91) A equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas $3x + 4y + 1 = 0$ e $5x - 12y + 3 = 0$ é:
a) $2x - 2y + 1 = 0$ b) $x - 8y + 1 = 0$
c) $x + 6y = 0$ d) $7x + 56y - 1 = 0$
e) $16x - 2y + 7 = 0$

97) (Escola Naval-92) O cosseno do ângulo P do triângulo de vértices P (1,2), Q (4,6), R (4,-2) vale:
a) –7/25 b) –3/25 c) 1/4
d) 3/25 e) 7/25

98) (Escola Naval-92) A área da região formada pelos pontos P(x,y) tais que $x \geq y \geq 0$ e $2x + 3y \leq 6$ vale:
a) 1,5 b) 1,8 c) 2 d) 2,5 e) 3

99) (Escola Naval-2001) Os pontos A, B, C e D do $\Re^2$ são os vértices de um retângulo de lados não paralelos aos eixos coordenados. O produto dos coeficientes angulares das quatro retas suportes dos lados deste retângulo vale
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

100) (Escola Naval-2003) De um ponto p dos cais, João observa um barco AB ancorado. Para um sistema de eixos ortogonais os pontos A e B têm coordenadas respectivamente iguais a (0, 20) e (0, 40), enquanto P encontra-se no semi-eixo positivo das abscissas. Se o ângulo $A\hat{P}B$ de observação é máximo, então a abscissa de P é igual a:
a) $20\sqrt{2}$ b) $20\sqrt{3}$ c) 20 d) 15 e) 10

101) (ITA-82) Considere o triângulo ABC do plano cartesiano, onde A = (p, q), B = (2p, 3q) e C = (3p, 2q), sendo p e q reais. Se M é o ponto de interseção de suas medianas, então a reta que passa por M e é paralela à reta BC intercepta os eixos coordenados nos pontos:
a) (0, p) e (4p, 0) d) (0, q) e (p, 0)
b) (0, 4q) e (4p, 0) e) (0, 3q) e (3p, 0)
c) (0, 4p) e (4q, 0)

102) (ITA-86) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais sejam A(0, a), B(a/2, 0), C(0, 2a) pontos dados onde a é um número real, $a < 0$.

Sejam as retas: (r) passando por A e B e
(s) passando por C e paralela a (r).
A área do trapézio (T) delimitado pelos eixos cartesianos e pelas retas (r) e (s) vale
a) $3a^2$ b) $3a^2/4$ c) $3a^2/2$
d) $\sqrt{3}\,a^2$ e) $3a^2/4 + a^4$

103) (ITA-86) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais considere o triângulo ABC, sobre o qual sabemos que:
a. o lado AC está sobre a reta $y = x$.
b. o vértice A tem coordenadas (1, 1) e o ângulo A mede 60°.
c. o vértice B está no eixo das ordenadas.
d. o lado BC é paralelo ao eixo das abscissas.
A área deste triângulo vale:
a) 9 b) $9/2 + 3\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}/2$
d) $9/2 + 5\sqrt{3}/2$ e) $1/2 + 5\sqrt{3}$

104) (ITA-88) Sejam a, b, c e d números reais positivos tais que A: $(9a, 3b)$, B: $(-c, d)$, C: $(c, -d)$ são os vértices de um triângulo equilátero. Então a equação da reta r, que é paralela ao lado BC e passa pelo incentro do triângulo ABC é dada por:
a) $3ax + by = c - d$ d) $2dx + 3ay = 4bc$
b) $dx + cy = 3ad + bc$ e) $dx - 2cy = 9a - 3b$
c) $ax + by = 2c - 3d$

105) (ITA-89) Determine a equação da reta suporte de um segmento que tem seu centro do ponto (5, 0) e extremidade em cada uma das retas $x - 2y - 3 = 0$ e $x + y + 1 = 0$. Dê a resposta na forma $Ax + By + C = 0$.

106) (IME-78) Sejam R e S duas retas quaisquer. Sejam $p_2 = (x_2, y_2)$; $p_4 = (x_4, y_4)$; $p_6 = (x_3, y_3)$; $p_5 = (x_5, y_5)$ três pontos distintos sobre S. o segmento p_2p_3 não é paralelo ao segmento p_1p_4 ; o segmento p_1p_6 não é paralelo ao segmento p_2p_5 e o segmento p_3p_6 não paralelo ao segmento p_4p_5. Sejam: A, a interseção dos segmentos p_2p_3 e p_1p_4 ; B, interseção de p_1p_6 com p_2p_5 e C, interseção de p_3p_6 com p_4p_5. Prove que os pontos A, B e C estão em linha reta.

107) (ITA-92) A equação da reta bissetriz do ângulo agudo que a reta $y = mx$, $m > 0$, forma com o eixo dos x é:

a) $y = \dfrac{1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$ b) $y = \dfrac{1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$

c) $y = \dfrac{-1-\sqrt{1+m^2}}{m}x$ d) $y = \dfrac{-1+\sqrt{1+m^2}}{m}x$

e) n.d.a.

108) (IME-70) Estabeleça as equações das retas que distam 10 unidades da origem e que contém o ponto (5, 10).
a) $3x - 2y = 20$ e $y = -6$
b) $3x + 4y = 60$ e $x + 2 = 0$
c) $x - y = 2$ e $y = 10$
d) $4x + 3y = 50$ e $y = 10$
e) $4x + 2y = 50$ e $x + 2y = 10$

109) (ITA-90) Considere a reta (r) mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta $2x - 3y + 7 = 0$ intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ à reta (r) é:

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$ c) $3\sqrt{13}$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

110) (ITA-92) Dados os pontos A: (0, 8), B: (– 4, 0) e C: (4, 0), sejam r e s as retas tais que A, B $\in$ r, B, C $\in$ S. Considere P_1 e P_2 os pés das retas perpendiculares traçadas de P: (5, 3) às retas r e s, respectivamente. Então a equação da reta que passa por P_1 e P_2 é:
a) $y + x = 5$ b) $y + 2x = 5$ c) $3y - x = 5$
d) $y + x = 2$ e) n.d.a.

111) (ITA-93) Dadas as retas (r_1): $x + 2y - 5 = 0$, (r_2): $x - y - 2 = 0$ e (r_3): $x - 2y - 1 = 0$, podemos afirmar que:
a) são 2 a 2 paralelas
b) (r_1) e (r_3) são paralelas
c) (r_1) é perpendicular a (r_3)
d) (r_2) é perpendicular a (r_3)
e) as três são concorrentes

112) (ITA-93) Sendo (r) uma reta dada pela equação $x - 2y + 2 = 0$, então, a equação da reta (s) simétrica a (r) em relação ao eixo das abscissas é descrita por:
a) $x + 2y = 0$ b) $3x - y + 3 = 0$
c) $2x + 3y + 1 = 0$ d) $x + 2y + 2 = 0$
e) $x - 2y - 2 = 0$

113) (ITA-98) Considere o paralelogramo ABCD onde A = (0 , 0), B = (– 1 , 2) e C = (– 3 , –4). Os

ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:

a) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e D = (– 2 , – 5)

b) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e D = (– 1 , – 5)

c) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e D = (– 2 , – 6)

d) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ e D = (– 2 , – 6)

e) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ e D = (– 2 , – 5)

114) (IME-77/78) Enumere os elementos do conjunto x, x ⊂ A, sendo A = {(x, y) ∈ $\Re^2$/ 88x + 70y + 15 = 0} e sabendo que os elementos de x eqüidistam dos elementos de B e C, onde B = {(x, y) ∈ $\Re^2$/ 17x + y – 35 = 0} e C = {(x, y) ∈ $\Re^2$/ 13x + 11y + 50 = 0}

115) (IME-2008) Sendo o ponto A (8, – 2) um vértice de um losango ABCD e 2x + y + 1 = 0 a reta que contém os vértices B e D, assinale a opção correspondente ao vértice C.
A) (– 2 , – 8) B) (0 , – 4) C) (4, 3)
D) (– 4 , – 8) E) (–1, 7)

116) (IME-65) Determine o ponto C, de coordenadas irracionais, pertencente à curva: y – 2x + 8 = 0, que forma com os pontos A($3\sqrt{2}$:$2\sqrt{2}$) e B($4\sqrt{2}$:$3\sqrt{2}$) o triângulo ABC, cuja área é expressa pelo mesmo número que a distância da origem à reta AB.

117) O ponto B(5, 12) é um dos vértices de um triângulo ABC. Uma reta que contém G, ponto médio do lado AB, e é paralela ao lado AC, intercepta o terceiro lado no ponto H(10, 2). Ache o vértice C.

118) A hipotenusa de um triângulo retângulo ABC está sobre a reta 2x + 3y = 5. O vértice A do ângulo reto é o (1, – 1). O vértice B tem abscissa – 2. A abscissa do vértice C é:

119) Determine a reta que passa pelo ponto (– a, 0) e forma no segundo quadrante uma região triangular de área T.
a) $2Tx + a^2y + 2aT = 0$ b) $2Tx - a^2y + 2aT = 0$
c) $2Tx + a^2y - 2aT = 0$ d) $2Tx - a^2y - 2aT = 0$
e) nda

120) Dados os pontos A(8, 11), B(– 4, – 5) e C(– 6, 9), obter o circuncentro do triângulo ABC.

121) Demonstrar que as retas de equações (2m + 1)x + (1 – 3m)y – 1 = 0 onde m é uma variável real, passam por um mesmo ponto.

122) Provar que as retas de equações (m^2 – 6m + 3)x – ($2m^2$ + 18m + 2)y – 3m + 2 = 0, onde m é uma variável real, passam pelo mesmo ponto.

123) Provar que se uma reta se desloca de modo que a soma dos inversos das medidas dos segmentos por ela determinados sobre os eixos seja $\frac{1}{k}$ (constante), então a reta passa por um ponto fixo P do plano cartesiano.

124) Determine o ponto Q, simétrico de P em relação à reta (r). Dados P(– 3, 2) e (r) x + y – 1 = 0.

125) Determinar a reta s, simétrica de (r) x – y + 1 = 0 em relação a (t) 2x + y + 4 = 0.

126) Determinar o ortocentro H do triângulo ABC cujos vértices são A(1, 3), B(2, 1) e C(4, 5).

127) Encontrar a equação da reta que é perpendicular a reta x + y – 3 = 0 e forma com os eixos coordenados um triângulo de área 8 unidades de área, de modo que este triângulo tenha interseção não vazia com a reta x – 2y = 1.

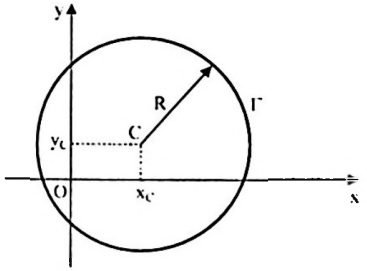
128) Dados os pontos A(a, 0) e B(0, b), tomemos sobre a reta AB um ponto C de modo que BC = m.AB (m ≠ 0 real). Pede-se a equação da reta perpendicular a AB, a qual passa pelo ponto médio do segmento AC.

129) Obter uma reta que passe por (– 4, 6) e defina com os eixos coordenados um triângulo de área 6, no primeiro quadrante.

130) Dados A(0, 0), B(3, 4) e C(12, – 5), calcular o comprimento da bissetriz interna AP do triângulo ABC.

Circunferência

6.1. EQUAÇÃO REDUZIDA



Sabe-se que circunferência é o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de um ponto fixo. Esta distância é denominada de raio e o ponto fixo é o centro da circunferência. Assim, sendo P(x, y) um ponto qualquer da circunferência Γ tem-se que d(P, C) = R:

$$\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2}=R \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2}$$

Esta última expressão é chamada de equação reduzida da circunferência.

Assim, a expressão $(x-1)^2+(y+3)^2=49$ representa uma circunferência com centro no ponto $(1,-3)$ e raio 7. Inversamente, a equação reduzida da circunferência com centro em $(-6, 2)$ e cujo raio é igual a 5 é dada por $(x+6)^2+(y-2)^2=25$

6.2. EQUAÇÃO NORMAL

Sabe-se que a equação reduzida de uma circunferência é da forma $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=R^2$. Desenvolvendo os quadrados perfeitos tem-se que:

$$x^2-2x_Cx+x_C^2+y^2-2y_Cy+y_C^2-R^2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2+y^2-2x_Cx-2y_Cy+x_C^2+y_C^2-R^2=0}$$

Esta expressão é denominada de equação normal da circunferência.

Por exemplo, a equação normal de uma circunferência de centro em $(-3,-5)$ e raio 3 é dada por:

$$x^2+y^2-2(-3)x-2(-5)y+(-3)^2+(-5)^2-3^2=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+6x+10y+25=0$$

6.2.1. Determinação de centro e raio

Dada uma equação normal da forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$, a determinação das coordenadas do centro e do raio é baseada comparando esta expressão com a equação reduzida geral de uma circunferência: $x^2+y^2-2x_Cx-2y_Cy+x_C^2+y_C^2-R^2=0$

i) $a=-2x_C \Rightarrow \boxed{x_C=\dfrac{a}{-2}}$

ii) $b=-2y_C \Rightarrow \boxed{y_C=\dfrac{b}{-2}}$

iii) $c=x_C^2+y_C^2-R^2 \Rightarrow \boxed{R=\sqrt{x_C^2+y_C^2-c}}$

Por exemplo, dada a equação normal $x^2+y^2-2x+6y+6=0$, pode-se determinar centro e raio da seguinte maneira:

$$x_C=\frac{-2}{-2}=1, \quad y_C=\frac{6}{-2}=-3, \quad R=\sqrt{(1)^2+(-3)^2-6}=\sqrt{1+9-6}=\sqrt{4}=2$$

Perceba que a determinação do centro e raio de uma circunferência a partir da equação normal é a maneira mais eficiente de determinar a equação reduzida de uma circunferência a partir da equação normal. Do exemplo anterior, conclui-se que a equação reduzida da circunferência cuja equação normal é $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ é dada por $(x-1)^2+(y+3)^2=4$.

6.3. RECONHECIMENTO

Considere a expressão algébrica geral de 2º grau nas variáveis x e y, onde os coeficientes A, B, C, D, E e F são constantes reais: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$. Para determinados valores dos coeficientes reais esta expressão representa uma a equação normal de uma circunferência. Desde que a equação normal de uma circunferência é da forma $x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 0$, inicialmente deve-se dividir a expressão $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ por A:

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Comparando com a equação normal de um circunferência $x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 0$ conclui-se que:

i) $\frac{B}{A} = 1 \Rightarrow \boxed{B = A \neq 0}$

ii) $\frac{C}{A} = 0 \Rightarrow \boxed{C = 0}$

iii) $\frac{D}{A} = -2x_C \Rightarrow x_C = -\frac{D}{2A}$

iv) $\frac{E}{A} = -2y_C \Rightarrow y_C = -\frac{E}{2A}$

v) $\frac{F}{A} = x_C^2 + y_C^2 - R^2 \Rightarrow \frac{F}{A} = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \Rightarrow \boxed{D^2 + E^2 - 4AF > 0}$

Desta forma, a expressão $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ representa uma circunferência no plano cartesiano se ocorrerem as três condições:

1) os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais;

2) não deve existir termo cruzado xy;

3) o valor do termo $D^2 + E^2 - 4AF$ deve ser maior que zero.

Note que basta que uma das condições citadas acima não seja satisfeita para que a equação geral de 2º grau $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ não represente a equação de uma circunferência.

Exemplos:

1) (FEI-2008) Considere os pontos A(2,0) e B(0,4) dados em relação ao sistema cartesiano ortogonal xOy. Se estes pontos são extremos de um diâmetro de uma circunferência, então a equação reduzida desta circunferência é dada por:

(A) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3$ (B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ (C) $(x-2)^2 + (y-4)2 = \sqrt{3}$

(D) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{5}$ (E) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$

Solução:

Se A e B são extremos de um diâmetro então o ponto médio O de AB é o centro da circunferência:

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+0}{2} = 1; \quad y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$

Além disso: $2R = \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} \Rightarrow R = \sqrt{5}$

Portanto: $(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

2) (Udesc-2007) Determine os valores de a e b para que as circunferências de equações $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$ e $x^2 + y^2 + (2a - b)x + (3a + 2b)y + 16 = 0$ sejam concêntricas.

Solução:

O centro de $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$ é $x_c = \frac{-8}{-2} = 4$ e $y_c = \frac{6}{-2} = -3$.

De modo que o centro da 2ª circunferência seja o mesmo que o centro da 1ª:

i) $\frac{2a-b}{-2} = 4 \Rightarrow 2a - b = -8 \Rightarrow b = 2a + 8$

ii) $\frac{3a+2b}{-2} = -3 \Rightarrow 3a + 2b = 6 \Rightarrow 3a + 2(2a + 8) = 6 \Rightarrow 3a + 4a + 16 = 6 \Rightarrow 7a = -10 \Rightarrow$

$a = -\frac{10}{7} \Rightarrow b = \frac{36}{7}$

3) (UCPel-2009) A equação da circunferência que passa pelos pontos A(-2, 0), B(6, 0) e C(8, 4) é

a) $x^2 + y^2 - 4x - 9y + 12 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 4x - 9y + 12 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 9y - 12 = 0$ d) $x^2 + y^2 + 4x - 9y + 12 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 4x - 9y - 12 = 0$

Solução:

A equação normal de toda circunferência é dada por $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Se a circunferência passa pelos pontos A(-2, 0), B(6, 0) e C(8, 4) então:

$(-2)^2 + (0)^2 + a(-2) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 4 - 2a + c = 0 \Rightarrow c = -4 + 2a$ (1)

$(6)^2 + (0)^2 + a(6) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 36 + 6a + c = 0 \Rightarrow c = -36 - 6a$ (2)

$(8)^2 + (4)^2 + a(8) + b(4) + c = 0 \Rightarrow 64 + 16 + 8a + 4b + c = 0 \Rightarrow 8a + 4b + c = -80$ (3)

Igualando as equações (1) e (2): $-4 + 2a = -36 - 6a \Rightarrow 8a = -32 \Rightarrow a = -4$

Substituindo em (1): $c = -4 - 2(-4) \Rightarrow c = -12$

Substituindo em (3): $8(-4) + 4b - 12 = -80 \Rightarrow 4b = -36 \Rightarrow b = -9$

Assim, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 - 4x - 9y - 12 = 0$

4) (UCPel-2007) A reta que passa pelos centros das circunferências $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e $x^2 + y^2 - 6y = 0$ é

(A) $3x + 2y - 6 = 0$ (B) $2x - 3y + 6 = 0$ (C) $3x + y - 6 = 0$

(D) $2x - y + 6 = 0$ (E) $x - 3y + 6 = 0$

Solução:

Centro de $x^2 + y^2 - 4x = 0$: $x_1 = \frac{-4}{-2} = 2$ $y_1 = \frac{0}{-2} = 0$

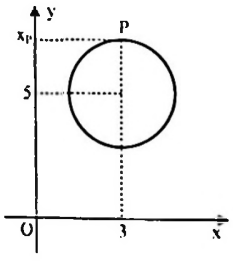
Centro de $x^2 + y^2 - 6y = 0$: $x_2 = \frac{0}{-2} = 0$ $y_2 = \frac{-6}{-2} = 3$

Assim: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{3-0}{0-2}(x-2) \Rightarrow -2y = 3x - 6 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$

5) (FGV-2010) Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$, seja P seu ponto de ordenada máxima. A soma das coordenadas de P é:

A) 10 B) 10,5 C) 11 D) 11,5 E) 1

Solução:



As coordenadas do centro de $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ e seu raio são dados por:

$x_c = \frac{-6}{-2} = 3$; $y_c = \frac{-10}{-2} = 5$; $R = \sqrt{3^2 + 5^2 - 30} = 2$

Observe na figura que o ponto P de ordenada máxima é um dos extremos do diâmetro vertical da circunferência (o outro extremo é o ordenada mínima).

Assim: $x_P = x_c = 3$ e $y_P = y_c + R = 7$

Logo: $x_P + y_P = 10$

6) (UFC-2003) O segmento que une os pontos de interseção da reta $2x + y - 4 = 0$ com os eixos coordenados determina um diâmetro de uma circunferência. A equação dessa circunferência é:

A) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 20$ C) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$

D) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$ E) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$

Solução:

Fazendo $y = 0 \Rightarrow x_A = 2 \Rightarrow A(2, 0)$

Fazendo $x = 0 \Rightarrow y_B = 4 \Rightarrow B(0, 4)$

O centro da circunferência é o ponto médio de AB $\Rightarrow O(1, 2)$

O raio da circunferência vale $R = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{\sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$

Assim, a circunferência é dada por: $(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

7) (Escola Naval-2012) Sejam:

i) r uma reta que passa pelo ponto $P(\sqrt{3}, -1)$.

ii) A e B respectivamente os pontos em que r corta os eixos x e y.

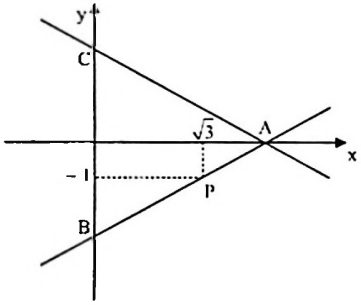
iii) C o ponto simétrico de B em relação a origem.

Se o triângulo ABC é equilátero, a equação da circunferência de centro A e raio igual à distância entre A e C é:

a) $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 12$ b) $(x-2\sqrt{3})^2 + y^2 = 16$ c) $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 16$

d) $(x-2\sqrt{3})^2 + y^2 = 12$ e) $(x-3\sqrt{3})^2 + y^2 = 12$

Solução:



Se ΔABC é equilátero então $\angle ABC = 60°$, ou seja, $m_{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

AB: $y - y_P = m_{AB}(x - x_P) \Rightarrow y + 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x - \sqrt{3}) \Rightarrow$

$\sqrt{3}y + \sqrt{3} = x - \sqrt{3} \Rightarrow x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$

$y_A = 0 \Rightarrow x_A = 2\sqrt{3} \Rightarrow A(2\sqrt{3}, 0)$

$x_B = 0 \Rightarrow y_B = -2 \Rightarrow B(0, -2)$

Como ΔABC é equilátero então:

$R = \overline{AC} = \overline{AB} = \sqrt{(2\sqrt{3} - 0)^2 + (0+2)^2} = 4$

Assim: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 2\sqrt{3})^2 + y^2 = 16$

8) (AFA-2003) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ e centro C é tangente ao eixo das abscissas no ponto A e é tangente ao eixo das ordenadas no ponto B. A área do triângulo ABC vale.

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16

Solução:

$x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0 \Rightarrow C\left(\dfrac{-8}{-2}; \dfrac{8}{2}\right)$; $C(4; -4)$; $r = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 - 16} = 4$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 8y + 16 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 + (y+4)^2 = 4^2 \Rightarrow A(4, 0)$ e $B(0, -4)$

Como o triângulo ABC é retângulo: $s_{\Delta ABC} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8$

9) (ITA-2011) Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio r = 1cm e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo ABC, em cm^2, é igual a:

a) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

Solução:

Centro (a, b) onde a < 0 e b > 0:

1) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - 1 = 0$ (1) $\quad x^2 + y^2 + \frac{m}{36}x + \frac{n}{36} - \frac{23}{36} = 0$ (2)

Como (1) = (2), tem-se:

$\frac{m}{36} = -2a$ (Eq. 1); $\quad \frac{n}{36} = -2b$ (Eq. 2); $\quad \frac{-23}{36} = a^2 + b^2 - 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{13}{36}$ (Eq. 3)

(Eq. 1) ÷ (Eq. 2) $\Rightarrow \frac{m}{36}\cdot\frac{36}{n} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$

Como $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$ $a = -\frac{2}{3}b$ substituindo na (Eq. 3):

$\frac{4}{9}b^2 + b^2 = \frac{13}{36} \Rightarrow \frac{b^2}{9} = \frac{1}{36} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ (visto que b>0) $\Rightarrow a = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

Logo, o centro da circunferência é $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

2) $(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$. Aplicando $x = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow$

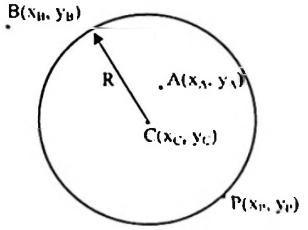
$\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{9} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Assim, os pontos são dados por: $A = \left(0, \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $B = \left(0, \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ e $C = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Como os pontos A e B pertencem ao eixo x, a área de ABC é dada por:

$$S = \frac{(y_A - y_B)|x_C|}{2} \Rightarrow S = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\frac{1}{3}}{2} \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

6.4. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA



Considere uma circunferência de centro C e raio R no plano cartesiano. Sabe-se que a equação reduzida desta circunferência é dada por $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$, enquanto que a equação normal é dada por $x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 0$.

Substituindo as coordenadas de um ponto $P(x_P, y_P)$ qualquer que pertença à circunferência nas equações reduzida e normal tem-se que estas equações são satisfeitas. Logo: $(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 = R^2$ e $x_P^2 + y_P^2 - 2x_C x_P - 2y_C y_P + x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 0$

Se a distância de um ponto $A(x_A, y_A)$ ao ponto C for menor que o raio R então este ponto pertence ao interior da circunferência:

$$\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} < R \Rightarrow (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 < R^2 \Rightarrow$$

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 - R^2 < 0 \Rightarrow x_A^2 + y_A^2 - 2x_C x_A - 2y_C y_A + x_C^2 + y_C^2 - R^2 < 0$$

Analogamente, se $B(x_B, y_B)$ é um ponto exterior à circunferência, tem-se que a distância de B ao ponto C é maior que o raio R da circunferência:

$$\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} > R \Rightarrow (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 > R^2 \Rightarrow$$

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 - R^2 > 0 \Rightarrow x_B^2 + y_B^2 - 2x_C x_B - 2y_C y_B + x_C^2 + y_C^2 - R^2 > 0$$

Do exposto acima, conclui-se que se $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ é a equação normal de uma circunferência, definindo $E(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$, tem-se que:
i) $P(x_P, y_P)$ pertence à circunferência se e somente se $E(x_P, y_P) = 0$;
ii) $P(x_P, y_P)$ é interior à circunferência se e somente se $E(x_P, y_P) < 0$;
iii) $P(x_P, y_P)$ é exterior à circunferência se e somente se $E(x_P, y_P) > 0$;

Observação:

Em determinadas situações é mais interessante expressar E(x, y) em função da equação reduzida da circunferência em vez de escrever em função da equação normal. Por exemplo, se forem fornecidos centro $C(x_C, y_C)$ e raio R da circunferência, pode-se escrever que $E(x, y) = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 - R^2$.

Exemplo:

I) (UFRN-2006) Uma praça, em formato retangular, tem uma fonte luminosa de forma circular no seu centro. Suponha que as coordenadas dos cantos da praça sejam (0,0), (40,0), (0,60) e (40,60) e que o raio da circunferência da fonte seja r = 3. Em relação aos pontos P(22,32) e Q(17,29), pode-se afirmar:

A) P está fora da fonte e Q está dentro.
B) P está dentro da fonte e Q também.
C) P está dentro da fonte e Q está fora.
D) P está fora da fonte e Q também.

Solução:

O centro da circunferência coincide com o encontro das diagonais do retângulo. Uma vez que as diagonais de um retângulo se cortam sem seus respectivos pontos médios:

$$x_0 = \frac{0 + 40}{2} = 20; \quad y_0 = \frac{0 + 60}{2} = 30$$

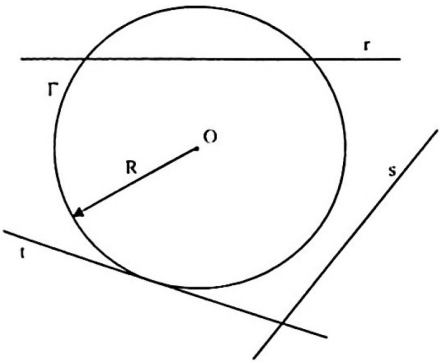
A equação da circunferência é dada por: $(x - 20)^2 + (y - 30)^2 = 3^2 \Rightarrow (x - 20)^2 + (y - 30)^2 - 9 = 0$

Sendo $E(x, y) = (x - 20)^2 + (y - 30)^2 - 9$, tem-se que:

$E(22, 32) = (22 - 20)^2 + (32 - 30)^2 - 9 = 4 + 4 - 9 = -1 < 0 \Rightarrow$ P está dentro da fonte

$E(17, 29) = (17 - 20)^2 + (29 - 30)^2 - 9 = 9 + 1 - 9 = 1 > 0 \Rightarrow$ Q está fora da fonte

6.5. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA



Seja Γ uma circunferência de centro O e raio R. Sejam r, s e t três retas no mesmo plano da circunferência, onde r é secante a Γ, s é externa a Γ e t é tangente a Γ. Observando as distâncias destas retas ao centro O da circunferência Γ conclui-se que:

i) r é secante a Γ se e somente se $d_{O,r} < R$
ii) s é externa a Γ se e somente se $d_{O,s} > R$
iii) t é tangente a Γ se e somente se $d_{O,t} = R$

Algebricamente falando, se a equação de uma reta u é dada por $ax + by + c = 0$ e a equação da circunferência Γ é dada por $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ tem-se que:

i) u é uma reta secante a circunferência Γ se e somente se $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < R$

ii) u é uma reta externa a circunferência Γ se e somente se $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > R$

iii) u é uma reta tangente a circunferência Γ se e somente se $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R$

Por exemplo, seja a circunferência Γ: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ e a reta r: $3x - 4y - 2 = 0$. As coordenadas do centro O da circunferência são: $x_0 = \dfrac{-2}{-2} = 1$ e $y_0 = \dfrac{4}{-2} = -2$.

O centro de Γ é dado por $R = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 - 1} = 2$

A distância entre do ponto O à reta r é dada por: $d_{O,r} = \dfrac{|3(1) - 4(-2) - 2|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$.

Desde que $1{,}8 = d_{O,r} < R = 2$ então a reta r é secante à circunferência Γ.

Tome agora como exemplo a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$ e a reta $x - y + 3 = 0$. As coordenadas da centro da circunferência são $x_0 = \dfrac{-6}{-2} = 3$ e $y_0 = \dfrac{-4}{-2} = 2$. O raio da circunferência é dado por $R = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 - 11} = \sqrt{2}$.

A distância entre o centro da circunferência e a reta é dada por: $d_{O,r} = \dfrac{|(3) - (2) + 3|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Como a distância do centro da circunferência à reta é maior que o raio da circunferência então a reta é exterior à circunferência.

Ainda no exemplo anterior, observe que a distância do ponto O(3, 2) à reta $x - y + 1 = 0$ pode ser calculado por $d_{O,r} = \dfrac{|(3) - (2) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Desta forma, como a distância do centro O da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$ à reta $x - y + 1 = 0$ é igual ao raio da circunferência pode-se afirmar que a reta é tangente à circunferência.

6.5.1. Pontos de Interseção

A interseção entre uma reta e uma circunferência é composta pelos pontos do plano cartesiano que satisfazem simultaneamente a equação da reta e da circunferência. Assim, a interseção entre uma reta e uma circunferência pode ser determinada resolvendo o sistema formado pelas respectivas equações da reta e circunferência. Logo, se a reta é definida pela equação geral r: $ax + by + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) e a circunferência é dada pela equação $\Gamma: x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ ($d, e, f \in \mathbb{R}$), a interseção entre r e Γ é obtida resolvendo o seguinte sistema: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$

Se este sistema não apresentar solução real então a reta é externa à circunferência. Se o sistema apresentar apenas uma solução real tem-se que a reta é tangente à circunferência. Por outro lado, se o sistema apresentar duas soluções, conclui-se que a reta é secante à circunferência.

Por exemplo, para determinar a interseção entre a circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ e a reta $x - 2y = 6$ deve-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \\ x - 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ x = 2y + 6 \end{cases} \Rightarrow (2y + 6 - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$(2y + 5)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Rightarrow 4y^2 + 20y + 25 + y^2 + 2y + 1 = 9 \Rightarrow 5y^2 + 22y + 17 = 0 \Rightarrow$$

$(y + 1)(5y + 17) = 0 \Rightarrow y = -1$ ou $y = -17/5$

i) se $y = -1$ segue que $x = 4$;

ii) se $y = -17/5$ tem-se que $x = -4/5$

Assim, a interseção entre a reta $x - 2y = 6$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ é formada pelos pontos $(4, -1)$ e $(-4/5, -17/5)$. Como a interseção é formada por dois pontos, conclui-se que a reta $x - 2y = 6$ é secante à circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.

Tome agora como exemplo a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$ e a reta $x - y + 3 = 0$.

Determinando a interseção: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow$

$$(x - 3)^2 + (x + 3 - 2)^2 = 2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (x + 1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 + 2x + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0$$

O discriminante desta equação é dada por $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12$. Como $\Delta < 0$ então esta equação não possui raízes reais e assim conclui-se que a reta $x - y + 3 = 0$ é externa à circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$.

Finalmente, de modo a determinar a interseção entre circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$ e a reta $x - y + 1 = 0$ deve-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow (x - 3)^2 + (x + 1 - 2)^2 = 2 \Rightarrow$$

$$(x - 3)^2 + (x - 1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

Como o sistema apresenta apenas uma única solução pode-se afirmar que a reta $x - y + 1 = 0$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11 = 0$. O ponto de tangência é o ponto $(2, 3)$.

Exemplos:

1) (UFPA-98) Escreva a equação da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 15 = 0$, no ponto P(3, – 2).

Solução:

O centro O da circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 15 = 0$ é dado por: $x_O = \frac{-4}{-2} = 2$ e $y_O = \frac{8}{-2} = -4$

O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos O e P é dado por: $m_{OP} = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{-2+4}{3-2} = 2$

A reta t tangente à circunferência no ponto P é perpendicular à reta OP. $m_t = -\frac{1}{m_{OP}} = -\frac{1}{2}$

Logo, a reta t é dada por: $y - y_P = m_t(x - x_P) \Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow 2y + 4 = -x + 3 \Rightarrow$

$x + 2y + 1 = 0$

2) (UECE-2008) O comprimento da corda determinada pela reta $x + 7y - 50 = 0$ na circunferência $x^2 + y^2 - 100 = 0$ é

a) $2\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{10}$ d) $10\sqrt{2}$

Solução:

De modo a determinar a interseção entre a reta $x + 7y - 50 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 100$ deve-se resolver o seguinte sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x + 7y = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = 50 - 7y \end{cases} \Rightarrow (50 - 7y)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow$

$2500 - 700y + 49y^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 50y^2 - 700y + 2400 = 0 \Rightarrow y^2 - 14y + 48 = 0 \Rightarrow$

$(y - 6)(y - 8) = 0 \Rightarrow y = 6$ ou $y = 8$

i) $y = 6 \Rightarrow x = 50 - 7.6 = 8$ ii) $y = 8 \Rightarrow x = 50 - 7.8 = -6$

Assim, os pontos de interseção entre a reta $x + 7y - 50 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 100$ são P(8, 6) e Q(– 6, 8). A distância entre estes pontos é dada por:

$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(8+6)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

3) (Udesc-2009) Um triângulo possui um de seus vértices na origem do sistema cartesiano. Os outros vértices do triângulo são os pontos de interseção entre a circunferência $x^2 + y^2 = 4y$ e a reta $x - 2y = 6$. Calcule o perímetro deste triângulo.

Solução:

Interseção entre a reta e a circunferência: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x = 6 - 2y \end{cases} \Rightarrow$

$(6 - 2y)^2 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow 36 - 24y + 4y^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow 5y^2 - 28y + 36 = 0 \Rightarrow$

$(y - 2)(5y - 18) = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = 18/5$

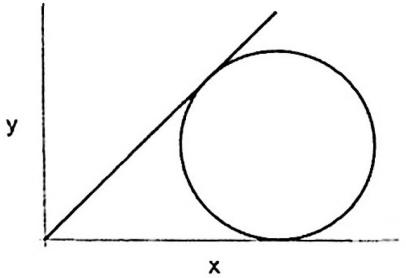
i) $y = 2 \Rightarrow x = 6 - 2.2 = 2$ ii) $y = 18/5 \Rightarrow x = 6 - 2(18/5) = -6/5$

Desta forma, as coordenadas dos pontos de interseção entre a reta $x + 2y = 6$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 4y$ são A(2, 2) e B(– 6/5, 18/5). Desta maneira, o perímetro do triângulo formado por estes dois pontos mais a origem O(0, 0) vale:

$$2p = \overline{AO} + \overline{BO} + \overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} + \sqrt{\left(-\frac{6}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{18}{5} - 0\right)^2} + \sqrt{\left(2 - \frac{18}{5}\right)^2 + \left(2 + \frac{6}{5}\right)^2} \Rightarrow$$

$$2p = 2\sqrt{2} + \frac{6\sqrt{10}}{5} + \frac{8\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 2p = \frac{10\sqrt{2} + 6\sqrt{10} + 8\sqrt{5}}{5}$$

4) (UFPE-2007) Uma circunferência de raio 10 é tangente ao eixo das abscissas e à reta com equação y = x. Se a circunferência tem centro no ponto (a, b), situado no primeiro quadrante, assinale o inteiro mais próximo de a.



Solução:

Como a circunferência é tangente ao eixo das abscissas conclui-se que b = R = 10.

Se a circunferência é tangente à reta y = x então a distância do centro (a, 10) da circunferência à reta x – y = 0 é igual ao raio da circunferência: $10 = \frac{|a-10|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow |a-10| = 10\sqrt{2} \Rightarrow a = 10 \pm 10\sqrt{2}$

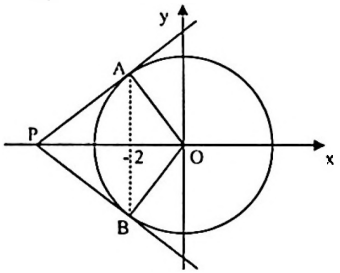
Como a > 0 então tem-se que $a = 10 + 10\sqrt{2}$

Como $\sqrt{2} \cong 1,4142$ então $a \cong 24,142 \Rightarrow$ o inteiro mais próximo é 24

5) (UEL-2004) Seja a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 20$. A distância do ponto P, de interseção das retas tangentes a esta circunferência nos pontos de abscissa x = - 2, ao centro desta circunferência é:

a) 5 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

Solução:



Como o ponto A pertence à circunferência:

$x_A^2 + y_A^2 = 20 \Rightarrow (-2)^2 + y_A^2 = 20 \Rightarrow y_A^2 = 16 \Rightarrow$

$y_A = \pm 4 \Rightarrow y_A = 4$ e $y_B = -4$

A reta OA possui coeficiente angular igual a:

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{4-0}{-2-0} = -2$$

A tangente PA é perpendicular à reta OA: $m_{PA} = -\frac{1}{m_{OA}} = \frac{1}{2}$

Reta OA: $y - y_A = m_{PA}(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow$

$2y - 8 = x + 2 \Rightarrow x - 2y + 10 = 0$

O ponto P é a interseção da reta PA com o eixo x: $x_P - 2.0 + 10 = 0 \Rightarrow x_P = -10$

Assim, a distância de P até o ponto O vale: $d = |x_P - x_O| = |-10 - 0| = 10$

6) (AFA-2001) A circunferência $x^2 + y^2 = 5$ possui duas retas tangentes t_1 e t_2 que são paralelas à reta r: y = –2x + 3. As equações gerais das retas t_1 e t_2, respectivamente, são

a) 2x + y – 5 = 0 e 2x + y + 5 = 0

b) 2x + y – 15 = 0 e 2x + y + 15 = 0

c) $2x + y - 5\sqrt{5} = 0$ e $2x + y + 5\sqrt{5} = 0$

d) $2x + y - \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0$ e $2x + y + \frac{4\sqrt{5}}{5} = 0$

Solução:

Inicialmente deve-se notar que o centro de $x^2 + y^2 = 5$ é a o ponto (0, 0) e o raio vale $\sqrt{5}$.

Se as retas t_1 e t_2 são paralelas à reta y = – 2x + 3 então t_1 e t_2 são da forma y = – 2x + n.

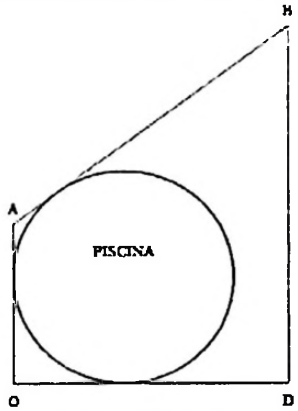
Logo, a equação geral das retas t_1 e t_2 é da forma 2x + y – n = 0

Assim, a distância do centro da circunferência a cada uma destas retas é igual ao raio da circunferência:

$\sqrt{5} = \dfrac{|2.0 + 0 - n|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Rightarrow |n| = 5 \Rightarrow n = \pm 5$

Assim, as retas t_1 e t_2 são dadas por $2x + y - 5 = 0$ e $2x + y + 5 = 0$.

7) (UFCG-2009) Uma piscina na forma circular será construída em um terreno na forma de um trapézio, segundo o desenho abaixo. Sabe-se que num sistema de coordenadas em que o ponto O é a origem e o ponto D está sobre o eixo x, a equação da reta que passa pelos pontos A e B é $3x - 4y + 6 = 0$, com as variáveis x e y medidas em metro. Dessa maneira, o raio r e o centro C da piscina, são respectivamente:



a) r = 6/5 m e C(6/5, 6/5). b) r = 1,2 m e C(6/5, 1). c) r = 0,9 m e C(1, 1).
d) r = 1,0 m e C(1, 1). e) r = 1,1 m e C(3/5, 1).

Solução:

Desde que a circunferência é tangente aos eixos cartesianos então o centro desta é da forma C(r, r).
Como a reta AB é paralela à circunferência então a distância de AB à circunferência é igual ao raio r:

$r = \dfrac{|3.r - 4.r + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \Rightarrow 5r = |-r + 6| \Rightarrow -r + 6 = 5r \text{ ou } -r + 6 = -5r \Rightarrow$

r = 1 ou r = – 2/3 (não convém)
Desta maneira, o raio é dado por r = 1,0 m e o centro é dado por C(1, 1).

8) (Fuvest-2009) No plano cartesiano Oxy, a circunferência C tem centro no ponto A = (–5, 1) e é tangente à reta t de equação $4x - 3y - 2 = 0$ em um ponto P. Seja ainda Q o ponto de intersecção da reta t com o eixo Ox. Assim:
a) Determine as coordenadas do ponto P.
b) Escreva uma equação para a circunferência C.
c) Calcule a área do triângulo APQ.
Solução:

a) O coeficiente angular da reta $4x - 3y - 2 = 0$ possui coeficiente angular igual a $m_t = \dfrac{4}{3}$

A reta AP, perpendicular à reta t, possui coeficiente angular igual a $m_{AP} = -\dfrac{1}{m_t} = -\dfrac{3}{4}$.

A reta AP é dada por: $y - y_A = m_{AP}(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = -\dfrac{3}{4}(x + 5) \Rightarrow 4y - 4 = -3x - 15 \Rightarrow$

$3x + 4y + 11 = 0$
As coordenadas do ponto P são dadas pela solução do sistema:

$\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 3x + 4y = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - 12y = 8 \\ 9x + 12y = -33 \end{cases} \Rightarrow 25x = -25 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow P(-1, -2)$

b) O raio da circunferência é igual à distância entre a reta e o centro da circunferência:

$$R = \frac{|4.(-5) - 3(1) - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-25|}{5} = 5$$

Assim, a equação da circunferência é dada por $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$

c) A reta $4x - 3y - 2 = 0$ corta o eixo Ox quando $y = 0$:

$$4x - 3y - 2 = 0 \Rightarrow 4x_Q - 3.0 - 2 = 0 \Rightarrow x_Q = \frac{1}{2} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

A distância PQ vale: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 + (0 + 2)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

Como o triângulo APQ é retângulo em P: $S_{APQ} = \frac{\overline{AP}.\overline{PQ}}{2} = \frac{5.\frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{4}$

9) (ITA-87) Uma circunferência, tangente às retas de equações $2x - 3y + 9 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$, tem seu centro sobre a reta $x + 2y - 10 = 0$. Encontre a equação dessa circunferência.

Solução:

Se o centro O da circunferência é um ponto pertencente à reta $x + 2y - 10 = 0$ então a forma geral de O é dada por $(10 - 2y_O, y_O)$.

Como esta circunferência é tangente às retas $2x - 3y + 9 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$ então as distâncias destas retas ao centro da circunferência são iguais:

$$\frac{|2(10 - 2y_O) - 3y_O + 9|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|3(10 - 2y_O) - 2y_O + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} \Rightarrow |20 - 4y_O - 3y_O + 9| = |30 - 6y_O - 2y_O + 1| \Rightarrow$$

$$|29 - 7y_O| = |31 - 8y_O|$$

i) $29 - 7y_O = 31 - 8y_O \Rightarrow y_O = 2 \Rightarrow x_O = 6 \Rightarrow O(6, 2)$

ii) $29 - 7y_O = -31 + 8y_O \Rightarrow 15y_O = 60 \Rightarrow y_O = 4 \Rightarrow x_O = 2 \Rightarrow O(2, 4)$

Para determinar o valor do raio para cada centro basta calcular a distância de O a uma das retas tangentes:

i) O(6, 2): $R = \frac{|2x_O - 3y_O + 9|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2.6 - 3.2 + 9|}{\sqrt{13}} = \frac{15}{\sqrt{13}}$

Assim, para O(6, 2) tem-se que a circunferência é dada por $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = \frac{225}{13}$

ii) O(2, 4): $R = \frac{|2x_O - 3y_O + 9|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2.2 - 3.4 + 9|}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$

Assim, para O(2, 4) tem-se que a circunferência é dada por $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = \frac{1}{13}$

10) (ITA-2004) Sejam os pontos A : (2,0), B : (4,0) e P : $(3{,}5 + 2\sqrt{2})$.

a) Determine a equação da circunferência C, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos A e B e é tangente ao eixo y.

b) Determine as equações das retas tangentes à circunferência C que passam pelo ponto P.

Solução:

a) Supondo que D (a; b) é o centro da circunferência e R é o raio desta circunferência, então: $a > 0$, $b > 0$, pois D esta no 1° quadrante e $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ é a equação reduzida da circunferência.

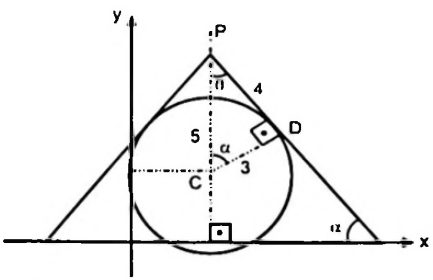
Como A (2; 0) e B (4; 0) pertencem à circunferência, então: $(2 - a)^2 + (-b)^2 = R^2$ (I)

$(4 - a)^2 + (-b)^2 = R^2$ (II)

Fazendo (II) - (I), obtém-se: $12 - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$

Note que R = a = 3, logo b = $2\sqrt{2}$, sendo assim, a equação procurada é: $(x-3)^2 + (y-2\sqrt{2})^2 = 9$

b)



De acordo com a figura acima percebemos, que $tg\alpha = \frac{PD}{CD} = \frac{4}{3}$.

Sendo t a reta tangente a circunferência que passa pelo ponto P, cuja equação é t: y = mx + h, onde m é o coeficiente angular e h é coeficiente linear. Perceba que $m = -\frac{4}{3}$ logo $t: y = -\frac{4x}{3} + h$, substituindo P, teremos:

$5 + 2\sqrt{2} = -4 + h \Rightarrow h = 9 + 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$t: y = -\frac{4}{3}x + 9 + 2\sqrt{2}$, porém, m também pode ser $\frac{4}{3}$,

neste caso a equação de t é $y = \frac{4}{3}x + 1 + 2\sqrt{2}$.

11) (ITA-2006) Sejam a reta s: 12x – 5y +7 = 0 e a circunferência C: $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A reta *p*, que é perpendicular a *s* e é secante a *C*, corta o eixo Oy num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo.

a) $\left(-\frac{91}{12}, -\frac{81}{12}\right)$ b) $\left(-\frac{81}{12}, -\frac{74}{12}\right)$ c) $\left(-\frac{74}{12}, -\frac{30}{12}\right)$

d) $\left(\frac{30}{12}, \frac{74}{12}\right)$ e) $\left(\frac{75}{12}, \frac{91}{12}\right)$

Solução:

Sendo $p \perp s$ e s: 12x – 5y + 7 = 0 então p: 5x + 12y + k = 0.

A equação reduzida da circunferência é:

$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4^2$, ou seja, a circunferência possui centro em (– 2, – 1) e raio 4.

Assim, para que p seja secante à circunferência:

$\frac{|5(-2)+12(-1)+k|}{\sqrt{5^2+12^2}} < 4 \Rightarrow |k-22| < 52 \Rightarrow$

$-52 < k - 22 < 52 \Rightarrow -30 < k < 74$

Quando a reta p cortar o eixo Oy, tem-se que: $5.0 + 12.y + k = 0 \Rightarrow k = -12y$

Assim: $-30 < k < 74 \Rightarrow -30 < -12y < 74 \Rightarrow -\frac{74}{12} < y < \frac{30}{12}$.

Portanto, não há alternativa correta

12) (ITA-2009) Dadas a circunferência C: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 20$ e a reta r: 3x – y + 5 = 0, considere a reta t que tangencia C, forma um ângulo de 45° com r e cuja distância à origem é $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação da reta t.

Solução:

Seja m_s o coeficiente angular de uma reta não vertical s. Assim, $m_r = 3$ e:

$\frac{|m_t - 3|}{|1 + 3m_t|} = tg\,45° = 1 \Rightarrow |m_t - 3| = |1 + 3m_t| \Leftrightarrow m_t - 3 = 1 + 3m_t$ ou $m_t - 3 = -1 - 3m_t \Leftrightarrow$

$m_t = -2$ ou $m_t = 1/2$.

Assim, uma equação de t pode ser escrita ou $2x + y + k = 0$ ou $x - 2y + k = 0$, para algum $k \in \mathbb{R}$. Uma vez que a distância da origem à reta t deve ser $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, impõe-se que: $\frac{|k|}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow k = \pm 3$

Desse modo, haveria 4 possibilidades para t:
Ou $2x + y + 3 = 0$ ou $2x + y - 3 = 0$ ou $x - 2y + 3 = 0$ ou $x - 2y - 3 = 0$
Como t também deve tangenciar C, a distância de t ao centro (3, 1) de C deve ser igual ao raio $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Conclui-se que a única situação conveniente é aquela em que: t: $2x + y + 3 = 0$

13) (ITA-2010) Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são A = (1, 1), B = (1, 7) e C = (5, 4) no plano xOy.
Solução:
Sejam ABC o triângulo de vértices A (1,1), B (1,7) e C (5,4) com AB = 6, BC = 5 e AC = 5. Então ABC é isósceles de base AB. Logo, o ponto M(1, 4), ponto médio de AB, pertence À circunferência λ inscrita ao triângulo ABC e a mediatriz m: $y = 4$ ao segmento AB contém o centro de λ, ou seja, $O(x_0, 4)$. Seja r a reta suporte a AC e s suporte a AB, temos:

$$r: \frac{x - x_a}{y - y_a} = \frac{x - x_c}{y - y_c} \Rightarrow \frac{x-1}{y-1} = \frac{x-5}{y-4} \Rightarrow 4y - 3x - 1 = 0$$

s: $x - 1 = 0$
Para $O(x_0, 4)$, centro de λ, temos:

$$d_{or} = d_{os} \Leftrightarrow \frac{|4.4 - 3x_0 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|x_0 - 1|}{\sqrt{1^2}} \Rightarrow 16 - 3x_0 - 1 = \pm (5x_0 - 5) \Rightarrow$$

$x_0 = 2,5$ ou $x_0 = -5$ (não convém)
Assim, sendo $x_0 = 2,5$ tem-se r = 1,5. Logo: $\lambda: (x - 2,5)^2 + (y - 4)^2 = 1,5^2$

14) (IME-2008) Considere todos os pontos de coordenadas (x, y) que pertençam à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$. Determine o maior valor possível de $\frac{y}{x}$.

Solução:

Chamando $\frac{y}{x} = k$, temos então o seguinte sistema de 2 equações:

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$, que possui solução única quando k (coef. angular da 1ª equação) for máximo ou mínimo (situação em que a reta é tangente a circunferência dada pela 2ª equação)
Para o sistema possuir solução única, temos que: $y = kx \Rightarrow x^2 + k^2x^2 - 6x - 6kx + 14 = 0$
$x^2(1 + k^2) - (6 + 6k)x + 14 = 0$, equação do 2º grau com solução única para
$\Delta = 0 \Rightarrow 36 + 72k + 36k^2 - 4(1 + k^2).14 = 0 \Rightarrow 36 + 72k + 36k^2 - 56 - 56k^2 = 0 \Rightarrow$
$-20k^2 + 72k + 20 = 0 \Rightarrow 20k^2 - 72k + 20 = 0 \Rightarrow 5k^2 - 18k + 5 = 0$, com raízes $\frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{5}$, então o valor máximo de $k = \frac{y}{x}$ é $\frac{9 + 2\sqrt{14}}{5}$.

6.6. INEQUAÇÕES

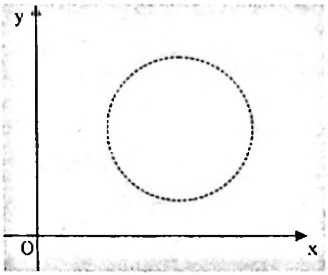
Neste tópico será apresentada a teoria necessária para determinar a região do plano cartesiano que satisfaz inequações do tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c > 0$ ou $x^2 + y^2 + ax + by + c \geq 0$ ou $x^2 + y^2 + ax + by + c < 0$ ou $x^2 + y^2 + ax + by + c \leq 0$.

No item 6.4 foi demonstrado que se $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ é a equação normal de uma circunferência, definindo $E(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$, tem-se que:
i) $P(x_P, y_P)$ pertence à circunferência se e somente se $E(x_P, y_P) = 0$;
ii) $P(x_P, y_P)$ é interior à circunferência se e somente se $E(x_P, y_P) < 0$;
iii) $P(x_P, y_P)$ é exterior à circunferência se e somente se $E(x_P, y_P) > 0$;

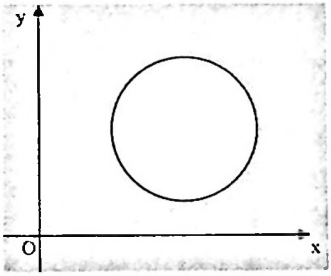
Suponha que $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ é a equação normal de uma circunferência no plano cartesiano. Definindo $E(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$, conclui-se então os pontos $P(x, y)$ que satisfazem:
i) $E(x, y) > 0$ são os pontos externos à circunferência $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, excluindo os pontos da circunferência;
ii) $E(x, y) \geq 0$ são os pontos externos à circunferência $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, incluindo os pontos da circunferência;
iii) $E(x, y) < 0$ são os pontos internos à circunferência $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, excluindo os pontos da circunferência;
iv) $E(x, y) \leq 0$ são os pontos internos à circunferência $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, incluindo os pontos da circunferência;

As visualizações destas inequações no plano cartesiano seguem abaixo:

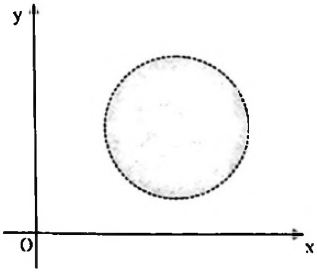
$x^2 + y^2 + ax + by + c > 0$



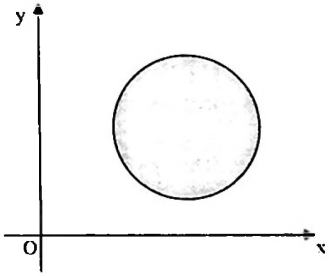
$x^2 + y^2 + ax + by + c \geq 0$



$x^2 + y^2 + ax + by + c < 0$



$x^2 + y^2 + ax + by + c \leq 0$



Exemplos:

1) (AFA-2005) Dados os conjuntos A e B, tais que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 9\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \leq m, m \in \mathbb{R}\}$. É correto afirmar que

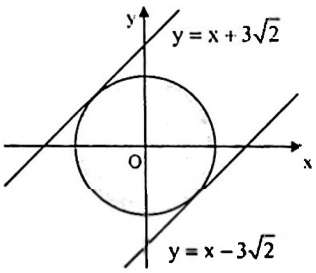
a) A e B são disjuntos se $m = -3\sqrt{2}$

b) $A \cap B \neq \varnothing$ se $m \geq 3\sqrt{2}$

c) A é subconjunto de B se $|m| < 3\sqrt{2}$

d) A e B nunca terão apenas um ponto comum.

Solução:



A inequação $x^2 + y^2 \leq 9$ é representada, no plano cartesiano, pelos pontos interiores à circunferência $x^2 + y^2 = 9$, incluindo os pontos da própria circunferência. As retas que são tangentes à esta circunferência e que possuem coeficiente angular igual a 1 são $y = x + 3\sqrt{2}$ e $y = x - 3\sqrt{2}$. O conjunto B é representado pelos pontos que satisfazem $y \geq x - m$, ou seja, os pontos que estão, no plano cartesiano, acima da reta $y = x - m$. Vamos agora analisar cada alternativa:

a) se $m = -3\sqrt{2}$ tem-se que $A \cap B$ é um conjunto unitário. FALSA.

b) se $m \geq 3\sqrt{2}$ o conjunto B, formado pelos pontos acima da reta $y = x - m$, inclui todos os pontos do conjunto A, implicando que $A \cap B = A \neq \varnothing$. VERDADEIRA.

c) se $m = 0$ o conjunto B é formado pelos pontos acima da reta $y = x$, que corta ao meio o círculo $x^2 + y^2 \leq 9$. FALSA.

) se $m = -3\sqrt{2}$ tem-se que $A \cap B$ é um conjunto unitário. FALSA.

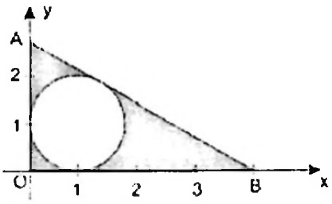
-) (AFA-2007) Seja λ uma circunferência inscrita em um triângulo retângulo AOB cujos catetos estão sobre os eixos cartesianos e medem 3 cm e 4 cm, conforme a figura abaixo.

É INCORRETO afirmar que

a) o ponto de λ mais próximo da origem tem a soma coordenadas igual a $2 - \sqrt{2}$.

b) a área da região sombreada é menor que 3 cm^2.

c) a região sombreada é definida por $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 3x + 4y \leq 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \end{cases}$



d) o conjunto de pontos do plano cartesiano eqüidistantes de A e B é representado por $8x - 6y - 7 = 0$.

Solução:

Como ΔABC é retângulo: $r = (a + b - c)/2 = (4 + 3 - 5)/2 = 1 \Rightarrow \lambda: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

a) O ponto de λ mais próximo da origem é um dos pontos de interseção da reta $y = x$ com λ:

$(x - 1)^2 + (x - 1)^2 = 1 \Rightarrow 2(x - 1)^2 = 1 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{2}/2 \Rightarrow x = y = 1 \pm \sqrt{2}/2$

Assim, o ponto de λ mais próximo de O é $(1 - \sqrt{2}/2, 1 - \sqrt{2}/2)$, cuja soma das coordenadas vale $2 - \sqrt{2}$. VERDADEIRA.

b) $S = AO.OB/2 - \pi r^2 = 3.4/2 - \pi = 6 - \pi < 3$. VERDADEIRA.

c) A reta AB é dada por: $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 4y = 12$. Assim, a região sombreada é definida por:

$x \geq 0, y \geq 0, 3x + 4y \leq 12, (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 1$. FALSA.

d) $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Rightarrow -6y + 9 = -8x + 16 \Rightarrow 8x - 6y - 7 = 0$. VERDADEIRA.

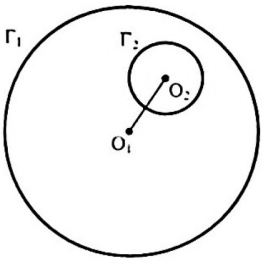
6.7. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

6.7.1) Definições:

- Uma circunferência é interna a outra se todos os seus pontos são pontos internos da outra.
- Duas circunferências são ditas externas se os pontos de uma delas são externos à outra.
- Duas circunferências são tangentes internamente (ou tangentes internas) se uma delas é interna à outra e têm um único ponto comum.
- Duas circunferências são tangentes externamente (ou tangentes externas) se são externas e têm um único ponto comum.
- Duas circunferências são secantes se têm em comum somente dois pontos distintos.

6.7.2) Posições Relativas

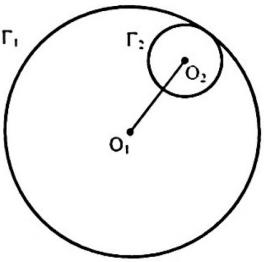
Considere duas circunferências Γ_1, de centro O_1 e raio r_1, e Γ_2, de centro O_2 e raio r_2. Seja d a distância entre seus centros e suponha que $r_1 > r_2$.



Circunferência Γ_2 é interna a Γ_1
$d < r_1 - r_2$

Se Γ_1 é dada por $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ e Γ_2 é dada por $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$ então Γ_2 é interior a Γ_1 se e somente se:

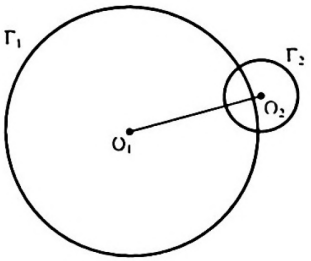
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < r_1 - r_2$$



Circunferência Γ_2 é tangente interna a Γ_1
$d = r_1 - r_2$

Se Γ_1 é dada por $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ e Γ_2 é dada por $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$ então Γ_2 é tangente interna a Γ_1 se e somente se:

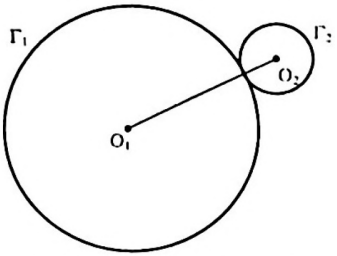
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = r_1 - r_2$$



Circunferências Γ_1 e Γ_2 são secantes
$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

Se Γ_1 é dada por $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ e Γ_2 é dada por $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$ então Γ_1 e Γ_1 são secantes se e somente se:

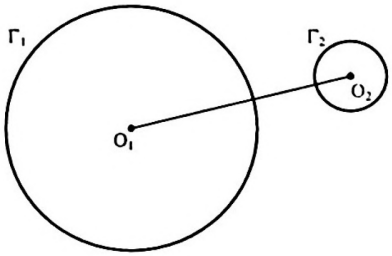
$$|r_1 - r_2| < \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < r_1 + r_2$$



As circunferências Γ_1 e Γ_2 são tangentes externas
$d = r_1 + r_2$

Se Γ_1 é dada por $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ e Γ_2 é dada por $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$ então Γ_1 e Γ_2 são tangentes externas se e somente se:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = r_1 + r_2$$



As circunferências Γ_1 e Γ_2 são externas
$d > r_1 + r_2$

Se Γ_1 é dada por $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2$ e Γ_2 é dada por $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$ então Γ_1 e Γ_2 são externas se e somente se:

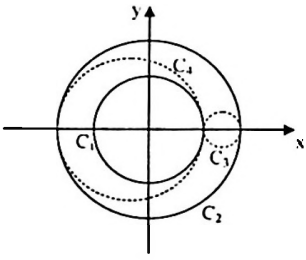
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} > r_1 + r_2$$

Exemplos:

1) (UEFS-2010) Considerando-se as curvas C_1: $x^2 + y^2 = 16$ e C_2: $x^2 + y^2 = 64$ em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, é correto afirmar que uma circunferência tangente comum a essas curvas pode ter raio r e centro C tais que

A) $r \in \{2, 6\}$ e $C \in \{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$
B) $r \in \{2, 6\}$ e $C \in \{(x, y) / x^2 + y^2 = 36\}$
C) $r = 2$ e $C \in \{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$
D) $r = 2$ e $C \in \{(x, y) / x^2 + y^2 = 36\}$ ou $r = 6$ e $C \in \{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$
E) $r = 2$ e $C \in \{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$ ou $r = 6$ e $C \in \{(x, y) / x^2 + y^2 = 36\}$

Solução:



Observe que as circunferências C_1 e C_2 possuem ambas centro na origem e raios respectivamente iguais a 4 e 8, como está indicado na figura abaixo. Assim, existem apenas duas maneiras de uma circunferência ser tangente comum a C_1 e C_2: tangente externa a C_1 e interna a C_2 (por exemplo C_3) ou tangente interna a C_1 e interna a C_2 (por exemplo C_4). Se r_3 é o raio de C_3 e r_4 o raio de C_4:

$r_1 + r_3 = r_2 - r_3 \Rightarrow r_3 = (r_2 - r_1)/2 = (8 - 4)/2 = 2$

$r_4 - r_1 = r_2 - r_4 \Rightarrow r_3 = (r_1 + r_2)/2 = (4 + 8)/2 = 6$

Se (x, y) é o centro de C_3 então $d(O, C_3) = r_1 + r_3 = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36$

Se (x, y) é o centro de C_4 então $d(O, C_4) = r_4 - r_1 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Logo, a alternativa correta é D.

2) (UERN-2011) Duas circunferências C_1 e C_2 são dadas, respectivamente pelas equações $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 36 = 0$. A respeito dessas circunferências, pode-se afirmar que:

A) C_1 e C_2 se tangenciam exteriormente. C) C_1 é tangente ao eixo das ordenadas.

B) C_2 tangencia o eixo das abscissas. D) C_1 e C_2 são secantes entre si.

Solução:

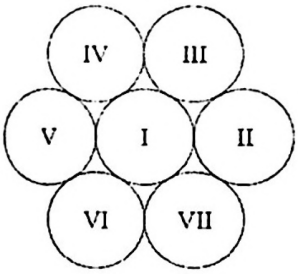
O centro e raio da circunferência C_1: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ são dados por (2, 1) e $r_1 = 3$.

O centro e raio da circunferência C_2: $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$ são dados por (6, – 2) e $r_2 = 2$.

A distância entre os centros de C_1 e C_2 vale $d = \sqrt{(2-6)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Como $d = r_1 + r_2$ então C_1 e C_2 se tangenciam exteriormente.

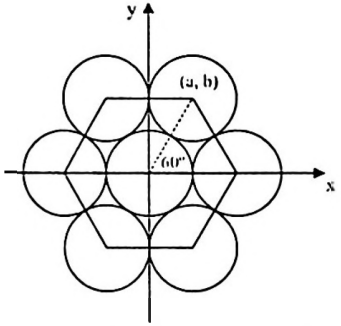
3) (UFRN-2006) Sete circunferências estão posicionadas conforme a figura ao lado. Se a equação da circunferência I é $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ e a da circunferência II é $x^2 - 4rx - y^2 + 3r^2 = 0$, então a equação da circunferência III é:



a) $x^2 - 2rx + y^2 - 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = 0$ b) $x^2 + 2rx + y^2 - 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = 0$

c) $x^2 + 2rx + y^2 + 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = 0$ d) $x^2 - 2rx + y^2 + 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = 0$

Solução:



A circunferência I possui centro em (0, 0) e raio r.

A circunferência II possui centro em (2r, 0) e raio r.

Assim, todas as circunferências possuem mesmo raio r e os centros das circunferências II, III, IV, V, VI e VII formam um hexágono regular.

Logo, o raio de III vale r.

Seja (a, b) o centro de III. Assim, a distância de (a, b) à origem é igual a 2r: $a^2 + b^2 = 4r^2$

Além disso, o segmento de reta que une o centro de III à origem forma um ângulo de 60° com o eixo x:

$$tg60° = \sqrt{3} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = 3a^2.$$

Portanto: $a^2 + b^2 = 4r^2 \Rightarrow 4a^2 = 4r^2 \Rightarrow a^2 = r^2 \Rightarrow a = \pm r$

Desde que (a, b) pertence ao 1° quadrante, tem-se que $a = r \Rightarrow b = \sqrt{3}r$

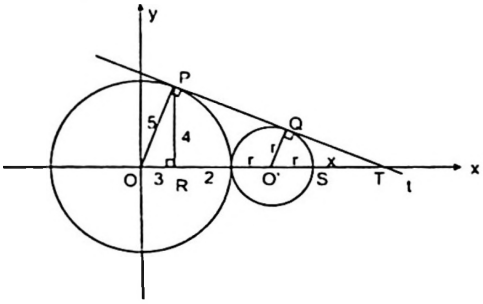
A circunferência III é dada por:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-r)^2 + (y-\sqrt{3}r)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2rx + r^2 + y^2 - 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = r^2 \Rightarrow$

$x^2 - 2rx + y^2 - 2\sqrt{3}ry + 3r^2 = 0$

4) (ITA-2005) Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto P = (3, 4). Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

Solução:



$OP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\Delta POR \sim \Delta QO'T$: $\frac{x+r}{r} = \frac{5}{3} \Rightarrow 2r = 3x \Rightarrow x = \frac{2}{3}r$ (I)

$\Delta POR \sim \Delta POT$: $\frac{x+2r+5}{5} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x + 6r = 10$ (II)

De (I) e (II): $r = \frac{5}{4}$. Portanto: $OO' = 5 + r = \frac{25}{4}$

Logo: C': $\left(x - \frac{25}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$

5) (ITA-2007) Considere, no plano cartesiano xy, duas circunferências C_1 e C_2, que se tangenciam exteriormente em P: (5, 10). O ponto Q: (10, 12) é o centro de C_1. Determine o raio da circunferência C_2, sabendo que ela tangencia a reta definida pela equação x = y.

Solução:

Como as circunferências são tangentes exteriormente, seus centros estão alinhados com o ponto de tangência e a distância entre eles é a soma dos raios.

O raio de C_1 é $R_1 = \sqrt{29}$. A reta $\overline{QP}$ é descrita pela equação $2x - 5y + 40 = 0$. Sendo Q'(a, b) o centro de C_2 e R_2 o seu raio, tem-se que:

$2a - 5b + 40 = 0$ (1)

$\sqrt{(a-10)^2 + (b-12)^2} = R_2 + \sqrt{29}$ (2)

Além disso, C_2 tangencia a reta x – y = 0. Logo: $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}} = R_2$ (3)

De (1) chega-se a $b = \frac{2a+40}{5}$ (4). Substituindo (4) em (3): $R_2 = \frac{|3a-40|}{5\sqrt{2}}$. Como é óbvio, a < 10. Então, $R_2 = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}}$ (5). Assim, da introdução de (4) e (5) em (2), obtém-se que:

$$\sqrt{(a-10)^2 + \left(\frac{2a-20}{5}\right)^2} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} + \sqrt{29} \Leftrightarrow \sqrt{(a-10)^2 + \frac{4}{25}(a-10)^2} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} + \sqrt{29} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{29(a-10)^2}{25}} - \sqrt{29} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} \overset{(a<10)}{\Leftrightarrow} \frac{(10-a)}{5}\sqrt{29} - \sqrt{29} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(5-a)\sqrt{29}}{5} = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{5\sqrt{58}-40}{\sqrt{58}-3}.$$

Enfim, utilizando (5):

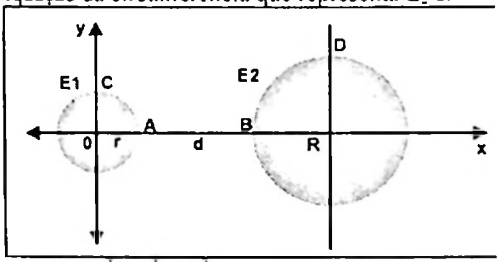
$$R_2 = \frac{40-3a}{5\sqrt{2}} = \frac{40-3\left(\frac{5\sqrt{58}-40}{\sqrt{58}-3}\right)}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{29}}{5\sqrt{2}\left(\sqrt{58}-3\right)} = \frac{5\sqrt{29}}{5\sqrt{2}\left(\sqrt{58}-3\right)} \cdot \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{58}+3\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{58}+3\right)} \Leftrightarrow$$

$$R_2 = \frac{5\left(29\sqrt{2}+3\sqrt{29}\right)}{49}$$

Exercícios

01) (UEPA-2008) Segundo a Revista VEJA de 03.10.07, o mundo dá sinais de que a paciência com o Irã está chegando ao fim. Rudolph Giuliani, candidato à presidência dos EUA, defende um ataque preventivo para evitar que o país se torne uma potência nuclear, pois o presidente do Irã declarou ser seu projeto riscar Israel do mapa. O material bélico do Irã é uma preocupação mundial. Seus mísseis têm um alcance considerável e um raio de ação de grande destruição. Um míssil foi lançado sobre uma região e devastou uma área de formato circular. O raio de ação desse míssil foi registrado por meio da equação $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. Esse raio, em km, mede:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

02) (UEPA-2011) A linha de produção tecnológica de uma famosa fábrica de bicicletas na Ásia, utiliza em suas pesquisas modelos matemáticos que visam ao aprimoramento do desempenho de seus produtos. A figura abaixo ilustra uma dessas pesquisas que busca aperfeiçoar as relações entre as duas engrenagens utilizadas para movimentar uma bicicleta. A engrenagem E_1, representada pela circunferência menor, está centrada no sistema de coordenadas cartesianas e tem raio "r". A engrenagem E_2, representada pela circunferência maior, está deslocada à direita e tem raio "R". Sabendo que a medida do segmento AB vale "d" e que o diâmetro de E_2 é $d + r$, a equação da circunferência que representa E_2 é:



a) $(x + 2R)^2 + y^2 = R^2$
b) $(x - R)^2 + y^2 = R^2$
c) $(x + 3R)^2 + y^2 = R^2$
d) $(x - 3R)^2 + y^2 = R^2$
e) $(x - 2R)^2 - y^2 = R^2$

03) (Ciaba-2006) O centro da circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 + 16x - 4y + 12 = 0$ é o ponto de coordenadas:
(A) (-8,2) (B) (-16,4) (C) (8,-2) (D) (4,-1)
(E) (16,-4)

04) (U. MACK-75) São dadas a reta r de equação $x + 2y - 1 = 0$ e a circunferência de equação $2x^2 + 2y^2 + 4x + 3/2 = 0$. A reta s passa pelo centro da circunferência e é perpendicular à reta r. A área do triângulo formado pelas retas r, s e o eixo OX é igual a:
a) 3/4 b) 4/5 c) 1 d) 4/3 e) 5/4

05) (Unicentro-2010) A equação $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0$ representa uma circunferência de centro C(a,b) e raio r. Nessas condições, o valor de $(a + b + r)$ é
(A) – 4. (B) – 2. (C) 0.
(D) 2. (E) 4

06) (Ciaba-2010) Dada a equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$, assinale a opção que apresenta a distância do centro da curva à origem do sistema de coordenadas
a) 5 b) 6 c) 8
d) $\sqrt{24}$ e) $\sqrt{29}$

07) (UEL-2010) Considere as retas $r : x + 2y - 4 = 0$, $s : 2x + y - 5 = 0$ e o círculo $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$. A reta que passa pelo centro do círculo e pela interseção das retas r e s é
a) $x - 3y - 2 = 0$ b) $x - y - 1 = 0$
c) $2x - y - 3 = 0$ d) $x + 3y - 7 = 0$
e) $x + 3y - 5 = 0$

08) (UECE-2009) Os pontos P = (p, 0) e Q = (0, q), com $0 < q < p$, são as extremidades de um diâmetro da circunferência $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. A equação da mediatriz do segmento PQ é
A) $3y + 4x + 25 = 0$. B) $3y + 4x - 25 = 0$.
C) $3y - 4x + 7 = 0$. D) $-3y + 4x + 7 = 0$.

09) (UECE-2009) O centro da circunferência $x^2 + 2x + y^2 = 1$ pertence à reta r e esta reta é perpendicular à reta $x + y = 8$. Um ponto pertencente à reta r é o ponto
A) (3, 5). B) (2, 4).
C) (3, 4). D) (5, -5).

10) (UECE-2008) A circunferência $x^2 + y^2 + px + qy + m = 0$ passa pelos pontos (-1, 4), (3, 4) e (3, 0). Se d é a distância do centro da circunferência ao ponto K(p, q), então o produto m.d é igual a
a) $3\sqrt{5}$ b) $-3\sqrt{5}$

c) $9\sqrt{5}$ d) $-9\sqrt{5}$

11) (FAESP-GFV-79) A equação da circunferência que passa pelos pontos (3, 3) e (-1, 3), e cujo centro está no eixo das abscissas é:
a) $x^2 + y^2 - 2x = 12$ d) $x^2 + y^2 + 4x = 46$
b) $x^2 + y^2 - 2y = 10$ e) $x^2 + y^2 = 1$
c) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

12) (FGV-2008) Dada a equação $x^2 + y^2 = 14x - 6y - 6$, se p é o maior valor possível de x, e q é o maior valor possível de y, então, $3p + 4q$ é igual a
A) 73. B) 76. C) 85.
D) 89. E) 92.

13) (UECE-2007) O ponto P, que é o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, pertence à reta cuja equação é $x - 2y + c = 0$. O valor de c é
A) 3 B) 5 C) 7 D) 9

14) (UFLA-2003) Considere uma circunferência que é expressa pela equação
$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 1$$
O ponto dessa circunferência que possui ordenada máxima apresenta os seguintes valores de coordenadas:
a) (-5, 5) b) (5, -5)
c) (4, 5) d) (-5, 4)
e) (4, -4)

15) (Unicentro-2010) A reta s intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 4) e é paralela à reta r de equação $3y - 2x + 5 = 0$. Os pontos onde a reta s intercepta os eixos coordenados são os extremos de um dos diâmetros de uma circunferência cuja equação é dada por
a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.
b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$.
c) $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$.
d) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$.
e) $x^2 + y^2 = 13$.

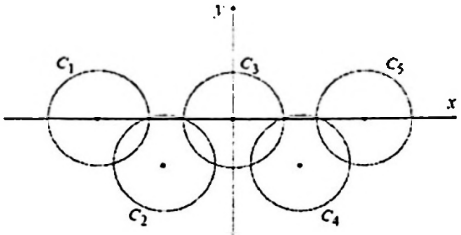
16) (Unicentro-2011) Considerando-se $3x + 2y - 1 = 0$ e $2x - 3y + 8 = 0$ equações cartesianas das retas suportes das diagonais de um quadrado que tem um dos vértices no ponto P (3, − 1), pode-se afirmar que uma equação cartesiana da circunferência circunscrita a esse quadrado é
A) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$
B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$
C) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$
D) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
E) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

17) (Fuvest-98) Um quadrado está inscrito numa circunferência de centro (1, 2). Um dos vértices do quadrado é o ponto (-3, -1). Determine os outros três vértices do quadrado.

18) (Fuvest-2002) Os pontos A = (0, 0) e B = (3, 0) são vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD situado no primeiro quadrante. O lado AD é perpendicular à reta $y = -2x$ e o ponto D pertence à circunferência de centro na origem e raio 5. Então, as coordenadas de C são:
a) (6, 2) b) (6, 1) c) (5, 3)
d) (5, 2) e) (5, 1)

19) (UEM-2010) Considerando, em um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas xOy, a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$, o quadrado Q de lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito na circunferência C, e a unidade de medida padrão em cada eixo como sendo o centímetro (cm), assinale o que for correto.
01) A circunferência C é centrada no ponto H = (−1,1) e possui diâmetro medindo $4\sqrt{2}$ cm.
02) O quadrado Q tem lados medindo $\sqrt{8}$ cm.
04) As retas que contêm as diagonais do quadrado Q têm equações $y = -x$ e $y = x + 2$.
08) A reta r de equação $y = 5x - 2$ contém o centro da circunferência C.
16) O triângulo de vértices A = (2,0) , B = (6,0) e C = (6,4) é congruente ao triângulo UVW, em que U, V e W são três vértices do quadrado Q.

20) (UEM-2009) A figura abaixo ilustra o símbolo olímpico representado em um sistema de coordenadas artesianas ortogonais.



As cinco circunferências C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5 têm todas raios iguais a 3cm. C_3 é centrada na origem do sistema e C_1 e C_5 têm os centros no eixo das abscissas eqüidistantes da origem. Os centros de

C_2 e C_4 têm mesma ordenada negativa e situam-se a $2\sqrt{6}$ cm da origem. As circunferências C_2 e C_3 interceptam-se em dois pontos, sendo um deles de coordenadas (−3, 0) . Com relação ao exposto, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

01) A equação reduzida da circunferência C_2 é $(x + 4)^2 + (y + 2\sqrt{2})^2 = 9$.

02) Os centros de C_2 e C_4 estão a $2\sqrt{2}$ cm do eixo das ordenadas.

04) O par de coordenadas de um dos pontos de interseção das circunferências C_3 e C_4 é $(3, -2\sqrt{2})$.

08) O ponto de coordenadas $(-10, \sqrt{5})$ pertence a uma das circunferências do símbolo olímpico.

16) A circunferência C_5 pode ser descrita pela equação $x^2 - 16x + y^2 + 54 = 0$.

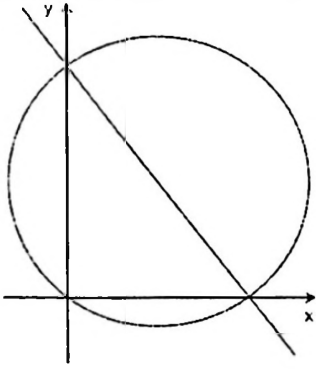
21) (UFPE-2009) Qual a maior distância entre um ponto da circunferência com equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ e a origem do sistema de coordenadas?

a) $(\sqrt{13} + 1)/2$ b) $\sqrt{13} + 1$

c) $\sqrt{\sqrt{13} + 1}$ d) $\sqrt{\sqrt{13} - 1}$

e) 2,15

22) (UFPE-2012) Uma circunferência está circunscrita ao triângulo com lados sobre as retas com equações x = 0, y = 0 e 4x + 3y = 24, conforme a ilustração abaixo. Encontre a equação da circunferência e indique a soma das coordenadas de seu centro e de seu raio.



23) (UEPB-2011) Uma corda AB da circunferência de equação $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16$ tem ponto médio (6,7). Se α é o ângulo que a reta suporte de AB forma com o eixo x, então tgα é:

a) 2 c) − 1/2 e) −1

b) 1 d) −2

24) (IBMEC-2006) A diferença (numérica) entre a área e o perímetro de uma circunferência é 3π. Se o centro desta circunferência é o ponto (2, 3), então sua equação é

a) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

c) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$.

b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

d) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

e) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$.

25) (UFPR-2010) Qual das seguintes retas passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 + 4y - 3 = 0$?

a) x + 2y = 4. b) 5x − y = 2.

c) x + y = 0. d) x − 5y = −2.

e) 2x + y = 7.

26) (EAESP-GFV-79) Dada a circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ e a reta y = mx, assinale a expressão verdadeira:

a) Para m > 5/12 a reta não cortará a circunferência.

b) Para m = 5/12 a reta corta a circunferência em dois pontos distintos.

c) A reta x = 0 não tem ponto em comum com a circunferência

d) A reta y = 9 é tangente à circunferência .

e) A reta 12y − 5x = 0 é tangente à circunferência.

27) (UFPB-96) A reta 3x + 4y + 11 = 0 é tangente à circunferência que tem centro no ponto (1, −1). Determine a equação dessa circunferência.

28) (UFPA-98) Escreva a equação da reta tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 15 = 0$, no ponto (3, − 2).

29) (UFRJ-92) As retas y = − x + 2 e y = − x + 6 são tangentes a uma circunferência cujo centro está sobre a reta y = x. Determine a equação da circunferência.

30) (UFC-98) Demonstre que os pontos médios de todos os segmentos de 6 cm de comprimento, que têm uma das extremidades sobre o eixo X e a outra sobre o eixo Y, pertencem a uma circunferência.

31) (UFU-99) Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo formado pelas retas, cujas equações são y = 0, $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

32) (FGV-2009) Uma circunferência de raio 3, situada no 1º quadrante do plano cartesiano, é tangente ao eixo y e à reta de equação y = x. Então, a ordenada do centro dessa circunferência vale:

A) $3\sqrt{2} - 1$ D) $2\sqrt{3} + 3$

B) $2\sqrt{3} + 1$ E) $3\sqrt{2} + 3$

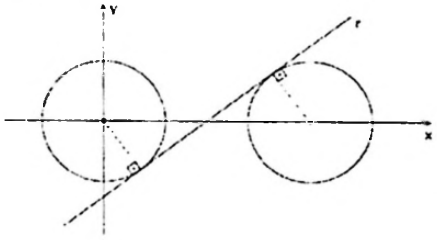
C) $3\sqrt{2} + 2$

33) (FEI-2008) Num sistema cartesiano ortogonal Oxy, considere a circunferência de centro C=(1,2) e raio r=3m. Pelo ponto A=(4,6) traçam-se duas retas tangentes à circunferência dada, as quais tangenciam a mesma nos pontos P e Q. Assim, a área do quadrilátero APCQ é, em m^2:

(A) 6π (B) 6 (C) 12π

(D) 12 (E) 9

34) (IBMEC-2006) Na figura, a reta r é tangente às duas circunferências, de equações $x^2 + y^2 = 16$ e $(x - 17)^2 + y^2 = 16$.



Então, o coeficiente angular da reta r é igual a:

a) 3/4 b) 7/10 c) 5/13

d) 8/15 e) 7/25

35) (IBMEC-2007) Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. Sejam P o ponto de coordenadas (1; 0) e Q o ponto do primeiro quadrante dado pela intersecção da reta $y = \sqrt{3}x$ com esta circunferência, no plano cartesiano. A equação de uma reta paralela ao segmento PQ que é tangente à circunferência é

a) $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$ d) $y = -\sqrt{3}x + 2$

e) $y = \sqrt{3}x + 2$

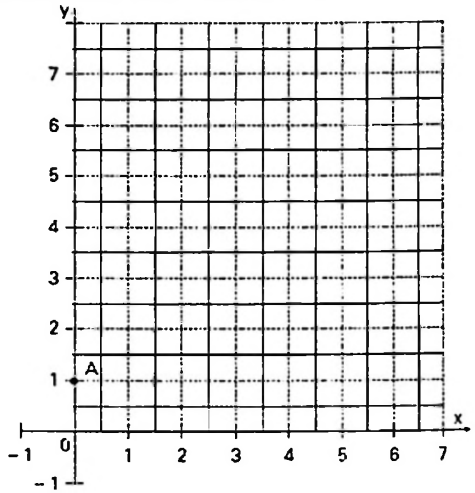
36) (IBMEC-2008) Dado um número real α, considere a reta e a circunferência do plano cartesiano dadas pelas equações a seguir.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \\ \alpha x - y = 0 \end{cases}$$

a) Determine o intervalo de valores de α para os quais a reta e a circunferência têm dois pontos distintos em comum.

b) Determine o valor de α para o qual a distância entre os dois pontos comuns à reta e à circunferência é a maior possível.

37) (IBMEC-2011) Num show de patinação no gelo, o casal que se apresenta está inicialmente sobre o ponto A indicado na figura.

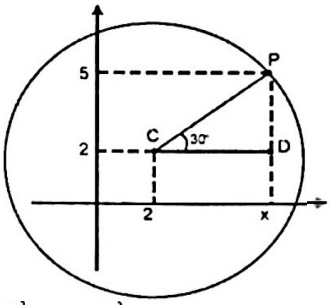


Ambos partem de A ao mesmo tempo, o rapaz sobre a reta de equação y = 1 + 0,5x e a moça sobre a reta de equação y = 1 + 2x, os dois no sentido dos valores positivos de x e y. Com velocidade maior, o rapaz se desloca sobre a reta até chegar no ponto de tangência de sua trajetória com a circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 5$. A partir daí, ele passa a patinar sobre o perímetro desta circunferência, a caminho do ponto em que sua nova trajetória tangencia a reta sobre a qual patina a sua parceira, onde ambos se encontram novamente. Neste plano cartesiano, a distância que foi percorrida pela moça nesta performance foi

a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{6}$ e) $3\sqrt{6}$

38) (UCPel-2010) Na figura abaixo, tem-se: uma circunferência de centro C, o ponto P, o ponto D e o ângulo PCD que vale 30°. Então a equação da circunferência é



(A) $(x-2)^2+(y-2)^2=36$
(B) $(x+2)^2+(y+2)^2=36$
(C) $(x-2)^2+(y-2)^2=16$
(D) $(x+2)^2+(y+2)^2=16$
(E) $(x+2)^2+(y-2)^2=25$

39) (UECE-2010) No sistema usual de coordenadas cartesianas, a equação da circunferência inscrita no quadrado representado pela equação $|x|+|y|=1$ é
A) $2x^2+2y^2+1=0$.
B) $x^2+y^2-1=0$.
C) $2x^2+2y^2-1=0$.
D) $x^2+y^2-2=0$.

40) (UFRR-2004) As retas r_1 e r_2 tangenciam a circunferência com centro na origem e raio 5 nos pontos $P_1 = (-4, 3)$ e $P_2 = (-4, -3)$, respectivamente. Se $Q = (a,b)$ é o ponto de interseção das retas r_1 e r_2, pode-se afirmar que a soma $a + b$ é igual a:
a) −25; b) −25/2; c) −25/4;
d) 0; e) 25/2.

41) (UECE-2008) A soma das coordenadas do centro da circunferência que tem raio medindo 1 u.c., que
está situada no primeiro quadrante e que tangencia o eixo dos y e a reta $4x - 3y = 0$, é
A) 3 u.c. B) 5 u.c.
C) 4 u.c. D) 6 u.c.

42) (UECE-2007) As circunferências C_1 e C_2 são as duas circunferências no primeiro quadrante que são tangentes aos eixos coordenados e à reta $x + y - 3 = 0$. A distância entre os centros de C_1 e C_2, em unidades de comprimento (u.c.), é:
A) 3 u.c. B) 6 u.c.
C) 9 u.c. D) 12 u.c.

43) (UECE-2007) A equação da circunferência cujo centro é o ponto (5, 1) e que é tangente à reta $4x - 3y - 2 = 0$, é
A) $x^2+y^2+10x+2y+26=0$
B) $x^2+y^2-10x-2y+17=0$
C) $x^2+y^2+2x+10y-26=0$
D) $x^2+y^2-2x-10y-17=0$

44) (UEFS-2010) Os pontos A = (− 4, 0), B = (0, 2) e C são vértices de um triângulo. A área do maior triângulo que se pode obter, considerando C um ponto da circunferência de centro na origem e raio $r = \sqrt{5}$ u.c., é igual, em u.a., a
A) 9 C) 15 E) 21
B) 12 D) 18

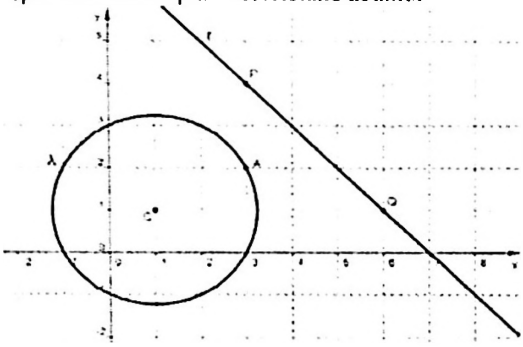
45) (UEPB-2009) Os valores de k para os quais o ponto (k, −2) seja exterior à circunferência $x^2+y^2-4x+6y+8=0$, são:
a) $k < 0$ ou $k > 4$ d) $k \geq 3$
b) $0 < k < 4$ e) $k \leq 1$
c) $0 \leq k \leq 3$

46) (UERN-2010) O menor valor da constante k, para que a reta de equação $2x - y + k = 0$ seja tangente à circunferência de equação $x^2+y^2+2x-4y=0$, pertence ao conjunto
01) [1, 9[02)]1, 9]
03) $]-\infty, -1[$ 04) $]-\infty, -1]$

47) (UESC-2010) O triângulo retângulo ABC, cuja hipotenusa é AC, está inscrito na circunferência de equação $x^2+y^2-8x-6y+12=0$. Sabendo-se que, o vértice A tem coordenadas (1, 5), pode-se afirmar que as coordenadas do vértice C são
01) (2, 1) 02) (2, 5) 03) (2, 6)
04) (6, 6) 05) (7, 1)

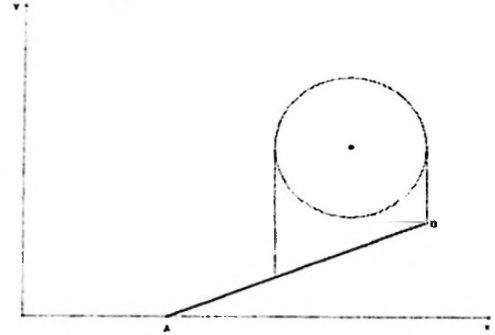
48) (UFC-2003) O segmento que une os pontos de interseção da reta $2x + y - 4 = 0$ com os eixos coordenados determina um diâmetro de uma circunferência. A equação dessa circunferência é:
A) $(x-1)^2+(y-2)^2=5$
B) $(x-1)^2+(y-2)^2=20$
C) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$
D) $(x+1)^2+(y+2)^2=5$
E) $(x+1)^2+(y+2)^2=20$

49) (UFJF-2010) Considere a reta r determinada pelos pontos P e Q e a circunferência λ, de centro C, que passa pelo ponto A, conforme representados no plano cartesiano abaixo.



Determine a equação da reta s, perpendicular à reta r, tangente à circunferência λ e que contém pontos do 2º quadrante.

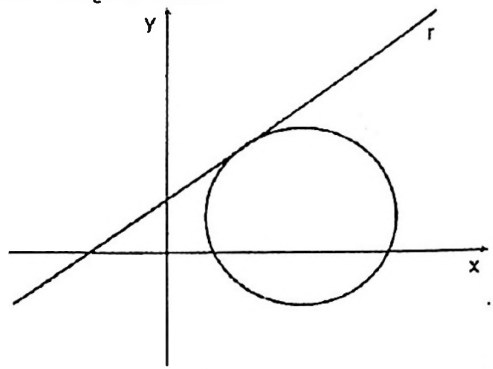
50) (UFJF-2009) Uma haste está sendo sustentada por um fio de 5,93 cm de comprimento. Esse fio encontra-se tensionado e apoiado em uma roldana em forma de circunferência cuja equação é $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 33 = 0$. As partes do fio que não se encontram em contato com a roldana são paralelas ao eixo y. A ordenada da extremidade B da haste é 2,14 cm. Veja a ilustração abaixo.



a) Determine as coordenadas do centro e o raio da roldana.
b) A extremidade A da haste encontra-se sobre o eixo x. Encontre a abscissa do ponto A.
(Use a aproximação 3,14 para π)

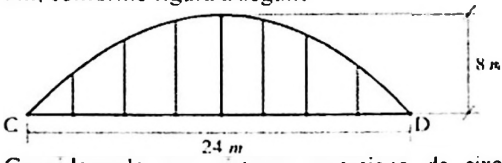
51) (UFAM-2013) Considerando π = 3 , a área da região formada pelos pontos do plano tais que $y - x \leq -2$ e $x^2 + y^2 \leq 4$ é igual a:
a) 1 b) 2 c) 6 d) 10 e) 11

52) (UFRGS-2013) Um círculo tangencia a reta r, como na figura abaixo.



O centro do círculo é o ponto (7, 2) e a reta r é definida pela equação 3x – 4y + 12 = 0. A equação do círculo é
a) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 25$
b) $(x + 7)^2 + (y + 2)^2 = 25$
c) $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 36$
d) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 36$
e) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 36$

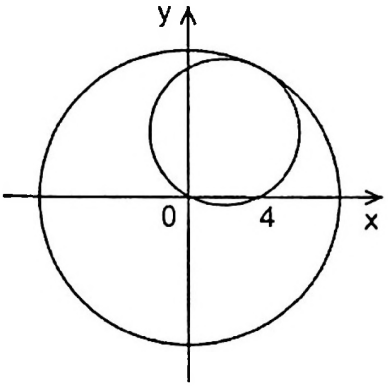
53) (UFPB-2011) O Governo pretende construir armazéns com o intuito de estocar parte da produção da safra de grãos, de modo que não haja desperdícios por situações adversas. A seção transversal da cobertura de um desses armazéns tem a forma de um arco de circunferência, apoiado em colunas de sustentação que estão sobre uma viga. O comprimento dessa viga é de 24m e o comprimento da maior coluna de sustentação é de 8m, conforme figura a seguir.



Considerando um sistema cartesiano de eixos ortogonais xy, com origem no ponto C, de modo que o semieixo x positivo esteja na direção CD e o semieixo y positivo apontando para cima, é correto afirmar que a equação da circunferência que contém o arco CD da seção transversal do telhado, com relação ao sistema de eixos xy, é dada por:
a) $(x - 12)^2 + (y + 5)^2 = 169$
b) $(x - 12)^2 + (y - 7)^2 = 193$

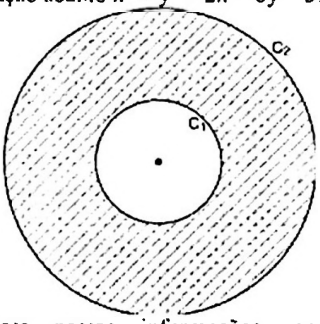
c) $(x-12)^2 + (y-6)^2 = 180$
d) $(x-12)^2 + (y+6)^2 = 180$
e) $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$

54) (UFPE-2013) Uma circunferência tem centro no primeiro quadrante, passa pelos pontos com coordenadas (0, 0) e (4, 0) e é tangente, internamente, à circunferência com equação $x^2 + y^2 = 64$. Abaixo, estão ilustradas as duas circunferências.



Indique o inteiro mais próximo da soma das coordenadas do ponto de interseção das duas circunferências.

55) (UFPel-2007) Observe na gravura, duas circunferências concêntricas C_1 e C_2. A circunferência menor C_1 delimita um círculo de área igual a 8π cm², e a maior C_2 é representada pela equação abaixo $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 39 = 0$.



Com base nessas informações, analise as afirmativas abaixo, marcando (V), quando a afirmativa for verdadeira, e (F), quando for falsa.

( ) A circunferência menor C_1 pode ser representada pela equação $2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$.

( ) A área da região hachurada é 41π cm².

( ) O centro das circunferências é o ponto (1, – 3).

A alternativa que apresenta a seqüência correta é

(a) V – V – V.
(b) F – V – V.
(c) V – F – V.
(d) F – F – F.
(e) V – V – F.

56) (UFPR-2007) Para cada valor positivo de R, a equação $(x-2)^2 + (y+2)^2 = R^2$ representa uma circunferência no plano cartesiano.

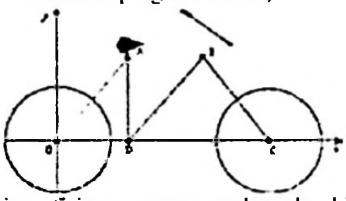
Acerca disso, considere as afirmativas a seguir:

1. Quando R = 2, a circunferência tangencia os eixos coordenados.
2. Se a origem pertence à circunferência, então $R = 2\sqrt{2}$
3. A reta de equação $4y + 3x = 0$ intersecta a circunferência, qualquer que seja o valor atribuído a R.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
b) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
c) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
d) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
e) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

57) (UNB/PAS Subprograma-2005)



Exercícios físicos, como andar de bicicleta, contribuem para a prevenção de doenças cardiovasculares. A figura acima apresenta, no plano cartesiano xOy, um esquema simplificado de uma bicicleta. Nesse esquema, as rodas são circunferências de mesmo raio, com centros na origem O e no ponto C, como indicados. Os pontos P = (14, 3) e Q = (15, 4) estão localizados na circunferência que representa uma das rodas. O trapézio OABC é isósceles; o segmento AB é paralelo ao eixo Ox; o segmento AD é perpendicular ao eixo Ox; e os segmentos OA e DB são paralelos entre si.

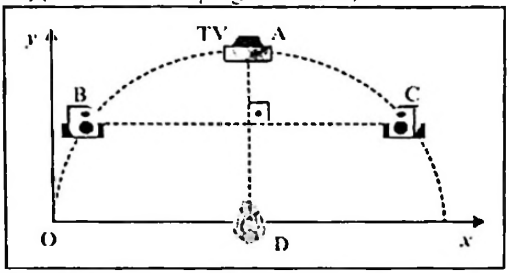
Com base nas informações do texto I, julgue os itens subseqüentes.

(1) A reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular à reta de equação $2y + 4x = 6$.

(2) A equação da circunferência com centro na origem do sistema xOy pode ser expressa por $x^2 + y^2 = 36$.

(3) Se a ordenada do ponto B for igual a 7, então a equação da reta que passa pelos pontos O e A é $6y = 7x$.

58) (UNB PAS Subprograma-2006)



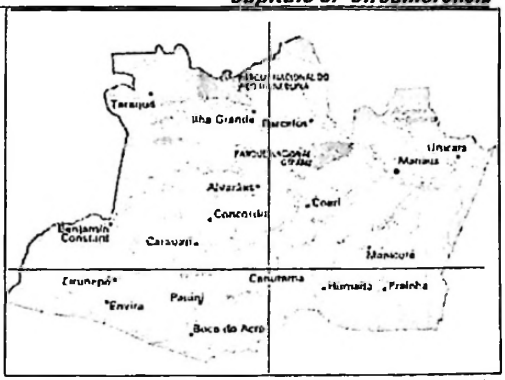
Considere que o diagrama da figura acima represente o posicionamento ideal de uma TV — indicada pelo ponto A — e de duas caixas de som — indicadas pelos pontos B e C —, em relação ao telespectador — indicado pelo ponto D —, tendo em vista a obtenção do melhor desempenho de um home theater. Nessa figura, apresenta-se, igualmente, um sistema de coordenadas cartesianas xOy, em que a unidade é o metro. Os pontos de A e C estão sobre uma circunferência de raio igual a 4 m e centro, em D, de coordenadas (4, 0). Considere que as coordenadas cartesianas da posição da caixa de som que se encontra no ponto B sejam $(1, y_B)$. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

(1) Nesse diagrama, a distância entre a TV e a caixa de som posicionada em B é superior a 3 metros.

(2) O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos onde estão posicionadas a TV e a caixa de som C é inferior a −0.6.

(3) A reta que passa pelos pontos onde estão posicionadas a caixa de som B e a TV é paralela à reta que passa pelos pontos onde estão posicionados a caixa de som C e o telespectador.

59) (UNB-2006) O transporte de urnas eletrônicas para locais de difícil acesso, como é o caso do estado do Amazonas, exige um estudo de viabilidade de rotas. Considere que, na figura acima, que ilustra o mapa do estado do Amazonas, tenha sido inserido um sistema de eixos cartesianos xOy, com origem na cidade de Canutama. Considere também as coordenadas das seguintes cidades: Canutama = (0, 0), Manaus = (6, 6), Humaitá = (2, - 1), Envira = (- 7, - 2), Manicoré = (5, 1), Taraquá = (- 6, 9). A partir dessas informações, julgue os itens a seguir.



(1) Considere que uma urna deva ser levada de Humaitá para Manicoré, de avião, em linha reta. Nesse caso, o trajeto da aeronave deverá ser paralelo à reta que passa por Manaus e é descrita pela equação $\frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 1$.

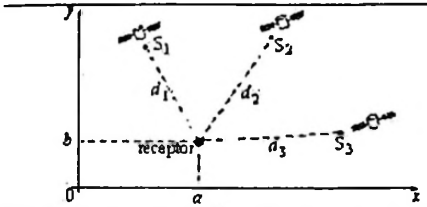
(2) Considere que as cidades de Carauari, Canutama e Humaitá estejam sobre uma mesma reta e que a distância entre Carauari e Canutama seja o dobro da distância entre Canutama e Humaitá. Então, as coordenadas (a, b) de Carauari são tais que $a \times b = -10$.

(3) Considere que o ponto (c, d), correspondente à cidade de Coari, esteja na interseção da reta que passa por Manaus e Envira com a reta que passa por Manicoré e Taraquá. Nessa situação, tem-se $c + d > 5$.

(4) Suponha que as cidades de Manaus e Barcelos estejam nos pontos extremos de um arco de circunferência cujo centro esteja na origem do sistema de coordenadas e cujo ângulo central seja igual a $\pi/6$ rad. Considerando que, no sistema de coordenadas mencionado, a unidade de medida em cada eixo coordenado corresponda a 100 km, então, um avião que saia de Manaus a uma velocidade constante e igual a 500 km/h levando urnas de Manaus para Barcelos e seguindo a trajetória coincidente com o arco de circunferência mencionado percorrerá esse trecho em mais de uma hora.

(5) A cidade de Taraquá está no exterior do círculo descrito pela equação $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 31 = 0$.

60) (UNB-2006)



Considere que os satélites S_1, S_2 e S_3 do sistema GPS mencionado no texto estejam, em determinado instante, nas posições (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) do plano xOy, respectivamente, conforme ilustra a figura acima. Considerando ainda que um receptor esteja na posição (a, b), que deve ser determinada a partir das distâncias d_1, d_2 e d_3 indicadas na figura acima, julgue os itens que se seguem.

145 Conhecendo-se apenas as posições dos satélites S_1 e S_2 e as distâncias d_1 e d_2, não é possível determinar de forma inequívoca a posição do receptor.

146 Se $(x_1, y_1) = (3, 1)$ e $(x_2, y_2) = (5, 5)$, então a equação da reta que passa por esses pontos é $y + 2x + 5 = 0$.

147 Supondo que (x_1, y_1) seja um ponto da reta de equação $2y - x = 4$, (x_2, y_2), um ponto da reta de equação $3y - 2x = 5$ e que o receptor esteja na interseção dessas duas retas, então $a + b = 5$.

148 Considerando $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (3, 2)$ e $(x_3, y_3) = (4, 0)$, então o triângulo com vértices nesses três pontos é retângulo.

149 Considerando que (x_1, y_1) seja o ponto de tangência da reta $y + x - 8 = 0$ com a circunferência de centro $(1, -1)$ e raio igual a $4\sqrt{2}$, então $x_1 \times y_1 = 15$.

150 Considere que as posições dos referidos satélites sejam $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 1)$ e $(x_3, y_3) = (3, 1)$ e que $d_1 = d_2 = 1$ e $d_3 = \sqrt{5}$. Então $a - b = 1$.

61) (Unemat-2010) Dada uma circunferência de centro C(3; 1) e raio r = 5 e, seja o ponto P(0; a), com $a \in \mathbb{R}$, é correto afirmar.

a. Se $-3 < a < 5$, então P é externo à circunferência.

b. Se $-3 < a < 5$, então P é pertence à circunferência.

c. Se $a = 5$ ou $a = -3$, então P é interno à circunferência.

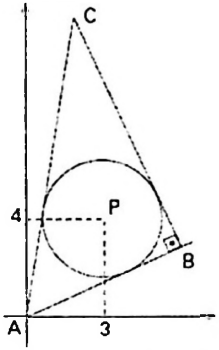
d. Se $a < -3$ ou $a > 5$, então P é externo à circunferência.

e. Se $a < -3$ ou $a > 5$, então P é interno à circunferência.

62) (Fuvest-2003) a) A reta r passa pela origem do plano cartesiano e tem coeficiente angular $m > 0$. A circunferência C passa pelos pontos (1, 0) e (3, 0) e tem centro no eixo x. Para qual valor de m a reta r é tangente a C?

b) Suponha agora que o valor de m seja menor que aquele determinado no item anterior. Calcule a área do triângulo determinado pelo centro de C e pelos pontos de interseção de r com C.

63) (Fuvest-2004) Na figura abaixo, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo $\hat{B}$ o ângulo reto.



Sabendo-se que A = (0, 0), B pertence à reta $x - 2y = 0$ e P = (3, 4) é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas

a) do vértice B.

b) do vértice C.

64) (Fuvest-2008) São dados, no plano cartesiano de origem O, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$, o ponto $P = \left(1, \sqrt{3}\right)$ e a reta s que passa por P e é paralela ao eixo y. Seja E o ponto de ordenada positiva em que a reta s intercepta a circunferência.

Assim sendo, determine

a) a reta tangente à circunferência no ponto E.

b) o ponto de encontro das alturas do triângulo OPE.

65) (Fuvest-2009) No plano cartesiano Oxy, a circunferência C tem centro no ponto A = (−5, 1) e é tangente à reta t de equação $4x - 3y - 2 = 0$ em um ponto P. Seja ainda Q o ponto de interseção da reta t com o eixo Ox.

Assim:

a) Determine as coordenadas do ponto P.

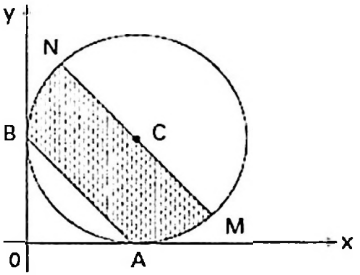
b) Escreva uma equação para a circunferência C.
c) Calcule a área do triângulo APQ.

66) (Fuvest-2011) No plano cartesiano, os pontos (0, 3) e (−1, 0) pertencem à circunferência C. Uma outra circunferência, de centro em (−1/2, 4), é tangente a C no ponto(0, 3). Então, o raio de C vale

a) $\frac{\sqrt{5}}{8}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ e) $\sqrt{5}$

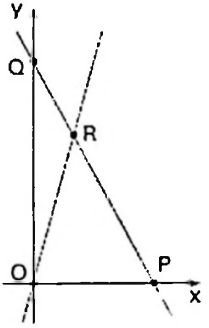
67) (Fuvest-2008) A circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ é tangente aos eixos coordenados x e y nos pontos A e B, conforme a figura. O segmento MN é paralelo ao segmento AB e contém o centro C da circunferência. É correto afirmar que a área da região hachurada vale



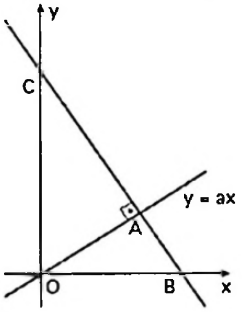
a) π − 2 d) π − 6
b) π + 2 e) π + 8
c) π + 4

68) (Unicamp-97) Os ciclistas A e B partem do ponto P(− 1, 1) no mesmo instante e com velocidades de módulos constantes. O ciclista A segue a trajetória descrita pela equação $4y - 3x - 7 = 0$ e o ciclista B, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano e a unidade de medida de comprimento é o km. Pergunta-se:
a) Quais as coordenadas do ponto Q, distinto de P, onde haverá cruzamento das duas trajetórias?
b) Se a velocidade do ciclista A for de 20 km/h, qual deverá ser a velocidade do ciclista B para que cheguem no mesmo instante ao ponto Q?

69) (Unicamp-2008) As retas de equações y = ax + b e y = cx são ilustradas na figura abaixo. Sabendo que o coeficiente b é igual à média aritmética dos coeficientes a e c,
a) expresse as coordenadas dos pontos P, Q e R em termos dos coeficientes a e b;
b) determine a, b e c sabendo que a área do triângulo OPR é o dobro da área do triângulo ORQ e que o triângulo OPQ tem área 1.



70) (Unicamp-2010) No desenho abaixo, a reta y = ax (a > 0) e a reta que passa por B e C são perpendiculares, interceptando-se em A. Supondo que B é o ponto (2, 0), resolva as questões abaixo.



a) Determine as coordenadas do ponto C em função de a.
b) Supondo, agora, que a = 3, determine as coordenadas do ponto A e a equação da circunferência com centro em A e tangente ao eixo x.

71) (Unicamp-2012) Um círculo de raio 2 foi apoiado sobre as retas y = 2x e y = − x/2, conforme mostra a figura ao lado.
a) Determine as coordenadas do ponto de tangência entre o círculo e a reta y = − x/2
b) Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto C, centro do círculo.

72) (Ciaba-95) As circunferências C_1 e C_2 de equações $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$ e $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 12 = 0$ são tais que:
a) C_2 é tangente interior a C_1
b) C_1 e C_2 são tangentes exteriores
c) C_1 e C_2 são concêntricas
d) C_1 e C_2 são secantes
e) C_2 é interior a C_1

73) (Ciaba-95) Considere uma circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = (r + a)(r - a) - b^2$ e um ponto exterior (c, d). O comprimento das tangentes tiradas do ponto à circunferência é:
a) $a - c + b - d - r$
b) $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2 - r^2}$
c) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - r^2}$
d) $\sqrt{a^2 + b^2 - (c+d)^2 + r^2}$
e) $r + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

74) (Ciaba-2003) A interseção da reta $y + x - 1 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$ determina uma corda cujo comprimento é:
a) 7 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{5}$ e) 6

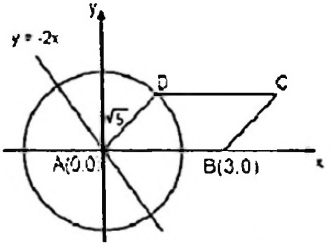
75) (Ciaba-2003) Dados os pontos $A\ (2, 3)$, $B\ (-1, 2)$ e $C\ (0, 3)$ determine suas posições em relação à circunferência $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$
(a) $A\ (2, 3)$, *interior*
$B\ (-1, 2) \in$ *à circunferência*
$C\ (0, 3)$, *exterior*
(b) $A\ (2, 3)$, *interior*
$B\ (-1, 2)$, *exterior*
$C\ (0, 3) \in$ *à circunferência*
(c) $A\ (2, 3) \in$ *à circunferência*
$B\ (-1, 2)$, *interior*
$C\ (0, 3)$, *exterior*
(d) $A\ (2, 3)$, *exterior*
$B\ (-1, 2)$, *interior*
$C\ (0, 3) \in$ *à circunferência*
(e) $A\ (2, 3) \in$ *à circunferência*
$B\ (-1, 2)$, *exterior*
$C\ (0, 3)$, *interior*

76) (Ciaba-2007) Uma embarcação destinada à pesca deparou-se com a situação de homem ao mar (DHM), iniciando rapidamente uma manobra de resgate, cuja trajetória é dada pela função $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$. A razão da área varrida e o comprimento da manobra é:
a) 1,0 b) 1,5 c) 2,0
d) 2,5 e) 3,0

77) (Ciaba-2011) A circunferência de equação $(x - \sqrt{4 + 2\sqrt{2}})^2 + (y + (1 + \sqrt{2}))^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ intercepta o eixo das abscissas em dois pontos A e B. Sabendo que o segmento AB é o lado de um polígono regular convexo que possui centro coincidente com o centro da circunferência, calcule o perímetro desse polígono.
a) 24 b) 16 c) 15
d) $6(\sqrt{2}+1)$ e) $6(\sqrt{2}+2)$

78) (Ciaba-2012) Se 0 é o menor ângulo formado pelas retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 9$ nos pontos $P = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $Q = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ então o valor de 0, em radianos é:
a) $\pi/12$ b) $\pi/6$ c) $\pi/4$
d) $5\pi/12$ e) $7\pi/12$

79) (AFA-2004) Os pontos A (0,0) e B (3,0) são vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD situado no primeiro quadrante. O lado AD é perpendicular a reta $y = -2x$ e o ponto D pertence a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$. Então, a diagonal AC mede

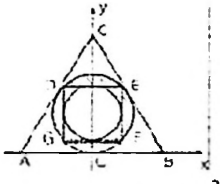


a) $\sqrt{38}$ b) $\sqrt{37}$ c) $\sqrt{34}$ d) $\sqrt{26}$

80) (AFA-2005) Considere duas circunferências de mesmo raio, sendo $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ a equação da primeira e $C_2(4,2)$, o centro da segunda. Se a reta s contém uma corda comum a ambas circunferências, é **FALSO** que s
a) é perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares.

b) tem declividade positiva.
c) admite equação na forma segmentária.
d) tem coeficiente linear nulo.

81) (AFA-2006) Um cursinho tem representado na figura abaixo o seu logotipo que é contornado por um triângulo equilátero ABC, cujo baricentro é o ponto P $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. No interior desse3 triângulo há o quadrado DEFG inscrito na circunferência λ_1 e, ao mesmo tempo, circunscrito à circunferência λ_2. Considerando os dados acima, classifique as alternativas abaixo em (V) verdadeira(s) ou (F) falsa(s).



( ) A equação geral de λ_1 é $x^2 + y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$.

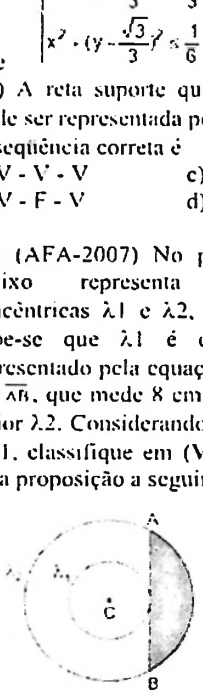
( ) A coroa circular sombreada na figura pode ser representada pelo conjunto de pontos Q (x, y), tais que $\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \\ x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{6} \end{cases}$

( ) A reta suporte que contém o segmento BC pode ser representada por $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

A seqüência correta é

a) V - V - V
b) V - F - V
c) F - V - V
d) V - V – F

82) (AFA-2007) No plano cartesiano, a figura abaixo representa duas circunferências concêntricas $\lambda 1$ e $\lambda 2$, cujo centro é o ponto C. Sabe-se que $\lambda 1$ é contorno de um círculo representado pela equação $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 4$ e que $\overline{AB}$, que mede 8 cm, é corda da circunferência maior $\lambda 2$. Considerando também que $\overline{AB}$ é tangente a $\lambda 1$, classifique em (V) verdadeira ou (F) falsa, cada proposição a seguir.

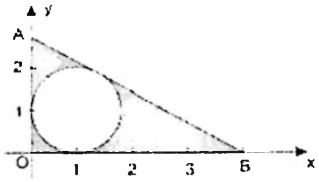


( ) $\lambda 1$ é tangente ao eixo das abscissas.
( ) A soma das coordenadas de A e B é um número maior que 5.
( ) A região sombreada é representada por $\begin{cases} x \geq 3 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 20 \end{cases}$
( ) A reta (t) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}$ é perpendicular à reta que passa pelos pontos A e C.

A seqüência correta é

a) F – V – V – F
b) V – V – F – F
c) V – F – F – V
d) V – F – V – V

83) (AFA-2007) Seja λ uma circunferência inscrita em um triângulo retângulo AOB cujos catetos estão sobre os eixos cartesianos e medem 3 cm e 4 cm, conforme a figura abaixo.



É **INCORRETO** afirmar que

a) o ponto de λ mais próximo da origem tem a soma coordenadas igual a $2 - \sqrt{2}$
b) a área da região sombreada é menor que 3 cm^2
c) a região sombreada é definida por $\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 3x + 4y \leq 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \end{cases}$
d) o conjunto de pontos do plano cartesiano eqüidistantes de A e B é representado por $8x - 6y - 7 = 0$

84) (AFA-2008) A circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + k = 0$ passa pelo ponto A(0, 1). Sabendo-se que o ponto P de (λ) mais próximo da origem coincide com o baricentro do triângulo MNQ, onde M(0, k), N(2k, 0) e $Q(x_Q, y_Q)$ é correto afirmar que a área do triângulo MNQ é um número do intervalo

a) $\left[1, \frac{3}{2}\right[$
b) $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$
c) $\left[2, \frac{5}{2}\right[$
d) $\left[\frac{5}{2}, 3\right[$

85) (Escola Naval-98) Seja P o ponto da circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ mais próximo da origem. A soma das coordenadas de P é:
a) 18/5 b) 7/2 c) 9/2 d) 28/5 e) 13/2

86) (ITA-76) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere P_1 a circunferência de equação $2x^2 + 2y^2 - 11x + 6y - 8 = 0$. Então, a equação da circunferência que é tangente ao eixo das abscissas e com o mesmo centro de P_1 é dada por:
a) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{4}{9}$
b) $\left(x+\frac{4}{11}\right)^2-(y-1)^2=\frac{2}{3}$
c) $\left(x-\frac{11}{4}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$
d) $2x^2 - 2y^2 - 11x + 6y - 1/8 = 0$
e) nda

87) (ITA-77) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da circunferência que passa pelos pontos $P_1(0, -3)$ e $P_2(4, 0)$, e cujo centro está sobre a reta $x + 2y = 0$, é:
a) $5(x^2 + y^2) + 2x + 3y = 0$
b) $5(x^2 + y^2) - 14x + 7y - 24 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 5x + 10y + 25 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 5x + 5y + 25 = 0$

88) (ITA-83) Sejam m e n constantes reais estritamente positivas. Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, consideramos C a circunferência de centro $P\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$ e de raio $R = \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$ e r a reta de equação $mx+ny+\left(\sqrt{m^2-n^2}-2\right)=0$. Nestas condições, se s é a reta que passa por P e é perpendicular à reta r, então os pontos de interseção de s com C são:
a) $\left(\frac{1}{m}+1,\frac{1}{n}\right)$ e $\left(\frac{1}{m}-1,\frac{1}{n}-\frac{n}{m}\right)$
b) $\left(\frac{1}{m}+1,\frac{n}{m}\right)$ e $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)$
c) $\left(\frac{1}{m},\frac{n}{m}\right)$ e $\left(\frac{1}{m},-\frac{m}{n}\right)$
d) $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}+1\right)$ e $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}+\frac{n}{m}\right)$
e) $\left(\frac{1}{m}+1,\frac{1}{n}+\frac{n}{m}\right)$ e $\left(\frac{1}{m}-1,\frac{1}{n}-\frac{n}{m}\right)$

89) (ITA-84) A equação da circunferência tangente ao eixo das abscissas na origem e que passa pelo ponto (a, b) onde $a^2 + b^2 = 2b$ e $b \neq 0$, é:
a) $(x - b)^2 + y^2 = b^2$ d) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$
b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e) $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$
c) $x^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 2$

90) (ITA-88) Duas retas r e s, concorrentes no ponto P: (1/2, −1/2), determinam na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ cordas AB e CD, respectivamente. Sabendo-se que r é dada pela equação $x - y = 0$, o valor de $\overline{PC}.\overline{PD}$ é:
a) 1/3 b) 2/5 c) 3 d) 1/2 e) 2
Nota: RS denota o segmento reto de extremos R e S enquanto que $\overline{RS}$ denota o comprimento deste segmento.

91) (ITA-88) Determine o centro da circunferência, situada no primeiro quadrante, tangente aos eixos coordenados e tangente internamente à circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

92) (ITA-89) As circunferências $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$ possuem um ponto comum P, distinto da origem. Obtenha a equação da reta tangente à primeira circunferência no ponto P.
a) $5x + 10y = 16$ d) $3x + 4y = 8$
b) $5x + 15y = 20$ e) $10x + 5y = 20$
c) $5x + 5y = 12$

93) (ITA-89) A distância entre os pontos de interseção da reta $\frac{x}{10}+\frac{y}{20}=1$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 400$ é:
a) $16\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{7}$

94) (ITA-89) Seja s a reta do plano cartesiano, que passa pelo ponto (1, 3) e é perpendicular à reta $x + y + 1 = 0$. Considere uma circunferência com centro na origem e raio $R > 0$. Nestas condições, se s for tangente à circunferência, então:
a) R é um número irracional e $R < 1/2$
b) R é um número irracional e $1/2 < R < 1$
c) R é um número irracional e $R > 1$
d) R é um número racional e $R > 1$
e) R é um número racional e $R < 1$

95) (ITA-90) Seja C o centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}y = 0$. Considere A e B os pontos de interseção desta circunferência com a reta $y = \sqrt{2}x$. Nestas condições o perímetro do triângulo de vértices A, B e C é:

a) $6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$
d) $5\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e) n.d.a.

96) (ITA-91) Seja C a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$. Se P = (a , b) é o ponto em C mais próximo da origem, então:

a) $a = -\frac{3}{2}$ e $4b^2 + 24b + 15 = 0$

b) $a = -\frac{1}{2}$ e $4b^2 + 24b + 33 = 0$

c) $a = \frac{\sqrt{10}}{10} - 1$ e $b = 3a$

d) $a = -1 - \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $b = 3a$

e) n.d.a.

97) (ITA-91) Seja r a mediatriz do segmento de reta de extremos M = (– 4 , – 6) e N = (8 , – 2). Seja R o raio da circunferência com centro na origem e que tangencia a reta r. Então:

a) $R = \frac{\sqrt{7}}{3}$ b) $R = \frac{\sqrt{15}}{3}$ c) $R = \frac{\sqrt{10}}{3}$

d) $R = \frac{\sqrt{10}}{5}$ e) n.d.a.

98) (ITA-92) Seja C a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$. Considere em C a corda AB cujo ponto médio é: M: (2, 2). O comprimento de AB (em unidade de comprimento) é igual a:

a) $2\sqrt{6}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $2\sqrt{3}$ e) n.d.a.

99) (ITA-93) Calculando-se a área da região limitada por $y \leq 3(x + 2)/2$ e $x^2 + (y - 3)^2 \leq 13$, obtém-se:

a) $2\sqrt{13}\pi$ b) 13π c) $(13\pi)/2$
d) $(3\sqrt{13}\pi)/2$ e) $\sqrt{13}\pi$

100) (ITA-93) Uma das circunferências que passa pelo ponto P(0, 0) e tangencia as retas (r_1): x – y = 0 e (r_2): x + y – 2 = 0 tem sua equação dada por:

a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}$
b) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
d) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{2}$
e) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

101) (ITA-94) Um triângulo equilátero é tal que A: (0, 3), B: $(3\sqrt{3}, 0)$ e a abcissa do ponto C é maior que 2. A circunferência circunscrita a este triângulo tem raio r e centro em O: (a, b). Então $a^2 + b^2 + r^2$ é igual a:

a) 31 b) 32 c) 33 d) 34 e) 35

102) (ITA-96) Sabendo que o ponto (2,1) é ponto médio de uma corda AB da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que contém A e B é dada por:

a) y = 2x – 3 b) y = x – 1
c) y = – x + 3 d) y = 3x/2 – 2
e) y = – x/2 + 2

103) (ITA-96) São dadas as retas r: $x - y + 1 + \sqrt{2} = 0$ e s: $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ e a circunferência C: $x^2 + 2x + y^2 = 0$. Sobre a posição relativa desses três elementos, podemos afirmar que:

a) r e s são paralelas entre si e ambas são tangentes à C.
b) r e s são perpendiculares entre si e nenhuma delas é tangente a C.
c) r e s são concorrentes, r é tangente à C e s não é tangente à C.
d) r e s são concorrentes, s é tangente à C e r não é tangente à C.
e) r e s são concorrentes e ambas são tangentes à C.

104) (ITA-2009) Sejam C uma circunferência de raio R > 4 e centro (0,0) e $\overline{AB}$ uma corda de C. Sabendo-se que (1,3) é ponto médio de $\overline{AB}$, então uma equação da reta que contém $\overline{AB}$ é

a) y + 3x – 6 = 0. b) 3y + x -10 = 0.
c) 2y + x -7= 0. d) y + x – 4 = 0.
e) 2y + 3x – 9 = 0.

105) (ITA-2010) Considere as circunferências C_1: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e C_2: $(x - 10)^2 + (y - 11)^2 = 9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede

a) $5\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{6}$
d) $\frac{25}{3}$ e) 9

106) (ITA-2010) Um triângulo eqüilátero tem os vértices nos pontos A, B e C do plano xOy, sendo B = (2, 1) e C = (5, 5).Das seguintes afirmações:

I – A se encontra sobre a reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$.

II - A está na intersecção da reta $y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$ com a circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

III – A pertence às circunferências $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ e $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{75}{4}$, e (são) verdadeira(s) apenas

a) I b) II c) III
d) I e II e) II e III

107) (IME-81/82) Determine as equações de uma circunferência com centro no ponto (– 2, 2) e tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$.

108) (IME-87/88) Encontre a equação do círculo inscrito no triângulo formado pelas retas:
$4x + 3y - 6 = 0$
$-4x + 3y + 9 = 0$
$-3x + 4y + 12 = 0$

109) (IME-88/89) Determine a equação da circunferência que tem centro no eixo dos x e possui uma corda, cujas extremidades são (2, 2) e (8, 4).

110) (IME-66) Num sistema de eixos cartesianos ortogonais o vértice A do triângulo ABC está na origem e o eixo dos X é suporte do lado AB. O coeficiente angular do lado AC é 1. Sabendo que os pontos B, C e M, este último de coordenadas (0, – 4), estão e linha reta e que as distâncias BC e BM são iguais, determine a equação da circunferência circunscrita ao referido triângulo.

111) (IME-65) As tangentes traçadas de um ponto P(x, 0) às circunferências de centros $C_1(2, 2)$ e $C_2(7, 7)$ e raios respectivamente $R_1 = 2$ e $R_2 = \sqrt{6}$, são iguais. Determine x.

112) Determinar c de modo que a reta r: $4x - 3y + c = 0$ seja exterior à circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

113) A circunferência $x^2 + y^2 + 5x + 4y + a = 0$ determina no eixo Ox uma corda de comprimento 3. Calcular a.

114) Obter a equação da reta t tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ conduzidas pelo ponto P(6, 3).

115) Determinar as equações das circunferências tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (4, 3) e que tem raio unitário.

116) Determinar a equação da circunferência que tangencia a reta $2x + y + 4 = 0$ no ponto de ordenada 2 e determina na circunferência $x^2 + y^2 = 1$ uma corda paralela ao eixo x.

117) Cada ponto P(x, y) de uma curva C no plano xy tem suas coordenadas descritas por:
$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 2 + \operatorname{sen} t \end{cases}$, $3 < t < 4$.
Escreva a equação de C.

118) Determine a equação da circunferência que tangencia a reta $x + y = 5$ no ponto (– 2, 7) e que corta a circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ ortogonalmente.

119) Determine o valor de α de modo que as circunferências $x^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2y + 1 = 0$ sejam tangentes.

120) Determine o centro da circunferência que passa pelos pontos (0, 0), (0, 1) e que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

121) Sejam A(3, 4), B(4, 3) e C(5, 0) os vértices de um triângulo ABC. Determine o raio da circunferência que passa pelos pontos médios dos lados de ABC.

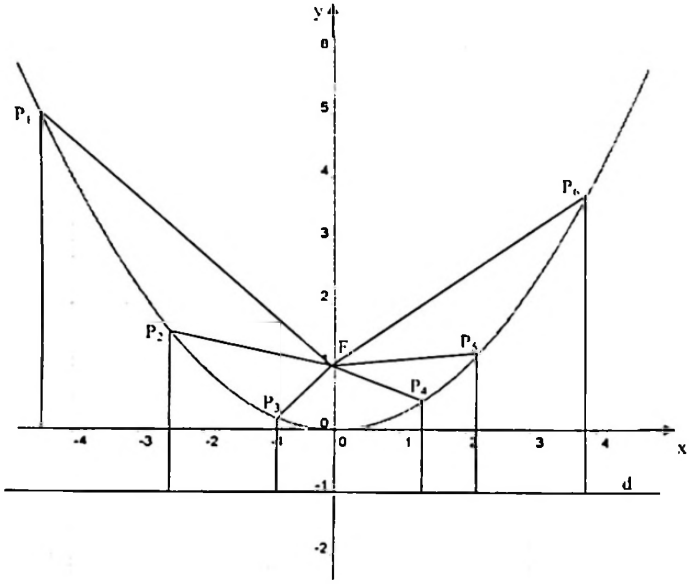
122) Se $\left(x_i, \frac{1}{x_i}\right)$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ são quatro pontos distintos de uma circunferência, demonstre que $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

123) Determine a equação da circunferência de raio 5 e que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ no ponto (5, 5).

Parábola

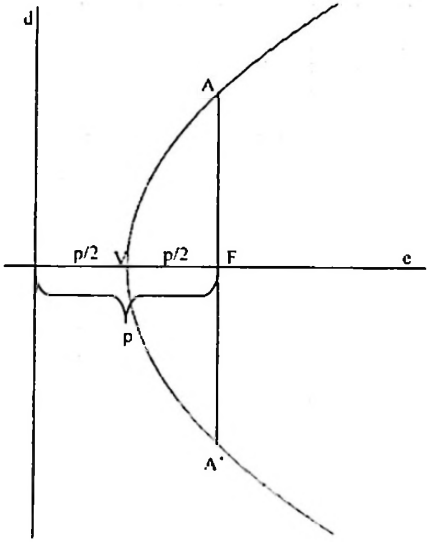
7.1. DEFINIÇÃO

Considere num plano α uma reta d e um ponto F. Defini-se parábola o lugar geométrico dos pontos do plano α que estão a uma mesma distância da reta d e do ponto F. A reta d é chamada de reta diretriz da parábola e o ponto F é chamado de foco da parábola. Abaixo é possível verificar o traçado de uma parábola.



Observe que no gráfico ao lado as distâncias dos pontos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6, todos pertencentes a uma mesma parábola, ao ponto F(0, 1) e à reta d: y = 1 são iguais. O ponto F é o foco da parábola e a reta d é a diretriz da parábola.

7.2. ELEMENTOS PRINCIPAIS



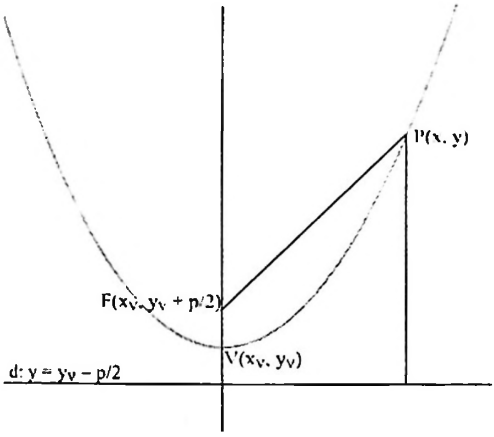
No estudo da parábola alguns elementos ganham maior destaque:

F: foco
d: diretriz
V: vértice
e: eixo de simetria
AA': corda focal mínima (*latus rectum*)
p: parâmetro (distância entre o foco e a reta diretriz)

Observe que as distâncias entre o foco e o vértice e entre o vértice a reta diretriz são iguais e valem p/2.

7.3. EQUAÇÃO REDUZIDA

7.3.1. Eixo de simetria vertical



1° caso: concavidade da parábola voltada para cima:

Como as distâncias entre o ponto P e o foco F e entre o P e a reta diretriz d são iguais:

$$\sqrt{(x-x_V)^2+\left(y-y_V-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|y-y_V+\frac{p}{2}\right| \Rightarrow$$

$$(x-x_V)^2=\left(y-y_V+\frac{p}{2}\right)^2-\left(y-y_V-\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{(x-x_V)^2=2p(y-y_V)}$$

Observe que se o vértice da parábola estivesse na origem do plano cartesiano teríamos a equação

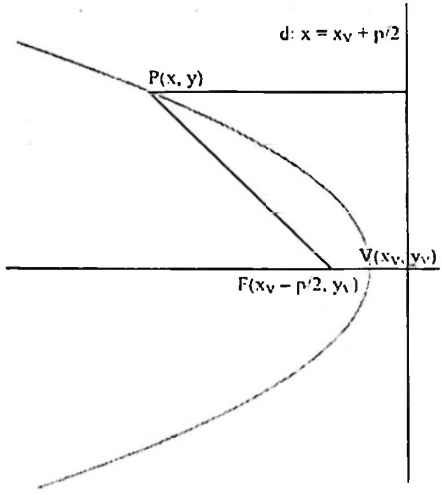
$$\boxed{x^2=2py}$$

2" caso: concavidade da parábola para baixo:

Realizando cálculos análogos ao caso anterior demonstra-se que a equação da parábola vale:

$$\boxed{(x-x_V)^2=-2p(y-y_V)}$$

7.3.2. Eixo de simetria horizontal



1" caso: concavidade da parábola voltada para a esquerda:

Como as distâncias entre o ponto P e o foco F e entre o P e a reta diretriz d são iguais:

$$\sqrt{\left(x-x_V+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y_V)^2}=\left|y-y_V-\frac{p}{2}\right| \Rightarrow$$

$$(y-y_V)^2=\left(x-x_V-\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-x_V+\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{(y-y_V)^2=-2p(x-x_V)}$$

Observe que se o vértice da parábola estivesse na origem do plano cartesiano teríamos a equação

$$\boxed{y^2=-2px}$$

2" caso: concavidade da parábola para a direita:

Realizando cálculos análogos ao caso anterior demonstra-se que a equação da parábola vale:

$$\boxed{(y-y_V)^2=2p(x-x_V)}$$

Exemplos:

1) (UEL-2007) O vértice, o foco e a reta diretriz da parábola de equação $y = x^2$ são dados por:
a) Vértice: (0, 0) ; Foco: (0, 1/4) ; Reta diretriz y = - 1/4
b) Vértice: (0, 0) ; Foco: (0, 1/ 2) ; Reta diretriz y = - 1/2
c) Vértice: (0, 0) ; Foco: (0, 1) ; Reta diretriz y = - 1
d) Vértice: (0, 0) ; Foco: (0 , -1) ; Reta diretriz y = 1
e) Vértice: (0, 0) ; Foco: (0, 2) ; Reta diretriz y = - 2

Solução:

$y = x^2 \Rightarrow (y-0)^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)(x-0) \Rightarrow p = 1/2$ e $V(0, 0) \Rightarrow$ Foco $(0, p/2) = (0, 1/4)$

Diretriz: $y = y_v - p/2 = -1/4 \Rightarrow$ ALTERNATIVA A

2) (Escola Naval-94) A equação da parábola cujo foco é o ponto (1,4) e cuja a diretriz é a reta $y = 3$ é:

(A) $y = x^2 - 2x + 8$ (B) $y = -x^2 + x - 8$ (C) $y = \frac{x^2}{2} - x + 4$

(D) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 2$ (E) $x = y^2 - y + 4$

Solução:
O parâmetro é igual à distância entre a reta diretriz e o foco: $p = 4 - 3 = 1$.
Vértice: $V(1, y_F - p/2) \Rightarrow V(1, 9/2)$
Assim: $(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V) \Rightarrow (x-1)^2 = 2(y - 9/2) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2y - 9 \Rightarrow y = x^2/2 - x + 4$

3) (ITA-2009) A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a
a) 2. b) $\frac{3}{2}$. c) 1. d) $\frac{3}{4}$. e) $\frac{1}{2}$.

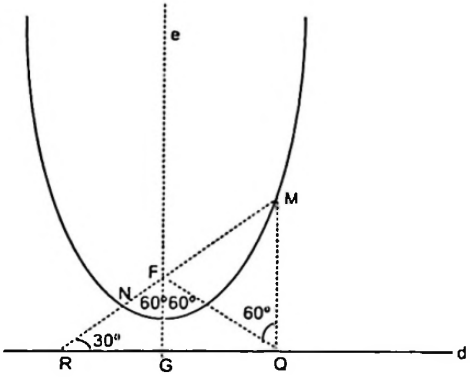
Solução:

$2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 4\left(y - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow 2\left(y - \frac{1}{4}\right) = (x-1)^2$.

Portanto, sendo p o parâmetro: $2p = 2 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$, que é a distância pedida.

4) (IME-2012) É dada uma parábola de parâmetro p. Traça-se a corda focal MN, que possui uma inclinação de 60º em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda MN intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de p, sabendo que N encontra-se no interior do segmento MR.

Solução:



Sejam d a diretriz, e o eixo de simetria e G a projeção do foco F sobre d. Como M é um ponto da parábola, tem-se MF = MQ. Já que $\overline{MQ} \parallel e$, $\angle(F\hat{M}Q) = 60°$, Logo, o triângulo MFQ é eqüilátero.
Conseqüentemente, obtêm-se os ângulos indicados na figura, tendo em vista que M, F, N e R são colineares.
Assim, no triângulo FGQ, em que FG = p (parâmetro), conclui-se que: $GQ = p\sqrt{3}$ (= GR) e FQ = 2p (= FR).
Desse modo, o triângulo MQR fica com lados:
MQ (= FQ) = 2p, $RG = 2GQ = 2p\sqrt{3}$ e MR = 2FM = 4p.
Portanto o perímetro pedido é dado por:

$$2p + 2p\sqrt{3} + 4p = 2p(\sqrt{3} + 3)$$

7.4. RETA TANGENTE

Agora serão apresentados os dois métodos mais conhecidos para encontrar a equação da reta tangente a uma parábola em determinado ponto. Ambos serão apresentados como forma de exemplos resolvidos.

1º MÉTODO: Discriminante igual a zero

1º Caso: Parábola com eixo de simetria vertical

Suponha que seja necessário determinar a equação da reta tangente à parábola $y = -2x^2 - x + 2$ no ponto $(2, -8)$. Suponha que a equação reduzida reta tangente seja $y = mx + n$. Como esta reta passa pelo ponto $(2, -8)$: $-8 = 2m + n \Rightarrow n = -2m - 8$

Assim, a reta é dada por $y = mx - 2m - 8$

Sabe-se que as soluções do sistema formado pelas equações da reta e da parábola são as coordenadas dos pontos de interseção destas duas curvas. Assim, para que a reta seja tangente à parábola deve-se impor que o sistema possua solução única:

$$\begin{cases} y = mx - 2m - 8 \\ y = -2x^2 - x + 2 \end{cases} \Rightarrow mx - 2m - 8 = -2x^2 - x + 2 \Rightarrow 2x^2 + (m+1)x - 2m - 10 = 0$$

Para que a solução seja única o descriminante desta equação de 2º grau deve ser nulo:

$\Delta = 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(2)(-2m-10) = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 + 16m + 80 = 0 \Rightarrow$

$m^2 + 18m + 81 = 0 \Rightarrow (m+9)^2 = 0 \Rightarrow m = -9$

Desta forma, a reta tangente é dada pela equação $y = -9x + 10$

2º Caso: Parábola com eixo de simetria horizontal

Suponha agora que se deseja determinar a equação da reta tangente à parábola $y^2 = 2x - 1$ no ponto $(1, 1)$. Aqui cabe um comentário importante. Se a reta for escrita na forma reduzida $y = mx + n$, para depois substituir y na equação da parábola encontrar-se-ia a expressão $(mx + n)^2 = 2x - 1$. Entretanto, pode-se encontrar uma expressão mais simples, fazendo a equação da reta sendo igual a $x = my + n$. O único inconveniente desta notação é se a reta fosse paralela ao eixo x, entretanto é impossível que uma parábola com eixo de simetria horizontal possua uma tangente com coeficiente angular igual a 0. Como esta reta deve passar pelo ponto $(1, 1)$ então: $1 = m + n \Rightarrow n = 1 - m$.

Assim, a equação da reta fica descrita pela equação $x = my + 1 - m$.

Como esta reta deve ser tangente a parábola então o sistema $\begin{cases} y^2 = 2x - 1 \\ x = my + 1 - m \end{cases}$ deve possuir uma única solução. Substituindo a 2ª equação na 1ª:

$y^2 = 2(my + 1 - m) - 1 \Rightarrow y^2 = 2my + 2 - 2m - 1 \Rightarrow y^2 - 2my + 2m - 1 = 0$

De modo a esta equação possuir apenas uma solução deve-se impor que seu discriminante seja igual a 0:

$\Delta = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(1)(2m-1) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow 4(m-1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$

Assim, a reta tangente no ponto $(1, 1)$ a parábola $y^2 = 2x - 1$ possui equação $y = x$.

Perceba que escrever a equação da reta na forma $x = my + n$ no lugar de escrever $y = mx + n$ foi com o objetivo de conseguir expressões mais simples. Entretanto, se a parábola fosse dada por uma equação do tipo $y = ax^2 + bx + c$ (parábola com eixo de simetria vertical), para conseguir expressões mais simples, é necessário escrever a reta da forma $y = mx + n$, assim como foi apresentado no 1º caso.

2º MÉTODO: Aplicando derivadas

Este método também será apresentado em forma de exemplo.

1º Caso: Parábola com eixo de simetria vertical

Suponha que desejamos determinar a reta tangente à parábola $y = x^2 + 2x - 1$ no ponto P(1, 2). Derivando a equação da parábola em x obtém-se: $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$

Da teoria das derivadas sabe-se que $\frac{dy}{dx}$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da parábola no ponto (1, 2). Substituindo x = 1 na derivada tem-se que m = 4.

Portanto, a equação da reta tangente é dada por:

$(y - y_P) = m(x - x_P) \Rightarrow (y - 2) = 4(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 4x - 4 \Rightarrow y = 4x - 2$

2º Caso: Parábola com eixo de simetria horizontal

Seja dada a parábola $x = 2y^2 - y - 1$ e o ponto P(5, 2). Deseja-se determinar a reta tangente a esta parábola no ponto P. Derivando em x a equação da parábola obtém-se: $1 = 4y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}$

Substituindo nesta equação o valor da coordenada y do ponto P: $1 = (4)(2)\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{7} \Rightarrow m = \frac{1}{7}$

Logo, a equação da reta vale:

$(y - y_P) = m(x - x_P) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{7}(x - 5) \Rightarrow 7y - 14 = x - 5 \Rightarrow x - 7y + 9 = 0$

Exemplos:

1) (UEL-2007) Seja a parábola de equação $y = 3x^2 + 4$. As equações das retas tangentes ao gráfico da parábola que passam pelo ponto P = (0, 1) são:

a) $y = 5x + 1$ e $y = -5x + 1$
b) $y = 6x + 1$ e $y = -6x + 1$
c) $y = 3x/2 + 1$ e $y = -3x/2 + 1$
d) $y = 5x/4 + 1$ e $y = -5x/4 + 1$
e) $y = 5x - 1$ e $y = -5x - 1$

Solução:

Suponha que a equação da reta seja $y = mx + n$. Se a reta passa pelo ponto P(0, 1) então n = 1.
Assim, a reta fica dada por $y = mx + 1$.
Para encontrar as interseções da reta com a parábola deve-se substituir a equação da reta na parábola:
$mx + 1 = 3x^2 + 4 \Rightarrow 3x^2 - mx + 3 = 0$
De modo a reta ser tangente à parábola a equação acima deve possui apenas uma solução:
$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4.(3)(3) = 0 \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm 6$
Se m = 6 então $y = 6x + 1$
Se m = – 6 então $y = -6x + 1$
ALTERNATIVA B

2) (UFC-2007) Encontre as equações das retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -1)$.

Solução:

Derivando em x a equação da parábola obtém-se: $\frac{dy}{dx} = 2x$

Suponha que a reta seja dada pela equação $y = mx + n$. Como esta reta passa pelo ponto $(0, -1)$ então tem-se que $n = -1$ e a reta fica dada por $y = mx - 1$.

Seja $P(a, b)$ o ponto onde a reta tangencia a parábola. Como este ponto pertence à parábola $y = x^2$ então segue que $b = a^2$.

Além disso, da derivada da parábola em x conclui-se que $m = 2a$.

Substituindo na equação da reta:

$y = mx - 1 \Rightarrow a^2 = 2a(a) - 1 \Rightarrow a^2 = 2a^2 - 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow m = \pm 2$

Assim, as equações das retas são dadas por $y = 2x - 1$ ou $y = -2x - 1$.

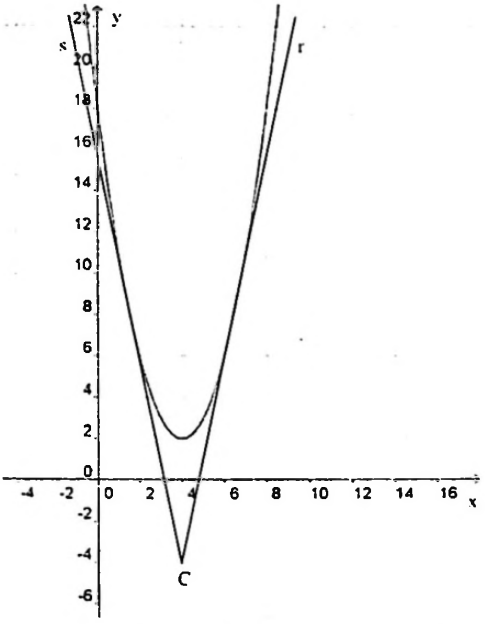
3) (ITA-99) Pelo ponto C: $(4, -4)$ são traçadas duas retas que tangenciam a parábola $y = (x-4)^2 + 2$ nos pontos A e B. A distância do ponto C à reta determinada por A e B é:

a) $6\sqrt{12}$ b) $\sqrt{12}$ c) 12 d) 8 e) 6

Solução:

Desenvolvendo a equação da parábola obtém-se $y = x^2 - 8x + 18$, cujo x do vértice é igual a 4.

Como a coordenada x do ponto C é também igual a 4, a única configuração possível para a tangência é a indicada na figura abaixo.



Seja $y = mx + n$ a equação de uma das retas tangentes à parábola. Como esta reta passa pelo ponto $C(4, -4)$:

$-4 = 4m + n \Rightarrow n = -4(m+1) \Rightarrow$

$y = mx - 4(m+1)$

Substituindo na equação da parábola:

$mx - 4(m+1) = x^2 - 8x + 18 \Rightarrow$

$x^2 - (m+8)x + 4m + 22 = 0$

De forma a reta ser tangente à parábola esta equação deve possuir raiz dupla:

$\Delta = 0 \Rightarrow (m+8)^2 - 4(1)(4m+22) = 0 \Rightarrow$

$m^2 + 16m + 64 - 16m - 88 = 0 \Rightarrow m^2 = 24 \Rightarrow$

$m = \pm 2\sqrt{6}$

Assim, as retas são dadas por:

r: $y = 2\sqrt{6}x - 8\sqrt{6} - 4$

s: $y = -2\sqrt{6}x + 8\sqrt{6} - 4$

Interseção de r com a parábola:

Como $\Delta = 0$ então $x_A = -\frac{b}{2a} = \frac{m+8}{2} = \sqrt{6} + 4$

Substituindo na equação da reta:

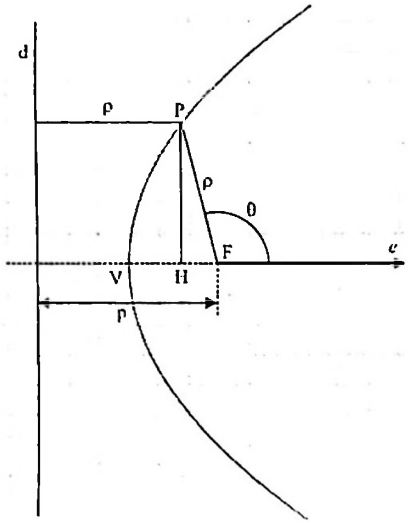
$y_A = 2\sqrt{6}x_A - 8\sqrt{6} - 4 \Rightarrow$

$y_A = 2\sqrt{6}(\sqrt{6}+4) - 8\sqrt{6} - 4 = 12 + 8\sqrt{6} - 8\sqrt{6} - 4 = 8$

Como $y_B = y_A = 8$ então a distância de C à reta AB vale: $|y_A - y_C| = |8 - (-4)| = 12$.

ALTERNATIVA C

7.5. EQUAÇÃO POLAR



Considere um sistema de coordenadas polares constituído de um semi-eixo e e com pólo coincidindo com o foco da elipse.

Inicialmente note que, pela definição de parábola, tem-se $\overline{PF} = d(P,d) = \rho$.

Suponha que H é o pé da altura de P com relação ao eixo de simetria da parábola.

Como d(H, d) = ρ então $\overline{HF} = p - \rho$.

No triângulo PHF tem-se que:

$$\cos(\angle P\hat{F}H) = \frac{\overline{HF}}{\overline{PF}} \Rightarrow -\cos\theta = \frac{p-\rho}{\rho} \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1-\cos\theta}}$$

Obs: Na demonstração acima a diretriz não corta o eixo polar, ou seja, a diretriz está à esquerda do pólo. Caso a reta diretriz corte o eixo polar, ou seja, a diretriz esteja à direita do pólo, a equação polar de parábola fica da forma $\boxed{\rho = \frac{p}{1+\cos\theta}}$

Exercício:

1) O foco de uma parábola é o ponto (4, 3) e sua diretriz é a reta x = 2. Determine sua equação polar.

Solução:

O parâmetro de uma cônica é igual à distância entre o foco e a reta diretriz:

$p = |x_F - x_d| = |4 - 2| = 2$

Assim, a equação polar da parábola vale: $\rho = \frac{p}{1-\cos\theta} \Rightarrow \rho = \frac{2}{1-\cos\theta}$

2) Determine a equação polar da parábola $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$.

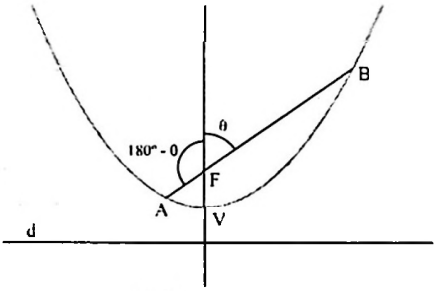
Solução:

$x^2 - 8x + 12 = -2y \Rightarrow (x-4)^2 - 4 = -2y \Rightarrow (x-4)^2 = -2(y-2)$

Comparando com $(x - x_V)^2 = -2p(y - y_V)$ conclui-se que p = 1 e V(4, 2)

Logo, a equação polar da parábola vale: $\rho = \frac{p}{1-\cos\theta} \Rightarrow \rho = \frac{1}{1-\cos\theta}$

7.6. CORDA FOCAL MÍNIMA (*LATUS RECTUM*)



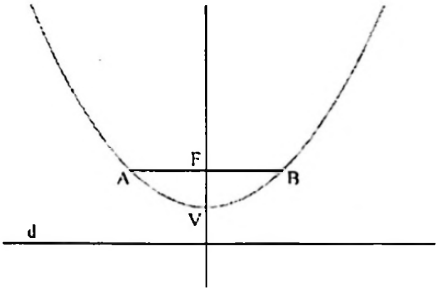
Corda focal é todo segmento de reta que passa pelo foco de uma cônica e cujos extremos são pontos pertencentes à cônica.

Na parábola da figura ao lado, de parâmetro p, considere a corda focal AB. Observando a figura pode-se escrever, em coordenadas polares, que:

$$\overline{FB} = \frac{p}{1-\cos\theta} \text{ e } \overline{FA} = \frac{p}{1+\cos\theta}$$

Logo: $\overline{AB} = \overline{FA} + \overline{FB} = \frac{p}{1+\cos\theta} + \frac{p}{1-\cos\theta} = \frac{2p}{1-\cos^2\theta}$

Assim, $\overline{AB}$ assumirá valor mínimo quando $\cos^2\theta$ assumir valor mínimo, que ocorre para $\theta = 90°$. Desta maneira, conclui-se que a corda focal de comprimento mínimo é o segmento de reta AB paralelo à diretriz, passando pelo foco F, com os pontos A e B pertencentes à parábola, conforme mostrado na figura abaixo.



Na parábola indicada na figura tem-se:
$V(x_v, y_v)$, $F(x_v, y_v + p/2)$, d: $y = y_v - p/2$.

Além disso, a equação da parábola é dada por $(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$ e a reta que passa pelos pontos A e B possui equação dada por $y = y_v + p/2$.

Observando a figura, conclui-se que os pontos A e B são as interseções da reta $y = y_v + p/2$ com a parábola $(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$. Resolvendo o sistema formado por estas duas equações:

$$\begin{cases} y = y_v + p/2 \\ (x - x_v)^2 = 2p(y - y_v) \end{cases} \Rightarrow (x - x_v)^2 = 2p.\frac{p}{2} = p^2 \Rightarrow x - x_v = \pm p$$

Desta forma, as coordenadas dos pontos A e B são: $A(x_v - p, y_v + p/2)$ e $B(x_v + p, y_v + p/2)$

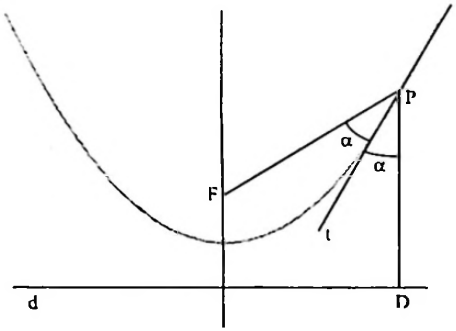
Portanto, o valor da corda focal mínima é dada por $\overline{AB} = x_B - x_A \Rightarrow \boxed{\overline{AB} = 2p}$

7.7. EXCENTRICIDADE

Em uma cônica (elipse, parábola ou hipérbole) considere o foco F e a diretriz d. A excentricidade de uma cônica é igual à razão entre as distâncias de um ponto qualquer P da cônica ao foco F e a diretriz d, ou seja, $e = \frac{\overline{PF}}{d(P,d)}$. Em uma parábola sabe-se que as distâncias de qualquer ponto da parábola ao foco e à reta diretriz são iguais. Assim, em toda parábola o valor da excentricidade é igual 1.

Devido ao fato de possuir um valor constante, não existe grande relevância o estudo da excentricidade de uma parábola. Contudo, em outros capítulos deste livro será possível concluir que nos casos da elipse e da hipérbole, cujos valores de excentricidade não são constantes, o estudo da excentricidade possui grande importância, principalmente no caso da determinação da equação polar destas cônicas.

7.8. TEOREMA DAS TANGENTES

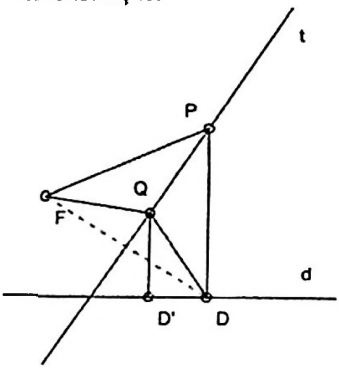


Teorema: Considere um ponto P pertencente a uma parábola de foco F e diretriz d. Seja D a projeção de P sobre a diretriz d. Trace em P a tangente t à parábola. A reta t é a bissetriz do ângulo ∠FPD

Corolário 1: O ponto D é simétrico de F com relação à reta t.

Corolário 2: Em um espelho parabólico todo raio luminoso que incide na parábola paralelamente ao eixo de simetria reflete ao longo de uma reta que passa pelo foco da parábola.

Demonstração:



Considere um ponto P sobre a parábola trace a bissetriz t do ângulo ∠FPD. Tome um ponto Q qualquer, distinto de P, na reta t. Trace $\overline{FQ}$ e seja D' a projeção de Q sobre a diretriz d.

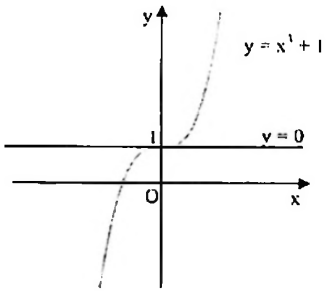
Como P pertence à parábola então $\overline{PF} = \overline{PD}$, fazendo com que ΔFPD seja isósceles. Assim, a bissetriz t é mediatriz de $\overline{FD}$, implicando que $\overline{QF} = \overline{QD}$.

Como D' é a projeção de Q sobre a reta diretriz d segue que $\overline{QD'} < \overline{QD} = \overline{QF}$, fazendo com que Q seja externo à parábola (se ele estivesse sobre a parábola teríamos $\overline{QD'} = \overline{QF}$, que não ocorre). Como Q representa um ponto qualquer sobre a reta t distinto de P, conclui-se que P é o único ponto da reta t que pertence à parábola. Logo, segue que t é tangente à parábola.

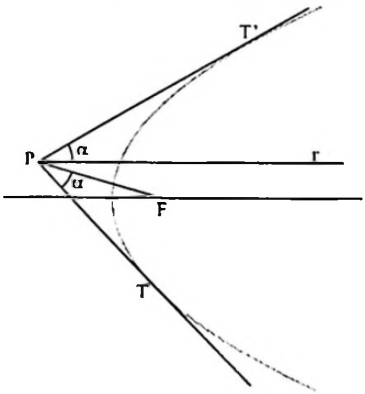
Sobre o corolário 1, observe que a reta t é mediatriz do segmento $\overline{FD}$, fazendo com que as distâncias de F até t de D até t sejam iguais.

Para demonstrar o corolário 2 basta notar que o ângulo formado por um raio paralelo ao eixo de simetria e a reta t é igual a α, implicando que o raio refletido percorra o segmento $\overline{FP}$, passando, portanto, pelo foco F da parábola.

Observação: Perceba que a demonstração acima somente é válida porque a parábola é uma curva convexa. Caso a parábola não fosse uma curva convexa teríamos a possibilidade da reta t possuir apenas um ponto de interseção com a dada curva e mesmo assim esta reta não ser tangente à curva. Por exemplo, a reta y = 1 possui apenas um ponto de interseção com a curva $y = x^3 + 1$, entretanto não há tangência da reta com a curva no ponto (0, 1).



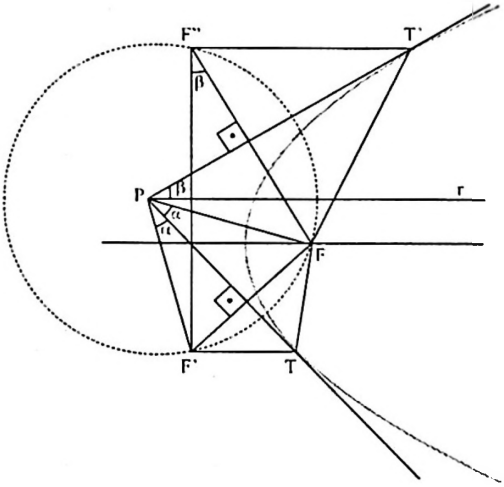
7.9. TEOREMA DE PONCELET PARA PARÁBOLAS



Seja P um ponto externo à parábola cujo foco é o ponto F. A partir de P trace duas retas tangentes à parábola, tangenciando-a em T e T', conforme a figura ao lado. Seja r a reta paralela ao eixo de simetria da parábola que passa pelo ponto P. Os ângulos $\angle T\hat{P}F$ e $\angle T'\hat{P}r$ são iguais:

$$\angle T\hat{P}F = \angle T'\hat{P}r$$

Demonstração:



Suponha que $\angle T\hat{P}F = \alpha$ e $\angle T'\hat{P}r = \beta$.

Seja F' o ponto simétrico de F com relação à reta PT e seja F" o ponto simétrico de F com relação à reta PT'. Desde que $\Delta PFF'$ é isósceles então $\angle T\hat{P}F' = \angle T\hat{P}F = \alpha$.

Note que o ponto P é o encontro das mediatrizes dos segmentos $\overline{FF'}$ e $\overline{FF''}$, implicando que P é o circuncentro do triângulo $\Delta FF'F''$.

Como PT' é mediatriz de $\overline{FF''}$ segue que $\Delta FT'F''$ é isósceles, fazendo com que PT' seja bissetriz de $\angle FT'F''$. Desde que $\overline{FT'} \equiv \overline{T'F''}$, pelo teorema das tangentes conclui-se que $\overline{T'F''}$ é tangente ao eixo ao eixo de simetria da parábola e F" pertence à diretriz da parábola. Analogamente, conclui-se que F' pertence à diretriz da parábola. Assim, segue que a reta F'F" é a diretriz da parábola, implicando que F'F" é perpendicular à reta r.

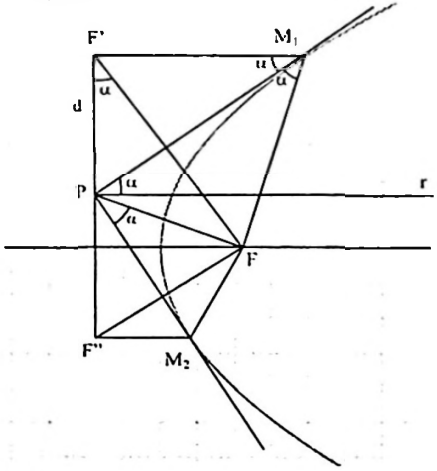
Como $F'F'' \perp r$ então $\angle F\hat{F}''F' = \beta$. Observe que o ângulo inscrito $\angle F\hat{F}''F'$ enxerga na circunferência a corda $\overline{FF'}$, que também é enxergada pelo ângulo central $\angle F\hat{P}F'$. Portanto:

$$2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \angle T\hat{P}F = \angle T'\hat{P}r$$

Exercícios:

1) (IME-86) Seja uma parábola de foco F e diretriz d. Por um ponto $P \in d$, traçam-se tangentes à parábola que a interceptam em M_1 e M_2. Demonstre que M_1, M_2 e F estão em linha reta.

Solução:



Suponha que F' seja a projeção de M_1 sobre d e que F" seja a projeção de M_2 sobre d. Pelo teorema das tangentes sabe-se que $\angle F"M_1P = \angle FM_1P = \alpha$.

Como $\overline{F'M_1} \equiv \overline{FM_1}$ então $\Delta F'M_1F$ é isósceles e $\overline{PM_1}$ é mediatriz de $\overline{FF'}$. Assim, conclui-se que $\angle PF'F = \alpha$.

Analogamente, demonstra-se que $\overline{PM_2}$ é mediatriz de $\overline{FF"}$. Assim, o ponto P é o encontro das mediatrizes de $\overline{FF'}$ e de $\overline{FF"}$, fazendo com que P seja o circuncentro de $\Delta FF'F"$. Logo, segue que $\overline{PF'} \equiv \overline{PF}$ e portanto tem-se que $\angle PFF' = \angle PF'F = \alpha$. Como $\angle M_1FF' = 90° - \alpha$ então $\angle PFM_1 = 90°$.

Como $F'M_1 \parallel r$ tem-se que $\angle M_1Pr = \angle F'M_1P = \alpha$.

Pelo teorema de Poncelet: $\angle M_1Pr = \angle FPM_2 = \alpha$.

Sendo $\overline{PM_2}$ a mediatriz de $\overline{FF"}$: $\angle PFF" = 90° - \alpha$.

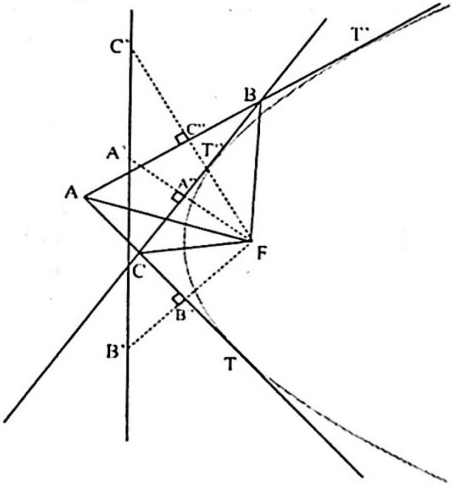
Observe que $\overline{F"M_2}$ é tangente ao círculo de diâmetro $\overline{F'F"}$. Assim, $\angle FF"M_2$ é um ângulo semi-inscrito neste círculo, enxergando no mesmo a corda $\overline{FF"}$. Como $\angle FF'F"$ é um ângulo inscrito no mesmo círculo enxergando a mesma corda tem-se que $\angle FF"M_2 = \angle FF'F" = \alpha$. Como $\Delta FF"M_2$ é isósceles tem-se que $\angle F"FM_2 = \alpha$.

Assim, segue diretamente que $\angle PFM_2 = 90°$.

Como $\angle PFM_1 + \angle PFM_2 = 90° + 90° = 180°$ conclui-se que M_1, M_2 e F estão alinhados.

2) (IME-90) Seja um triângulo ABC cujos lados são tangentes a uma parábola. Prove que o círculo circunscrito ao triângulo passa pelo foco.

1ª Solução:



Sejam A', B' e C' os pontos simétricos de F com relação às retas BC, AC e AB, respectivamente. Sabe-se que os pontos A', B' e C' pertencem à diretriz da parábola (*veja a demonstração do Teorema de Poncelet*).

Assim, os pontos A", B" e C" são os pontos médios dos segmentos $\overline{A'F}$, $\overline{B'F}$ e $\overline{C'F}$, respectivamente. Portanto, $\overline{A"B"}$ é base média em $\Delta A'B'F$, $\overline{A"C"}$ é base média em $\Delta A'C'F$ e $\overline{B"C"}$ é base média em $\Delta B'C'F$.

Como os pontos A', B' e C' estão alinhados, segue que os pontos A", B" e C" também estão alinhados.

Como AC"FB" é um quadrilátero inscritível:

$\angle BAC = 180° - \angle B"FC"$.

Além disso: $\angle B"A"C = \angle C"A"B \Rightarrow$

$\angle CFB" = \angle BFC" \Rightarrow \angle BFC = \angle B"FC" \Rightarrow$

$\angle BFC = \angle 180° - \angle BAC \Rightarrow$ F pertence à circunferência circunscrita de ΔABC

2ª Solução:

Observe a figura apresentada na 1ª solução.

Suponha um sistema de eixos cartesianos onde a origem coincide com o vértice da parábola. Assim, a equação da parábola é dada por $y^2 = 2px$.

Derivando com relação a x: $2y.\frac{dy}{dx} = 2p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$

Considere o lado AC do triângulo, tangente à parábola no ponto T. Seja B" a projeção de F sobre AT.

A reta AC é dada por: $y - y_T = \frac{dy}{dx}(x - x_T) \Rightarrow y - y_T = \frac{p}{y_T}(x - x_T) \Rightarrow y.y_T - y_T^2 = p.x - p.x_T$

Reta FB": $y - y_F = -\frac{dx}{dy}(x - x_F) \Rightarrow y = -\frac{y_T}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right)$

Note que B" é a interseção de AC com FB":

$$\begin{cases} y.y_T - y_T^2 = p.x - p.x_T \\ y = -\frac{y_T}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow -\frac{y_T^2}{p}\left(x_{B"} - \frac{p}{2}\right) - y_T^2 = p.x_{B"} - p.x_T \Rightarrow$$

$$-\frac{2px_T}{p}\left(x_{B"} - \frac{p}{2}\right) - 2p.x_T = p.x_{B"} - p.x_T \Rightarrow -2x_T.x_{B"} + p.x_T - 2p.x_T = p.x_{B"} - p.x_T \Rightarrow$$

$x_{B"}(2x_T + p) = 0 \Rightarrow x_{B"} = 0$

Analogamente demonstra-se que $x_{A"} = 0$ e $x_{C"} = 0$.

Portanto, os pontos A", B" e C" pertencem a uma reta perpendicular ao eixo de simetria da parábola que passa pelo vértice V.

Como AC"FB" é um quadrilátero inscritível: $\angle BAC = 180° - \angle B"FC"$.

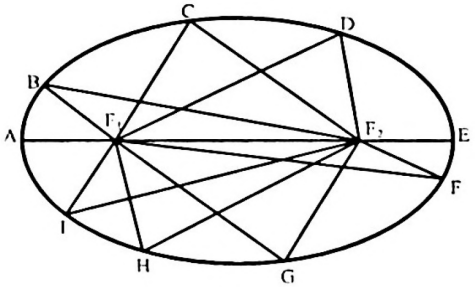
Além disso: $\angle B"A"C = \angle C"A"B \Rightarrow \angle CFB" = \angle BFC" \Rightarrow \angle BFC = \angle B"FC" \Rightarrow$

$\angle BFC = \angle 180° - \angle BAC \Rightarrow$ F pertence à circunferência circunscrita de ΔABC

Elipse

7.10. DEFINIÇÃO

Considere um plano α e dois distintos pontos, F_1 e F_2, pertencentes a este plano. Suponha que $\overline{F_1F_2} = 2c$. Defini-se elipse como o conjunto de pontos P do plano α tal que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, onde $2a > 2c$. Os pontos F_1 e F_2 são denominados de focos da elipse. Abaixo é possível identificar o exemplo do traçado de uma elipse.



Pela definição de elipse tem-se:

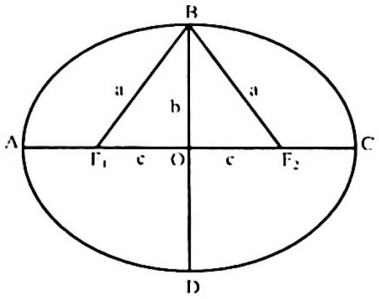
$\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2} = \overline{CF_1} + \overline{CF_2} = \overline{DF_1} + \overline{DF_2} =$

$= \overline{EF_1} + \overline{EF_2} = \overline{FF_1} + \overline{FF_2} = \overline{GF_1} + \overline{GF_2} = \overline{HF_1} + \overline{HF_2} =$

$= \overline{IF_1} + \overline{IF_2} = 2a$

7.11. ELEMENTOS PRINCIPAIS

Determinados elementos possuem especial importância no estudo da elipse. Nos demais tópicos deste capítulo serão apresentados com mais detalhes cada um destes elementos, que invariavelmente são pontos ou comprimentos ao longo da elipse.



F_1 e F_2: focos
O: centro
A, B, C e D: vértices
AC: eixo maior ou eixo focal
BD: eixo menor
OA e OC: semi-eixos maiores
OB e OD: semi-eixos menores
$\overline{F_1F_2} = 2c$: distância focal
$\overline{AC} = 2a$: medida do eixo-maior
$\overline{BD} = 2b$: medida do eixo-menor

7.11.1. Distância dos Vértices aos Focos e ao centro

Observe a figura anterior. Note que, por simetria, as distâncias do ponto B aos focos F_1 e F_2 são iguais. Desde que $\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 2a$ segue diretamente que $\overline{BF_1} = \overline{BF_2} = a$. Analogamente pode-se concluir que $\overline{DF_1} = \overline{DF_2} = a$.

Como O é o ponto médio de $\overline{BD}$ então $\overline{BO} = \overline{DO} = b$.

Como $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = 2a$ e $\overline{OF_1} = \overline{OF_2} = c$ então $\overline{AF_1} = a - c$ e $\overline{AF_2} = a + c$.

Analogamente tem-se que $\overline{CF_2} = a - c$ e $\overline{CF_1} = a + c$.

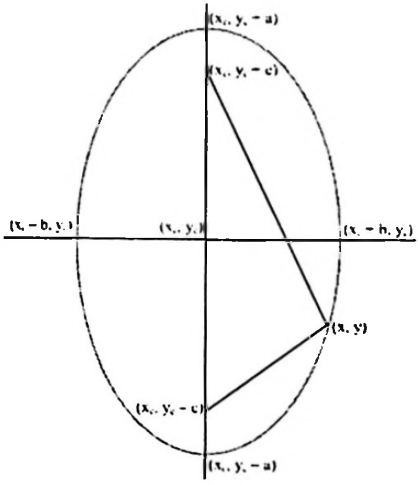
Da figura: $\overline{AO} = \overline{AF_1} + \overline{OF_1} = a$. Por simetria conclui-se que $\overline{CO} = a$.

Logo, o comprimento do eixo-maior vale $\overline{AC} = 2a$.

Perceba que a, b e c forma um triângulo retângulo, ou seja:

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ → Relação Fundamental da Elipse

7.12. EQUAÇÃO REDUZIDA



Considere uma elipse como indicado na figura ao lado, cujo eixo maior tem comprimento 2a, eixo menor tem comprimento 2b e cuja distância focal é igual a 2c.

O centro, os focos e os vértices da elipse estão explicitados em função das coordenadas do centro da elipse (x_c, y_c).

Na figura, o eixo focal está na vertical, paralelo ao eixo y, entretanto a demonstração que será apresentada a seguir também vale para o caso da elipse possuir o eixo focal na horizontal, paralelo ao eixo x.

Como a soma das distâncias de um ponto qualquer da elipse aos focos é igual a 2a:

$$\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c-c)^2}+\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c+c)^2}=2a \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2-2c(y-y_c)+c^2}=2a-\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+2c(y-y_c)+c^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2-2c(y-y_c)+c^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+2c(y-y_c)+c^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\cancel{(x-x_c)^2}+\cancel{(y-y_c)^2}-2c(y-y_c)+\cancel{c^2}=$$

$$\Rightarrow$$

$$=4a^2-4a\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+2c(y-y_c)+c^2}+\cancel{(x-x_c)^2}+\cancel{(y-y_c)^2}+2c(y-y_c)+\cancel{c^2}$$

$$4a\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+2c(y-y_c)+c^2}=4a^2+4c(y-y_c) \quad \Rightarrow$$

$$\left(a\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+2c(y-y_c)+c^2}\right)^2=\left(a^2-c(y-y_c)\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$a^2(x-x_c)^2+a^2(y-y_c)^2+\cancel{2a^2c(y-y_c)}+a^2c^2=a^4+\cancel{2a^2c(y-y_c)}+c^2(y-y_c)^2 \quad \Rightarrow$$

$$a^2(x-x_c)+(a^2-c^2)(y-y_c)^2=a^2(a^2-c^2) \quad \Rightarrow \quad a^2(x-x_c)+b^2(y-y_c)^2=a^2b^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{(x-x_c)^2}{b^2}+\frac{(y-y_c)^2}{a^2}=1} \rightarrow \text{Equação reduzida da elipse}$$

Note que se o eixo maior fosse paralelo ao eixo x a equação da elipse seria dada por:

$$\boxed{\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1}$$

Em resumo, a equação resumida de uma elipse é dada por:

$$\boxed{\frac{(x-x_c)^2}{(\text{semi-eixo horizontal})^2}+\frac{(y-y_c)^2}{(\text{semi-eixo vertical})^2}=1}$$

Exemplos:

1) (Udesc-2007) A área do triângulo cujos vértices são os focos da elipse $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$ e centro na circunferência $x^2 + (y + 3)^2 = 1$ é:

a) 9/2 b) 3 c) 9 d) 7/2 e) 18

Solução:

Uma elipse de equação $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$ é centrada na origem do sistema de eixos cartesianos, possui eixo maior 2a sobre o eixo x de modo que $a^2 = 13$ e eixo menor 2b sobre o eixo y tal que $b^2 = 4$.

Pela relação fundamental tem-se:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

Os focos desta elipse são dados por $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0) \Rightarrow F_1(-3, 0)$ e $F_2(3, 0)$

O centro da circunferência $x^2 + (y + 3)^2 = 1$ é o ponto $C(0, -3)$

Perceba que a distância entre C e a reta F_1F_2 é igual a 3.

Logo, a área do triângulo F_1F_2C vale: $S=\frac{\overline{F_1F_2}.h}{2}=\frac{6.3}{2}=9$

2) (Escola Naval-92) Um dos focos da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ é o ponto:

a) $(0, \sqrt{2})$ b) $(\sqrt{13}, 0)$ c) $(0, \sqrt{13})$ d) $(\sqrt{5}, 0)$ e) $(0, \sqrt{5})$

Solução:

$9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

Assim, a elipse é centrada na origem, possuindo eixo focal sobre o eixo y.

Da equação reduzida conclui-se que: $a = 3$ e $b = 2$

Pela relação fundamental: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

Assim, os focos da elipse são dados por $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c) \Rightarrow F_1(0, -\sqrt{5})$ e $F_2(0, \sqrt{5})$

3) (AFA-2003) Sobre o triângulo PF_1F_2 onde $P(2, 2)$ e F_1 e F_2 são focos da elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$, é correto afirmar que.

a) é isósceles. b) é obtusângulo.

c) tem área igual a 16. d) tem perímetro igual a $2\sqrt{2} + 8$.

Solução:

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1 \Rightarrow$ a = 5, b = 3 e c = 4, ou seja, elipse de centro em (0, 0), eixo menor sobre o eixo x, eixo maior sobre o eixo y e focos em $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$

$$S_{PF_1F_2}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ -4 & -4 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.16=8u.a.$$

$PF_1=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$; $PF_2=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$

$F_1F_2 = 8 \Rightarrow \Delta PF_1F_2$ É escaleno, de perímetro $2\sqrt{2}+2\sqrt{10}+8$

Como $8^2 = 64$ $(2\sqrt{10})^2 = 40$ $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 \Rightarrow F_1F_2^2 > PF_1^2 + PF_2^2 \Rightarrow \Delta PF_1F_2 \Rightarrow$ é obtusângulo

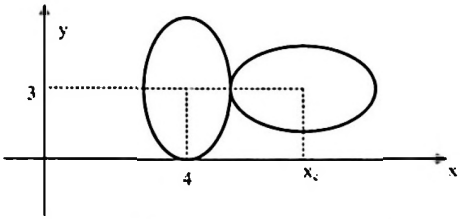
4) (ITA-96) Tangenciando externamente a elipse ε_1, tal que ε_1: $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ considere uma elipse ε_2, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de ε_1 e cujos eixos têm mesma medida que os eixos de ε_1. Sabendo que ε_2 está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de ε_2 é:

a) (7,3) b) (8,2) c) (8,3) d) (9,3) e) (9,2)

Solução:

$9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0 \Rightarrow (3x - 12)^2 + (2y - 6)^2 = 36 \Rightarrow \dfrac{(x-4)^2}{2^2} + \dfrac{(y-3)^2}{3^2} = 1.$

Assim, o semi-eixo menor é a = 2, o semi-eixo maior é b = 3 e o centro é (4, 3).



Da figura conclui-se que $x_c = 4 + 2 + 3 \Rightarrow x_c = 9 \Rightarrow C_2 = (9, 3)$

5) (ITA-2006) Os focos de uma elipse são F_1 (0, - 6) e F_2 (0, 6). Os pontos A (0, 9) e B(x, 3), x > 0, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a

a) $22\sqrt{10}$ b) $18\sqrt{10}$ c) $15\sqrt{10}$

d) $12\sqrt{10}$ e) $6\sqrt{10}$

Solução:

Como os focos são $F_1(0, - 6)$ e F_2 (0, 6), então a equação da elipse é $\lambda: \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, onde b é o semi-eixo menor e a é o semi-eixo maior.

Substituindo o ponto A (0, 9), tem-se que $a^2 = 81$ e, utilizando a relação $a^2 - c^2 = b^2$, então $b^2 = 45$, ou seja: $\lambda: \dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{81} = 1$

Sabendo que B(x,3) pertence a λ, então $x = 2\sqrt{10}$, isto é B $\left(2\sqrt{10}, 3\right)$.

A área procurada é dada por $\Delta = \dfrac{1}{2}.|D|$, onde

$D = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 6 \\ 2\sqrt{10} & 3 \end{bmatrix}$, logo $\Delta = 12\sqrt{10}$ u.a

7.13. RETA TANGENTE

Existem duas maneiras mais comuns de determinar a equação de uma reta tangente a uma elipse em determinado ponto. Os dois casos serão demonstrados através de exemplos resolvidos. Na verdade será a mesma situação problema, sendo resolvidas aplicando os dois métodos. Suponha que seja pedida a equação da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$ no ponto P(1, 2).

1º Método: Discriminante igual a zero

Suponha que a equação reduzida da reta tangente t seja dada por $y = mx + n$. Como esta reta deve passar pelo ponto P(1, 2) então: $2 = m + n \Rightarrow m = 2 - n \Rightarrow t: y = (2 - n)x + n$

As interseções da reta t com a elipse são dadas pelas soluções do sistema $\begin{cases} \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1 \\ y=(2-n)x+n \end{cases}$

Substituindo a equação da reta na elipse:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{[(2-n)x+n]^2}{6}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{3}+\frac{(2-n)^2x^2+2n(2-n)x+n^2}{6}=1 \Rightarrow$$

$$2x^2+(4-4n+n^2)x^2+(4n-2n^2)x+n^2=6 \Rightarrow (n^2-4n+6)x^2-2n(n-2)x+n^2-6=0$$

Como a reta t deve ser tangente à elipse então esta última equação do 2º grau em x deve possuir na única raiz, ou seja, seu discriminante deve ser igual a zero:

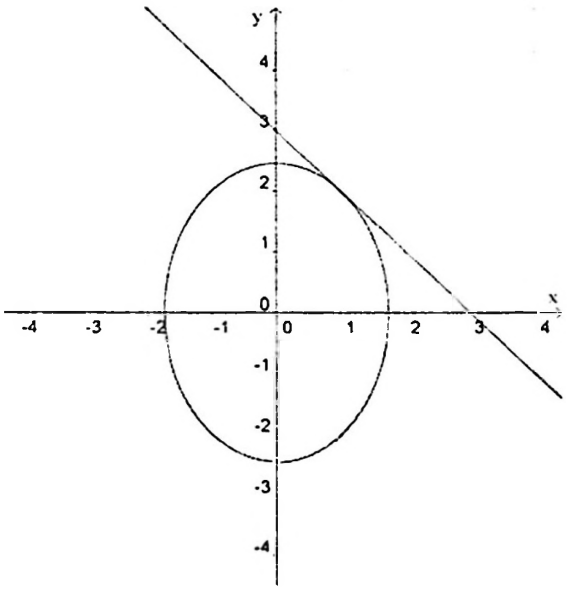
$$\Delta = b^2-4ac=0 \Rightarrow 4n^2(n-2)^2-4(n^2-4n+6)(n^2-6)=0 \Rightarrow$$

$$4n^2(n^2-4n+4)-4n^4+16n^3-24n^2+24n^2-96n+144=0 \Rightarrow$$

$$4n^4-16n^3-16n^2-4n^4+16n^3-96n+144=0 \Rightarrow 16n^2-96n+144=0 \Rightarrow 16(n-3)^2=0 \Rightarrow n=3$$

Logo, a equação da reta t é dada por $y = -x + 3$.

A figura abaixo mostra a configuração da tangência da reta $y = -x + 3$ com a elipse $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$.



2º Método: Aplicando derivadas

Suponha que a equação reduzida da reta tangente t à elipse $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=1$ no ponto P(1, 2) seja dada por $y = mx + n$. Sabe-se que o coeficiente angular m da reta tangente à uma curva qualquer contínua é igual ao valor numérico da derivada $\frac{dy}{dx}$ aplicada no ponto de tangência.

Derivando em x a equação da elipse: $\frac{2x}{3}+\frac{2y}{6}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$

No ponto P tem-se que: $m=-\frac{2x_P}{y_P}=-\frac{2.1}{2}=-1 \Rightarrow t: y=-x+n$

Como esta reta deve passar pelo ponto P(1, 2) então: $2 = -1 + n \Rightarrow n = 3$

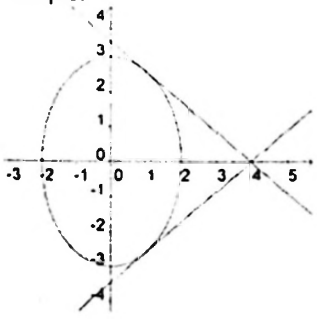
Logo, a equação da reta t é dada por $y = -x + 3$.

Exercícios

1) (UFPI-2007) A área do triângulo retângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta tangente à elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, em um dos pontos de abscissa x = 1, é igual a:

A) 4/9 unidades de área.
B) 9/4 unidades de área.
C) $2\sqrt{3}$ unidades de área.
D) $4\sqrt{3}$ unidades de área.
E) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ unidades de área.

Solução:



Inicialmente note que existem dois pontos na elipse com abscissa igual a 1. Assim, existem duas retas tangentes à elipse em pontos onde x = 1. Entretanto, pela simetria, as duas configurações produzem triângulos retângulos congruentes, como pode ser confirmado na figura ao lado.

Substituindo x = 1 na equação da elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$:

$$\frac{1}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{9}=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Derivando em x a expressão da elipse:

$$\frac{2x}{4}+\frac{2y}{9}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y}$$

Suponhamos que a reta (t) tangente à elipse seja dada pela equação reduzida (t): $y = mx + n$.

No ponto $P\left(1,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ a reta tangente à elipse possui coeficiente angular igual a:

$$m=-\frac{9x_P}{4y_P} \Rightarrow m=-\frac{9.1}{4.\frac{3\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, a equação de (t) fica: $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+n$.

Como esta reta passa pelo ponto $P\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ então: $\frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.1 + n \Rightarrow n = 2\sqrt{3}$

Logo, a equação reduzida da reta (t) é dada por $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$

Fazendo $x = 0$ tem-se que $y = 2\sqrt{3}$. Fazendo $y = 0$ tem-se que $x = 4$.

Desta forma, os pontos que a reta (t) corta os eixos coordenados são $A\left(0, 2\sqrt{3}\right)$ e $B(4, 0)$.

Desta forma, a área do triângulo OAB vale: $\frac{\overline{OA}.\overline{OB}}{2} = \frac{2\sqrt{3}.4}{2} = 4\sqrt{3}$

2) (Escola Naval-88) A reta $y = mx + 3$ tangencia a elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ se e só se:

a) $m = \pm\frac{\sqrt{23}}{2}$ b) $m = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$ c) $m = \pm\frac{\sqrt{31}}{2}$ d) $m = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}$ e) $m = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}$

Solução:

De forma que a reta seja tangente a elipse deve-se ter uma única solução no sistema $\begin{cases} y = mx + 3 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$.

Deste modo tem-se que:

$x^2 + 4(mx - 3)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4m^2x^2 + 24mx + 36 = 1 \Rightarrow (4m^2 + 1)x^2 + 24mx + 35 = 0$

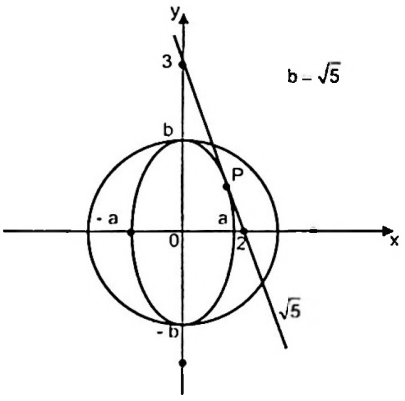
$\Delta = 0 \Rightarrow (24m)^2 - 4(4m^2 + 1)35 = 0 \Rightarrow 576m^2 - 560m^2 - 140 = 0 \Rightarrow 16m^2 = 140 \Rightarrow$

$m = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}$

3) (ITA-2003) Sabe-se que uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente à elipse no ponto P. Determine as coordenadas de P.

Solução

Esquematicamente:



Derivando a equação da elipse:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}.\frac{b^2}{a^2}$

que é o coeficiente angular da tangente à elipse num de seus pontos (x, y).

Seja P (m, n). Então, como o coeficiente angular de $3x + 2y = 6$ é $-\frac{3}{2}$:

$-\frac{3}{2} = -\frac{m}{n}.\frac{5}{a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{10}{3}.\frac{n}{m}$ (*)

I – P pertence à elipse $\overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{m^2}{\frac{10m}{3n}} + \frac{n^2}{5} = 1 \Rightarrow$

$\frac{3mn}{10} + \frac{n^2}{5} - 1 \Rightarrow 2n^2 + 3mn - 10 = 0$

II – P pertence à reta dada $\Rightarrow 3m + 2n = 6$

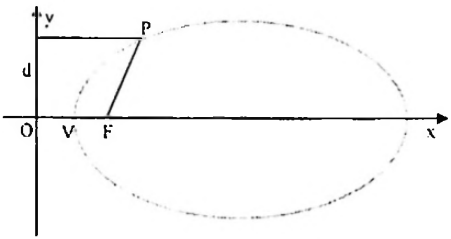
Resolvendo o sistema obtido por I e II: $m = \frac{8}{9}$ e $n = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P = \left(\frac{8}{9}, \frac{5}{3}\right)$

7.14. EXCENTRICIDADE E DIRETRIZ

Uma definição geral das cônicas pode ser dada por:

Definição de Cônica: Dados uma reta d e um ponto F não pertencente à reta. Uma cônica pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias ao ponto F e a reta d é uma constante real positiva que depende de cada curva. Esta constante será chamada de excentricidade. A reta d será chamada de diretriz e o ponto F dado será chamado de foco.

Em linguajar matemático tem-se que $e = \dfrac{d(P,F)}{d(P,d)}$



No caso de uma elipse a configuração do foco com a diretriz está representada na figura ao lado.

Perceba que na figura está representada apenas uma das diretrizes da elipse. Como uma elipse possui dois focos, então também possui duas retas diretrizes, cada uma relativa a um foco. Note também que as diretrizes de uma elipse são retas paralelas, ambas perpendiculares ao eixo focal da elipse.

Suponha uma elipse com foco F(2p, 0) e cuja reta diretriz coincide com o eixo y.

$$e = \frac{d(P,F)}{d(P,d)} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{(x-2p)^2 + y^2}}{|x|} \Rightarrow (x-2p)^2 + y^2 = e^2x^2 \Rightarrow (1-e^2)x^2 - 4px + y^2 = 4p^2 \quad (1)$$

Perceba que se $0 < e < 1$ tem-se $1 - e^2 > 0$ e assim x^2 e y^2 possuem coeficientes positivos, fazendo com que a equação (1) seja candidata à equação de uma elipse.

Dividindo a equação (1) por $1 - e^2$:

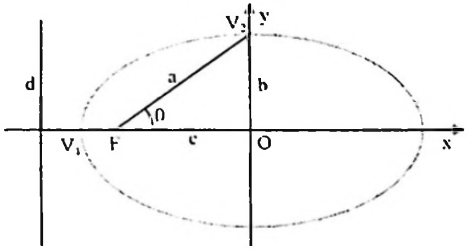
$$x^2 - \frac{4p}{1-e^2}x + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{4p^2}{1-e^2} \Rightarrow x^2 - \frac{4p}{1-e^2}x + \frac{4p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{4p^2}{(1-e^2)^2} - \frac{4p^2}{1-e^2} \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{4p^2e^2}{(1-e^2)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\left(x - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1}$$

, que é a equação de elipse centrada em $C\left(\dfrac{2p}{1-e^2}, 0\right)$, com semi-eixo maior (localizado sobre o eixo x) valendo $a = \dfrac{2pe}{1-e^2}$ e semi-eixo menor igual a $b = \dfrac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}$, da forma $\dfrac{(x-x_C)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_C)^2}{b^2} = 1$

Do exposto acima conclui-se que o lugar geométrico dos pontos P do plano xOy tais que $e = \dfrac{d(P,F)}{d(P,r)}$, onde F com $0 < e < 1$ é uma elipse.

Considere agora uma elipse centrada na origem, com semi-eixo maior valendo a sobre o eixo x, semi-eixo menor igual a b sobre o eixo y e distância focal igual a 2c. Suponha que d é uma reta diretriz da elipse e V_1 e V_2 são vértices da elipse, conforme indica a figura.



$$e = \frac{d(V_1,F)}{d(V_1,d)} \Rightarrow d(V_1,d) = \frac{a-c}{e}$$

$$e = \frac{d(V_2,F)}{d(V_2,d)} = \frac{a}{a+d(V_1,d)} \Rightarrow e = \frac{a}{a+\frac{a-c}{e}} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{e} = a + \frac{a}{c} - \frac{c}{c} \Rightarrow \boxed{e = \frac{c}{a}} \Rightarrow \boxed{e = \cos\theta}$$

Assim, em toda elipse, tem-se que $\boxed{\text{excentricidade} = \frac{\text{distância focal}}{\text{eixo maior}}}$

Exemplos:

1) (Escola Naval-91) Determine a excentricidade da elipse de equação $4x^2 + 9y^2 = 2$

a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{9}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{18}$

Solução:

$$4x^2 + 9y^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 + \frac{9y^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{2}{9}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{y^2}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = 1$$

Perceba que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é maior que $\frac{\sqrt{2}}{3}$, ou seja, o semi-eixo maior vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e o semi-eixo menor vale $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{9-4}{18} = \frac{5}{18} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

Logo: $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

2) (ITA-2005) A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, –2) são, respectivamente,

a) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solução:

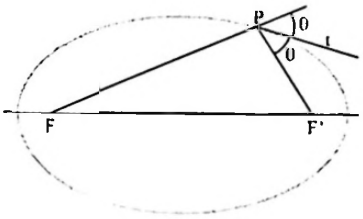
Supondo que a elipse tem eixo maior vertical, então sua equação é dada por: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Substituindo os pontos (1; 0) e (0; –2), tem-se:

$a^2 = 4$ e $b^2 = 1$, logo $c^2 = 3$, ou seja, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $2c = 2\sqrt{3}$

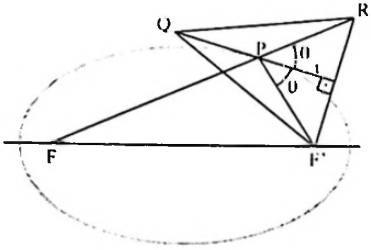
Comentário: Na verdade existem infinitas elipses (com valores distintos de distância focal e excentricidade) com centro na origem e que passam por (1, 0) e (0, - 2). A falta de clareza no enunciado gerou uma questão que admite infinitas soluções. A solução apresentada acima corresponde ao que, provavelmente, a banca elaboradora imaginou da questão.

7.15. TEOREMA DAS TANGENTES



Considere uma elipse de focos F e F' e seja P um ponto desta elipse. No triângulo PFF', a bissetriz externa relativa ao vértice P é tangente à elipse.

Demonstração:

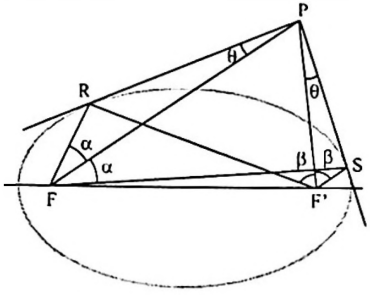


Seja t a bissetriz do ângulo externo ∠FPF', com P pertencente à elipse de focos F e F'. Q é um ponto da reta t distinto de P.
Seja R o ponto simétrico de F' com relação à reta t.
Assim, os triângulos ΔPRF' e ΔQRF' são isósceles:

$$PR = PF' \text{ e } QR = QF'.$$

Assim: $2a = PF + PF' = PF + PR = FR$
Pela desigualdade triangular em ΔQFR:
$QF + QR > FR \Rightarrow QF + QF' > 2a$
Conclui-se, portanto, que o ponto Q está no exterior da elipse.
Desde que Q pode assumir qualquer ponto da reta t distinto de P, segue que P é o único ponto de t que pertence à elipse, ou seja, t é tangente à elipse no ponto P.

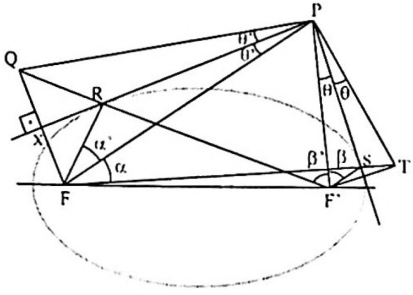
7.16. TEOREMA DE PONCELET



Seja P um ponto no exterior de uma elipse de focos F e F'. PR e PS são tangentes à elipse, onde R e S pertencem à elipse.
Sabe-se que:

$$\angle RPF = \angle SPF'$$
$$\angle PFR = \angle PFS$$
$$\angle PF'R = \angle PF'S$$

Demonstração:



Seja Q o ponto simétrico de F em relação à reta PR e seja T o ponto simétrico de F' com relação à reta PS.
Assim, tem-se que ΔPFQ é isósceles com:

$$\angle FPR = \angle QPR = \theta'$$

Analogamente, ΔPTF' é isósceles com:

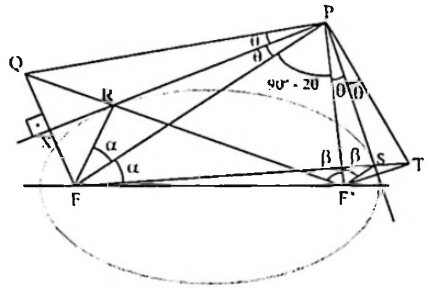
$$\angle F'PS = \angle TPS = \theta$$

Pelo teorema das tangentes tem-se $\angle QRX = \angle FRX \Rightarrow$ Q, R e F' são alinhados
Como R pertence à elipse: $RF + RF' = 2a$
Como ΔRQF é isósceles:
$RQ = RF \Rightarrow RQ + RF' = 2a \Rightarrow QF' = 2a$
Analogamente segue que $TF = 2a$
Desde que $QF' = FT$, $PF' = PT$ e $PQ = PF$ tem-se que $\Delta QF'P \equiv \Delta FTP$ (caso LLL).
Logo $\angle QPF' \equiv \angle FPT \Rightarrow 2\theta' + \angle FPF' = 2\theta + \angle FPF' \Rightarrow \theta = \theta'$
Analogamente: $\beta' = \angle PTS = \beta$ e $\alpha = \angle PQR = \alpha'$

Exemplo:

1) Demonstre que o lugar geométrico dos pontos de encontro de duas tangentes à uma elipse perpendiculares entre si é uma circunferência.

Solução:



Suponha que a partir de P, externo à elipse de focos F e F', são traçadas duas tangentes perpendiculares, PR e PS, à elipse. Seja Q o ponto simétrico de F com relação à tangente PR. Analogamente, T é simétrico de F' com relação à PS.

Pelo teorema de Poncelet sabe-se que:

$\angle RPF = \angle SPF' = \theta$, $\angle PFR = \angle PFS = \alpha$ e $\angle PF'R = \angle PF'S = \beta$

Desta forma tem-se que $\angle FPF' = 90° - 2\theta$

Assim, tem-se que $\angle FPT = 90° \Rightarrow$ ΔFPT é um triângulo retângulo: $PF^2 + PT^2 = FT^2$

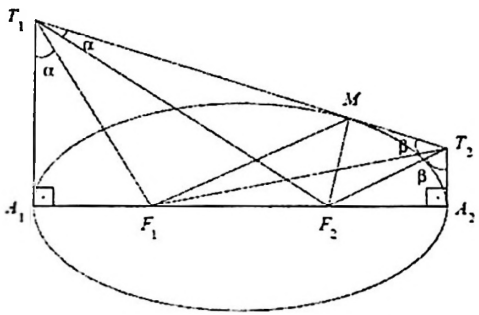
Como $PT = PF'$ e $FT = 2a$ segue que: $PF^2 + PF'^2 = 4a^2$

Se $P = (x, y)$, $F = (-c, 0)$ e $F' = (c, 0)$: $PF^2 + PF' = 4a^2 \Leftrightarrow (x + c)^2 + y^2 + (x - c)^2 + y^2 = 4a^2 \Leftrightarrow$
$2x^2 + 2y^2 + 2c^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2a^2 - (a^2 - b^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2 - b^2$

Portanto, o lugar geométrico dos pontos de encontro de duas tangentes à uma elipse perpendiculares entre si é uma circunferência com mesmo centro da elipse e raio igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$.

2) (IME-81) Dá-se uma elipse de vértices A_1 e A_2, definida por: $A_1A_2 = 2a$ (eixo focal), $B_1B_2 = 2b$ (eixo não focal). Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse, e uma tangente à elipse em um ponto M qualquer ($M \neq A_1$ e $M \neq A_2$). Esta tangente é cortada nos pontos T_1 e T_2 respectivamente pelas tangentes à elipse nos vértices A_1 e A_2. Mostre que o quadrilátero $T_1F_1F_2T_2$ é inscritível e que o produto $A_1T_1.A_2T_2$ é constante.

Solução:



Pelo teorema de Poncelet segue que:

$\angle A_1T_1F_1 = \angle MT_1F_2 = \alpha$

$\angle A_1F_1T_1 = \angle MF_1T_1 = 90° - \alpha$

$\angle A_1F_2T_1 = \angle MF_2T_1 = \theta$

$\angle A_2T_2F_2 = \angle MT_2F_1 = \beta$

$\angle A_2F_2T_2 = \angle MF_2T_2 = 90° - \beta$

$\angle A_2F_1T_2 = \angle MF_1T_2 = \delta$

Como $\angle A_1F_2A_2$ é um ângulo raso:

$20 + 180° - 2\beta = 180° \Rightarrow \beta = 0$

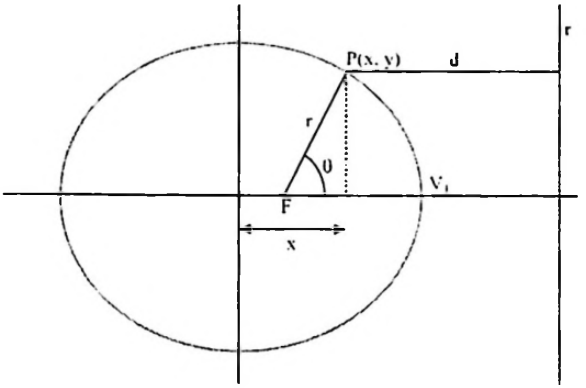
Analogamente demonstra-se que $\alpha = \delta$.

$\angle T_1F_1F_2 + \angle F_2T_2T_1 = 90° + \alpha + 90° - \alpha = 180° \Rightarrow$
$T_1F_1F_2T_2$ é inscritível

Como $\Delta T_1A_1F_1 \sim \Delta F_1A_2T_2$: $\dfrac{A_1T_1}{A_1F_1} = \dfrac{A_2F_1}{A_2T_2} \Rightarrow A_1T_1.A_2T_2 = A_1F_1.A_2F_1 = (a - c)(a + c) = b^2 \Rightarrow$

$A_1T_1.A_2T_2$ é constante

7.17. EQUAÇÃO POLAR



Suponha uma elipse de foco F e reta diretriz r. Sendo V_1 o vértice da elipse mais próximo de F:

$$e = \frac{d(V_1,F)}{d(V_1,d)} \Rightarrow d(V_1,d) = \frac{a-c}{e}$$

Sabe-se que $e = \frac{d(P,F)}{d(P,r)} \Rightarrow e = \frac{r}{d} \Rightarrow d.e = r$

Pela figura, observa-se que:

$$c + r.\cos\theta + d = a + \frac{a-c}{e} \Rightarrow e.c + e.r.\cos\theta + d.e = a.e + a - c \Rightarrow e.r.\cos\theta + d.e = c + a - c - e.c \Rightarrow$$

$$e.r.\cos\theta + r = a - e.c \Rightarrow r = \frac{a - \frac{c^2}{a}}{1 + c.\cos\theta} = \frac{\frac{a^2 - c^2}{a}}{1 + c.\cos\theta} = \frac{b^2}{a(1 + c.\cos\theta)} \Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{b^2}{a(1 + c.\cos\theta)}}$$

Obs: Na demonstração acima a diretriz corta o eixo polar, ou seja, a diretriz está à direita do pólo. Caso a reta diretriz não corte o eixo polar, ou seja, a diretriz esteja à esquerda do pólo, a equação polar de elipse fica da forma $\boxed{r(0) = \frac{b^2}{a(1 - e.\cos\theta)}}$

Exemplo:

1) Identificar a cônica cuja equação, e, coordenadas polares, é $r = \frac{4}{2 + \cos\theta}$.

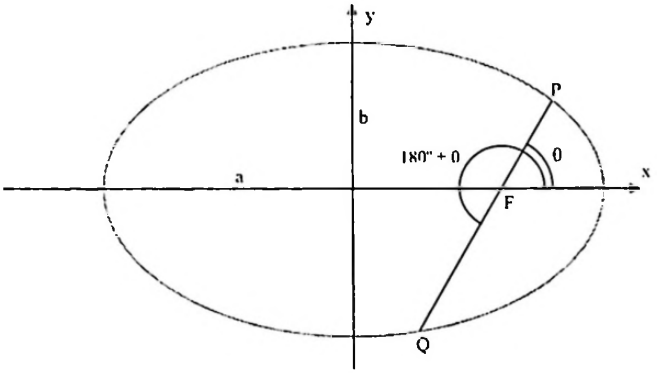
Solução:

$$r = \frac{4}{2 + \cos\theta} \Rightarrow r = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{b^2}{a} = 2 \Rightarrow a = 2c \text{ e } b^2 = 2a = 4c$$

Assim: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4c^2 = 4c + c^2 \Rightarrow c = 4/3 \Rightarrow a = 8/3 \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Assim, a equação representa uma elipse de eixo maior $2a = \frac{16}{3}$ e eixo menor $2b = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

7.18. LATUS RECTUM



Suponha uma elipse da forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, conforme a figura acima. PQ é uma corda focal, ou seja, os pontos P e Q pertencem à elipse e o segmento PQ passa por um dos focos F da elipse. Deseja-se determinar o menor valor do comprimento de PQ.

Em coordenadas polares tem-se que:

$$PF=\frac{b^2}{a(1+e.\cos\theta)}$$

$$QF=\frac{b^2}{a[1+e.\cos(180^\circ+\theta)]}=\frac{b^2}{a(1-e.\cos\theta)}$$

$$PQ=PF+QF=\frac{b^2}{a(1+e.\cos\theta)}+\frac{b^2}{a(1-e.\cos\theta)}=\frac{b^2}{a}\left[\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}\right]=\frac{b^2}{a}\left[\frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\right]\Rightarrow$$

$$PQ=\frac{2b^2}{a(1-\cos^2\theta)}$$

O valor PQ vai ser mínimo quando $1-\cos^2\theta$ for máximo, que ocorre quando $\cos^2\theta$ for mínimo, implicando que a corda focal é mínima para $\cos^2\theta=0$, fazendo com que $\theta=90^\circ$.

Assim, o valor mínimo de PQ é $\boxed{PQ=\frac{2b^2}{a}}$

Este valor mínimo da corda focal é denominado de *latus rectum*. O parâmetro de uma elipse é definido como sendo metade de seu *latus rectum*, implicando que $p=\frac{b^2}{a}$.

Desta maneira, a forma polar de uma elipse pode ser descrita de maneira mais sintética pela expressão: $\boxed{r(\theta)=\frac{p}{1+e.\cos\theta}}$

Exemplo:

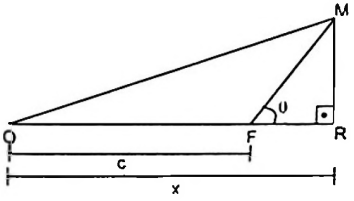
1) (IME-2004) Considere uma elipse de focos F e F', e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes $\overline{MF}$ e $\overline{MF'}$, que interceptam a elipse em P e P', respectivamente. Demonstre que a soma $(\overline{MF}/\overline{FP}) + (\overline{MF'}/\overline{F'P'})$ é constante.

Sugestão: Calcule inicialmente a soma $(1/\overline{MF}) + (1/\overline{FP})$.

Solução:

Pode-se escolher sem perda de generalidade o eixo OX para o eixo focal e a origem do sistema cartesiano coincidente com o centro da elipse.

Considere ainda a figura abaixo, onde R é a projeção ortogonal de M sobre o eixo OX, o ângulo θ formado pelo raio focal MF e o eixo das abscissas e x é a abscissa de M.



Suponha-se θ agudo. Sendo MF e MF', dois raios focais, tais que MF + MF' = 2a, onde 2a é a medida do eixo maior e MF = ρ_1 e MF' = ρ_2, pode-se escrever: $\rho_1 = a - e\,x$ (e: excentricidade) e $\rho_2 = a + e\,x$.

Da figura acima, tem-se OR = OF + FR $\Rightarrow$ x = c + FR, onde FR = $\rho_1 \cos\theta$, logo $x = c + \rho_1 \cos\theta$

Substituindo:

$\rho_1 = a - e\,x \Rightarrow \rho_1 = a - e\,(c + \rho_1 \cos\theta)$

$\rho_1\,(1 + e\cos\theta) = \frac{b^2}{a}$, em que $b^2 = a^2 - c^2$ e $\frac{b^2}{a}$ chamamos de parâmetro p, logo $\rho_1 = \frac{p}{1+e.\cos\theta}$

Para FP = ρ_1', trocamos θ por π + θ, logo: $\rho_1' = \frac{p}{1-e.\cos\theta}$

$$S = \frac{1}{MF} + \frac{1}{FP} = \frac{FP+MF}{MF.FP} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} = \frac{1+e.\cos 0}{p} + \frac{1-e.\cos 0}{p} \Rightarrow S = \frac{1}{MF} + \frac{1}{FP} = \frac{2}{p} = \frac{2.a}{b^2} \quad \text{(constante)}$$

Observe que: $\frac{1}{FP} = \frac{2}{p} - \frac{1}{MF} \Rightarrow \frac{MF}{FP} = \frac{2.MF}{p} - 1$. Analogamente: $\frac{MF'}{F'P'} = \frac{2.MF'}{p} - 1$.

Somando estas duas igualdades obtemos $\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'} = \frac{2}{p}(MF + MF') - 2$ e como MF + MF' = 2a, então

$\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'} = \frac{2a^2}{b^2} - 2$, ou seja, $\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'P'}$ é constante.

Para os casos em que θ é reto ou obtuso, a demonstração é análoga.

7.19. EQUAÇÃO PARAMÉTRICA

A equação geral de uma elipse é da forma $\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$, que pode ser reescrita da forma $\left(\frac{x-x_c}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_c}{b}\right)^2=1$. Da relação fundamental da trigonometria $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ conclui-se que existe um ângulo θ tal que $\frac{x-x_c}{a}=\cos\theta$ e $\frac{y-y_c}{b}=\text{sen}\theta$. Assim, tem-se que:

$$\begin{cases} x = x_c + a.\cos\theta \\ y = y_c + b.\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Exemplo:

1) Uma elipse E_1 é dada pela equação $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$. Uma segunda elipse E_2 é tal que se o ponto (a, b) pertence à elipse E_1 então o ponto (5a + 4, 3b + 1) pertence à elipse E_2. Determine a equação da elipse E_2.

Solução:

Parametrizando a equação da elipse E_1:

$\frac{a-2}{3}=\cos\theta \Rightarrow a = 2 + 3.\cos\theta$

$\frac{b+3}{2}=\text{sen}\theta \Rightarrow b = -3 + 2.\text{sen}\,\theta$

Se (x, y) é um ponto da elipse E_2:

$x = 5a + 4 = 5(2 + 3.\cos\theta) + 4 = 14 + 15.\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x-14}{15}$

$y = 3b + 1 = 3(-3 + 2.\text{sen}\,\theta) = -9 + 6.\text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{y+9}{6}$

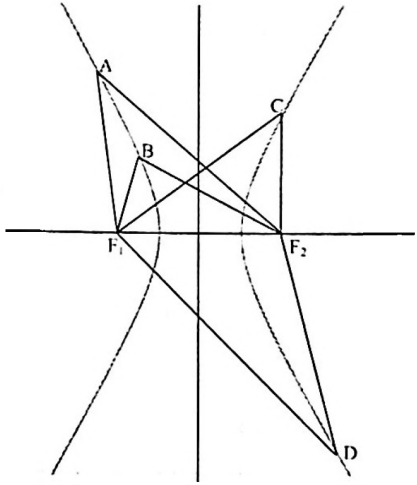
Como $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ segue que $\left(\frac{x-14}{15}\right)^2+\left(\frac{y+9}{6}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{(x-14)^2}{15^2}+\frac{(y+9)^2}{6^2}=1$

que é a equação da elipse E_2.

Hipérbole

7.20. DEFINIÇÃO

Considere um plano α e dois distintos pontos, F_1 e F_2, pertencentes a este plano. Suponha que $\overline{F_1F_2} = 2c$. Defini-se hipérbole como o conjunto de pontos P do plano α tal que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$, onde $2a < 2c$. Os pontos F_1 e F_2 são denominados de focos da hipérbole. Abaixo é possível identificar o exemplo do traçado de uma hipérbole.

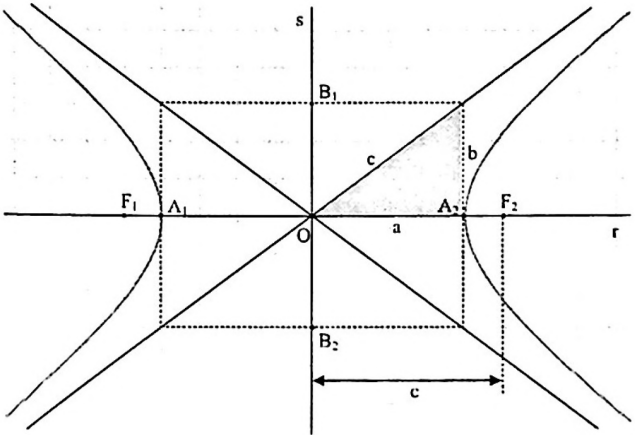


Pela definição de hipérbole tem-se que:

$$|AF_1 - AF_2| = |BF_1 - BF_2| = |CF_1 - CF_2| = |DF_1 - DF_2| = 2a$$

Perceba que uma hipérbole é formada por dois ramos, cada um associado a cada foco da hipérbole. Na figura ao lado, o ramo da esquerda está associado ao foco F_1 e representa os pontos P tais que $PF_2 - PF_1 = 2a$, enquanto que o ramo da direita está associado ao foco F_2 e representa os pontos P tais que $PF_1 - PF_2 = 2a$.

7.21. ELEMENTOS PRINCIPAIS

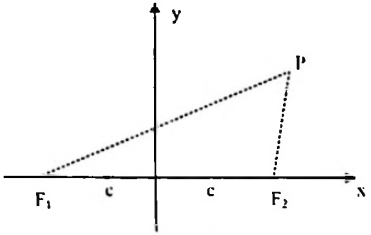


F_1 e F_2: focos da hipérbole
O: centro da hipérbole
A_1 e A_2: vértices da hipérbole
r_1 e r_2: assíntotas da hipérbole
$\overline{A_1A_2} = 2a$: eixo real ou eixo transverso
$\overline{B_1B_2} = 2b$: eixo imaginário ou eixo conjugado
$\overline{F_1F_2} = 2c$: eixo focal

Do triângulo hachurado tem-se a relação fundamental da hipérbole:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

7.22. EQUAÇÃO REDUZIDA



De modo a simplificar a demonstração os focos da hipérbole serão colocados sobre o eixo x, com o centro da hipérbole coincidindo com o centro do sistema de eixos coordenados. Suponha que um ponto P(x, y) pertença a uma hipérbole de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Deste modo, sendo c > a:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow \left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a\right)^2 \Rightarrow (x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+4a^2 \Rightarrow \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx-a^2 \Rightarrow$$

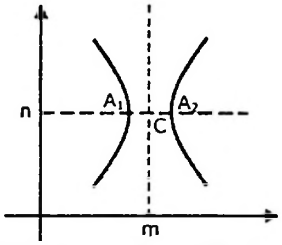
$$\left(\pm a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}\right)^2 = (cx-a^2)^2 \Rightarrow a^2x^2+a^2y^2-2a^2cx+a^2c^2 = c^2x^2-2a^2cx+a^4 \Rightarrow$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \Rightarrow b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quando a = b afirma-se que a hipérbole é equilátera.

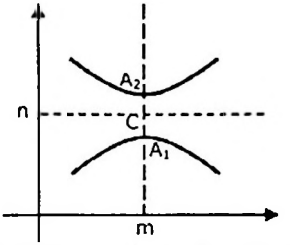
A expressão $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ representa a equação de uma hipérbole centrada na origem do sistema de eixos cartesianos ortogonais. Caso o centro da hipérbole seja um ponto qualquer $O(x_c, y_c)$ do plano cartesiano, basta fazer uma translação de eixos, mantendo os eixos paralelos e deslocando o centro dos sistema de (0, 0) para $O(x_c, y_c)$, encontrando a equação $\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=1$.

Perceba que, na demonstração acima, o eixo real A_1A_2 (onde ficam os focos) foi definido como sendo horizontal. Caso o eixo real fosse definido na vertical encontrar-se-ia a equação da hipérbole da forma $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. Abaixo é possível ver um esquema da diferença entre as equações de uma hipérbole com eixo real horizontal e vertical:



hipérbole com eixo real horizontal

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$



hipérbole com eixo real vertical

$$-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$$

Exemplos:

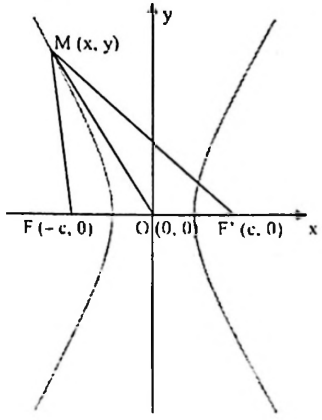
1) Determine a equação da hipérbole com focos em F_1 (0, 8), F_2 (0,–8) e vértices em A_1 (0,6) e A_2 (0,–6).
Solução:
Note que esta a hipérbole possui eixo real vertical. O centro da hipérbole é o ponto O (0, 0).
Distância focal: $2c = F_1F_2 = 16 \Rightarrow c = 8$
Assim, $a = OA_1 = 6$.
Pela relação notável: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 64 = 36 + b^2 \Rightarrow b^2 = 28$
Portanto: $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow -\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{36}=1$

2) Determine as coordenadas dos focos da hipérbole de equação $\frac{(x-1)^2}{7}-\frac{(y-2)^2}{2}=1$.

Solução:
Inicialmente note que o eixo real do hipérbole é horizontal. Assim, sendo o centro da hipérbole dado por $O(x_c, y_c)$, os focos são dados por F_1 $(x_c - c, y_c)$ e F_2 $(x_c + c, y_c)$.
Observando a equação da hipérbole conclui-se que: $x_c = 1$, $y_c = 2$, $a^2 = 7$ e $b^2 = 2$
Da relação fundamental da hipérbole: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$
Deste modo: F_1 (– 2, 2) e F_2 (4, 2)

3) (ITA-2006) Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y - 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole. Calcule sua distância focal.
Solução:
Completado os quadrados obtemos:
$\frac{(y-8)^2}{\frac{144}{9}}-\frac{(x-7)^2}{\frac{144}{16}}=1 \Rightarrow \frac{(y-8)^2}{16}-\frac{(x-7)^2}{9}=1 \Rightarrow a=4 \text{ e } b=3$
Lembrando da relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$, então: $c^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow c = 5$
Logo 2c (distância focal) = 10.

4) (IME-87) Seja uma hipérbole equilátera de centro O e focos F e F'. Mostre que o segmento determinado por O e por um ponto M qualquer da hipérbole é média proporcional entre os segmentos MF e MF'.
Solução:



Suponhamos, sem perda de generalidades, que a hipérbole esteja centrada na origem. Desde que a hipérbole é equilátera tem-se a = b, de modo que sua equação é dada por $x^2 - y^2 = a^2$, onde $c^2 = 2a^2$.

Se M(x, y) é um ponto qualquer da hipérbole:
$|MF - MF'| = 2a \Rightarrow (MF - MF')^2 = 4a^2 \Rightarrow$
$MF^2 - 2MF.MF' + MF'^2 = 4a^2 \Rightarrow$
$(x + c)^2 + y^2 - 2MF.MF' + (x - c)^2 + y^2 = 4a^2 \Rightarrow$
$2MF.MF' = x^2 + 2cx + c^2 + y^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 \Rightarrow$
$2MF.MF' = 2(x^2 + y^2) + 2(c^2 - 2a^2) \Rightarrow$
$MF.MF' = x^2 - y^2 \Rightarrow MF.MF' = MO^2 \Rightarrow MO = \sqrt{MF.MF'}$

7.23. RETA TANGENTE

Abaixo serão apresentados dois métodos para a determinação da reta tangente à uma hipérbole. Ficará a cargo do leitor escolher o método de sua preferência.

7.23.1. Método do discriminante

Os pontos de interseções entre uma reta dada por $y = mx + n$ e uma hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ são determinados pelas soluções do sistema $\begin{cases} y = mx + n \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$.

Se este sistema não apresentar solução então a reta não intersecta a hipérbole. Se existir apenas uma solução para o sistema, segue diretamente que a reta é tangente à hipérbole e a solução do sistema é o ponto de tangência. Se o sistema possuir duas soluções afirma-se que a reta é secante à hipérbole e as duas soluções representam os pontos de interseção da reta com a hipérbole.

Substituindo a equação da reta na equação da hipérbole obtém-se $\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1$, que desenvolvida gera uma equação de 2º grau em x. Assim, de modo que a reta seja tangente à hipérbole é necessário e suficiente que o discriminante desta equação seja igual a zero.

A aplicação deste método será mostrada em um exemplo numérico resolvido.

Deseja-se determinar a equação da reta tangente à hipérbole $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ e que passa pelo ponto (1, 2). Suponha que a reta possua equação $y = mx + n$.

Como a reta passa pelo ponto (1, 2): $2 = m + n \Rightarrow n = 2 - m$

Logo, a equação da reta fica da forma $y = mx + 2 - m$

Substituindo a equação da reta na equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{(mx+2-m)^2}{4} = 1 \Rightarrow 2x^2 - m^2x^2 - 2m(2-m)x - (2-m)^2 = 4 \Rightarrow$$
$$2x^2 - m^2x^2 - 2m(2-m)x - 4 + 4m - m^2 = 4 \Rightarrow (m^2-2)x^2 - 2m(m-2)x + m^2 - 4m + 8 = 0$$
$$\Delta = 0 \Rightarrow [2m(m-2)]^2 - 4(m^2-2)(m^2-4m+8) = 0 \Rightarrow$$
$$4m^2(m^2-4m+4) - 4(m^4 - 4m^3 + 6m^2 + 8m - 16) = 0 \Rightarrow$$
$$4m^4 - 16m^3 + 16m^2 - 4m^4 + 16m^3 - 24m^2 - 32m + 64 = 0 \Rightarrow -8m^2 - 32m + 64 = 0 \Rightarrow$$
$$m^2 + 4m - 8 = 0 \Rightarrow m = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

Assim, existem duas retas tangentes à hipérbole $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ e que passam pelo ponto (1, 2), cada uma relativa a cada valor de m:

$$y = (-2 + 2\sqrt{3})x + 4 - 2\sqrt{3} \quad \text{e} \quad y = (-2 - 2\sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3}$$

7.23.2. Método da Derivada

Outra maneira de determinar a reta tangente a uma hipérbole consiste em usar a teoria das derivadas, onde o coeficiente angular da reta tangente a uma curva é igual ao valor da derivada da curva no ponto de tangência. O estudo das derivadas é normalmente abordado no nível superior, porém pode ser usado sem problemas na resolução de problemas de ensino médio. Caso o leitor ainda não tenha contato com derivadas é interessante que procure um bom livro de cálculo para poder acompanhar a aplicação deste método. Semelhantemente ao método anterior, o método da derivada será apresentado na resolução de um exemplo numérico.

Por exemplo, seja a hipérbole $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$. Para determinar a reta que passa pelo ponto (1, 2) e que é tangente à hipérbole inicialmente deve-se derivar, em x, a equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \Rightarrow x - 2y.y' = 0 \Rightarrow x = 2y.y' \Rightarrow y' = \frac{x}{2y}$$

Se (a, b) é o ponto onde a reta é tangente à hipérbole, tem-se que $y' = \frac{a}{2b}$.

Portanto, se a equação da reta é dada por $y = mx + n \Rightarrow y = \frac{a}{2b}x + n$

Como o ponto (a, b) pertence à hipérbole: $\frac{a^2}{2} - b^2 = 1 \Rightarrow a^2 - 2b^2 = 2$ (1)

Como a reta passa pelo ponto (a, b): $b = \frac{a^2}{2b} + n \Rightarrow n = \frac{2b^2 - a^2}{2b} = -\frac{1}{b} \Rightarrow y = \frac{a}{2b}x - \frac{1}{b}$

Desde que esta reta passa pelo ponto (1, 2): $2 = \frac{a}{2b} - \frac{1}{b} \Rightarrow 4b = a - 2 \Rightarrow a = 4b + 2$ (2)

Substituindo (2) na equação (1): $(4b+2)^2 - 2b^2 = 2 \Rightarrow 16b^2 + 16b + 4 - 2b^2 = 2 \Rightarrow$

$7b^2 + 8b + 1 = 0 \Rightarrow (7b + 1)(b + 1) = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{7}$ ou $b = -1$

Portanto, existem duas retas que são tangentes à hipérbole, cada uma associada a um valor de b.

Se $b = -\frac{1}{7} \Rightarrow a = \frac{10}{7} \Rightarrow m = -5$ e $n = 7 \Rightarrow y = -5x + 7$

Se $b = -1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow m = 1$ e $n = 1 \Rightarrow y = x + 1$

Exemplos:

1) (ITA-2008) Dada a cônica $\lambda : x^2 - y^2 = 1$,qual das retas abaixo é perpendicular à λ no ponto $P = (2, \sqrt{3})$?

a) $y = \sqrt{3}(x - 1)$ b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1)$ d) $y = \frac{-\sqrt{3}}{5}(x - 7)$

e) $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}(x - 4)$

Solução:

Derivando em x a equação da cônica:

$2x - 2y.y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y} \Rightarrow y' = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Desta forma, o coeficiente angular da reta normal à cônica em P vale: $m = -\frac{1}{y'} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sendo a reta dada por $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + n$, de modo que esta reta passe por P:

$\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.2 + n \Rightarrow n = \sqrt{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{3}}{2}(x - 4)$

2) (IME-2009) Seja A (a, b) o ponto da cônica $x^2 - y^2 = 27$ mais próximo da reta $4x - 2y + 3 = 0$. O valor de a + b é

A) 9 B) 4 C) 0 D) –4 E) –9

Solução:

A menor distância ocorre no ponto de tangência da cônica em relação à reta paralela a $4x - 2y + 3 = 0$.

Derivando a equação da hipérbole, temos: $2x - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = +\frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$

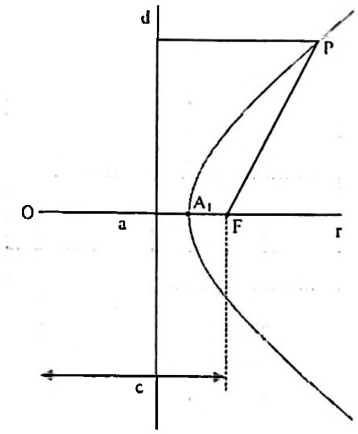
Substituindo esse valor na equação da cônica, temos:

$4y^2 - y^2 = 27 \Rightarrow 3y^2 = 27 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3 \Rightarrow x = \pm 6$

O ponto mais próximo tem x e y negativos. Logo: $x = -3$ e $y = -6 \Rightarrow x + y = -9$

7.24. EXCENTRICIDADE, DIRETRIZ E ASSÍNTOTAS

No item 8.8, do capítulo sobre elipse, foi apresentada uma definição sobre cônicas da seguinte forma: Dados uma reta d e um ponto F não pertencente à reta. Uma cônica pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias ao ponto F e a reta d é uma constante real positiva que depende de cada curva. Esta constante será chamada de excentricidade. A reta d será chamada de diretriz e o ponto F dado será chamado de foco. Em outras palavras: $e = \dfrac{d(P,F)}{d(P,d)}$



Suponha uma hipérbole onde um dos focos está localizado no ponto F(2p, 0) e cuja reta diretriz coincide com o eixo y. Portanto, pelo definição de excentricidade:

$$e = \frac{d(P,F)}{d(P,d)} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{(x-2p)^2 + y^2}}{|x|}$$

Note que esta expressão é idêntica à obtida no item 8.8 do capítulo de elipse, porém agora será analisada a situação em que $e > 1$.

$$e = \frac{\sqrt{(x-2p)^2 + y^2}}{|x|} \Rightarrow (x-2p)^2 + y^2 = e^2x^2 \Rightarrow$$

$$(e^2-1)x^2 + 4px - y^2 = 0 \quad (1)$$

Se $e > 1$ tem-se que os coeficientes de x^2 e y^2 são distintos, sendo o coeficiente de x^2 positivo e o de y^2 negativo, indicando que a equação (1) é uma candidata a uma hipérbole.

Desenvolvendo:

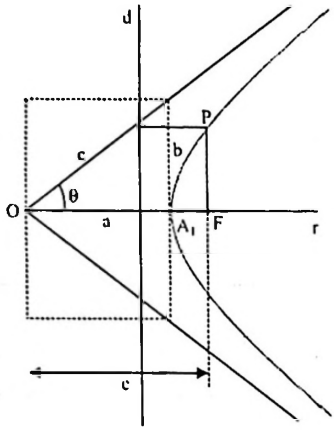
$$x^2 + \frac{4p}{e^2-1}x - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{4p^2}{e^2-1} \Rightarrow x^2 + \frac{4p}{e^2-1}x + \frac{4p^2}{(e^2-1)^2} - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{4p^2}{(1-e^2)^2} + \frac{4p^2}{e^2-1} \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{2p}{e^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{4p^2e^2}{(1-e^2)^2} \Rightarrow \frac{\left(x + \frac{2p}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{e^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{2pe}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2} = 1$$

, que é a expressão de uma hipérbole com centro em $O\left(-\dfrac{2p}{e^2-1}, 0\right)$, com semi-eixo real (localizado sobre o eixo x) valendo $a = \dfrac{2pe}{e^2-1}$ e semi-eixo imaginário igual a $b = \dfrac{2pe}{\sqrt{e^2-1}}$, da forma $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Do exposto acima conclui-se que o lugar geométrico dos pontos P do plano xOy tais que $e = \dfrac{d(P,F)}{d(P,d)}$, onde F com $e > 1$ é uma hipérbole.

7.24.1. Valor da excentricidade



Considere uma hipérbole com centro na origem e foco em F(c, 0). Fazendo P coincidir com o vértice A_1:

$$e = \frac{d(A_1,F)}{d(A_1,d)} \Rightarrow e = \frac{c-a}{d(A_1,d)} \Rightarrow d(A_1,d) = \frac{c-a}{e}$$

Tome agora o ponto P da hipérbole que possui a mesma coordenada x de F. Assim, se PF = t tem-se P(c, t):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} - \frac{t^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{t^2}{b^2} = \frac{c^2-a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$t^2 = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow t = \frac{b^2}{a}$$

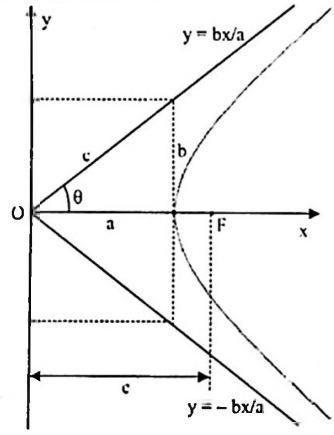
Mais uma vez, pelo definição de excentricidade:

$$e = \frac{d(P,F)}{d(P,d)} = \frac{t}{d(A_1,F) + d(A_1,d)} = \frac{b^2}{a\left(c - a + \frac{c-a}{e}\right)} \Rightarrow$$

$$b^2 = ea(c-a) + ac - a^2 \Rightarrow ea(c-a) = c^2 - ac \Rightarrow e = \frac{c}{a}$$

Deste modo, podemos concluir que o valor da excentricidade de uma hipérbole é igual à secante do ângulo θ indicado na figura.

7.24.2. Assíntotas



Sabe-se que a equação de uma hipérbole centrada na origem com eixo real horizontal é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Resolvendo esta equação para y obtém-se:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Quando x tende para infinito o radical $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ se aproxima de 1 e assim a equação tende para $y = \pm\frac{b}{a}x$. As retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são denominadas de assíntotas da hipérbole. Deste modo, quando x tende para infinito o gráfico da hipérbole fica a uma distância infinitesimal de cada uma destas retas, porém sem intersectar as assíntotas. Perceba que as assíntotas coincidem com as diagonais do retângulo que é possível desenhar em toda hipérbole, cujo centro é o mesmo centro da hipérbole e lados iguais a 2a e 2b, sendo 2c a diagonal, conforme a figura acima.

Exemplos:

1) (AFA-2001) A equação reduzida da hipérbole, cujos focos são os extremos do eixo menor da elipse de equação $16x^2 + 25y^2 = 625$, e cuja excentricidade é igual ao inverso da excentricidade da elipse, é

a) $16y^2 - 9x^2 = 144$ b) $9y^2 - 16x^2 = 144$ c) $9x^2 - 16y^2 = 144$ d) $16x^2 - 9y^2 = 144$

Solução:

$$16x^2 + 25y^2 = 625 \Rightarrow 4^2x^2 + 5^2y^2 = 5^4 \Rightarrow \frac{x^2}{(25/4)^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \Rightarrow a = 25/4 \text{ e } b = 5$$

Na elipse: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (25/4)^2 = 5^2 + c^2 \Rightarrow c = 15/4$
Excentricidade da elipse: $e = c/a = 3/5$
Excentricidade da hipérbole $e' = 1/e = 5/3$
Como os focos da hipérbole são os extremos do eixo menor da elipse: $2c' = 2b \Rightarrow c' = 5$
$e' = c'/a' \Rightarrow 5/3 = 5/a' \Rightarrow a' = 3$
$c'^2 = a'^2 + b'^2 \Rightarrow 25 = 9 + b'^2 \Rightarrow b'^2 = 16$

Hipérbole: $-\frac{x^2}{b'^2}+\frac{y^2}{a'^2}=1 \Rightarrow -\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow -9x^2+16y^2=144$

2) (IME-2010) Considere as hipérboles que passam pelos pontos (- 4,2) e (-1,-1) e apresentam diretriz na reta y = - 4. Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

Solução:

Para que um ponto P pertença à hipérbole H, a razão entre as distâncias de P ao foco, F, e à diretriz correspondente, d, deve ser igual à excentricidade, e, de H. Por sua vez, deve-se impor $e > 1$, a fim de que a cônica seja uma hipérbole, de fato: Assim, sendo F(x,y), A(-4,2), B(-1,-1) e d: y = -4.
Deve-se cumprir:

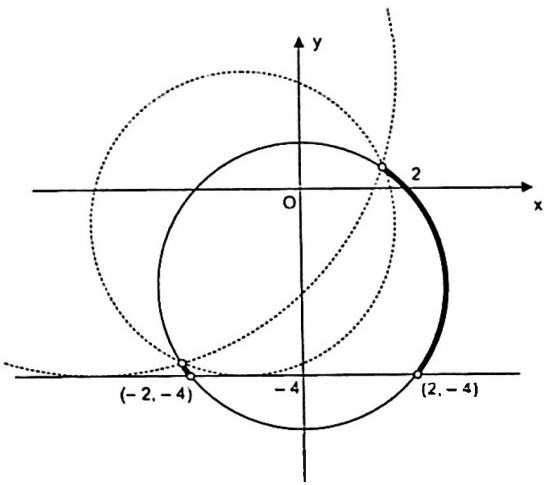
$$e=\frac{FA}{Ad}=\frac{FB}{Bd}>1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}}{6} = \dfrac{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}{3} \\ (x+4)^2+(y-2)^2 > 36 \\ (x+1)^2+(y+1)^2 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y+2)^2 = 8 \\ (x+4)^2+(y-2)^2 > 36 \\ (x+1)^2+(y+1)^2 > 9 \end{cases}$$

Adicionalmente, como os pontos A, B e F devem estar num mesmo semiplano em relação à d, pode-se concluir que o lugar geométrico é descrito por:

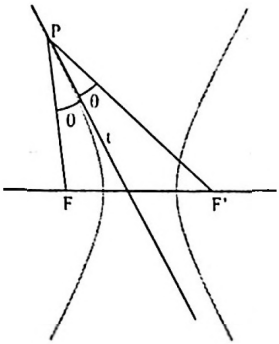
$$\begin{cases} x^2+(y+2)^2=8 \\ (x+4)^2+(y-2)^2>36 \\ (x+1)^2+(y+1)^2>9 \\ y>-4 \end{cases}$$

Sendo: C_1: $x^2 + (y + 2)^2 = 8$
C_2: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 36$
C_3: $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$,
Tem-se que:

$$C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \left\{\left(\frac{-1+3\sqrt{7}}{4},\frac{-7+3\sqrt{7}}{4}\right), \left(\frac{-1-3\sqrt{7}}{4};\frac{-7-3\sqrt{7}}{4}\right)\right\}.$$



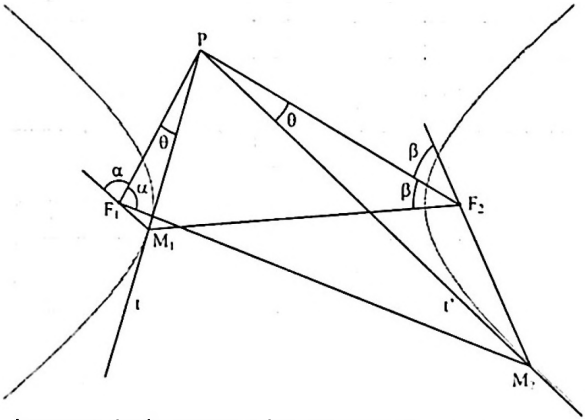
7.25. TEOREMA DAS TANGENTES



Seja P um ponto sobre uma hipérbole de focos F e F'. Por P traça-se uma reta t que é tangente à hipérbole. A reta t é a bissetriz do ângulo ∠FPF'.

A demonstração deste teorema é análoga à demonstração do teorema das tangentes para elipses (item 8.6 deste volume), onde deve-se demonstrar que, para qualquer outro ponto Q da bissetriz de ∠FPF', tem-se que $|QF - QF'| < 2a$, implicando que Q não pertence à hipérbole. Deste modo, P é o único ponto da reta t que pertence à hipérbole, fazendo com que a bissetriz de ∠FPF' seja tangente à hipérbole.

7.26. TEOREMA DE PONCELET



Por um ponto P são traçadas duas tangentes, t e t', à hipérbole de focos F_1 e F_2, conforme mostra a figura.

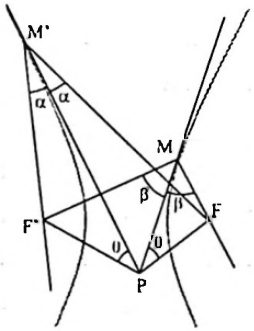
O teorema de Poncelet garante que $\angle F_1Pt = \angle F_2Pt'$. Além disso, PF_1 é bissetriz de um dos ângulos formados por $M_1F_1M_2$ (no caso da figura ao lado o ângulo externo) e PF_2 é bissetriz de um dos ângulos formados por $M_1F_2M_2$.

A demonstração deste teorema é praticamente idêntica à demonstração do teorema de Poncelet para elipses, que foi abordado no item 8.7 do capítulo sobre elipse. O leitor deverá fazer as devidas adaptações da demonstração do teorema sobre elipse para hipérbole.

Exemplo:

1) Demonstre que os raio vetores que unem os focos a dois pontos de uma hipérbole são tangentes a uma mesma circunferência.

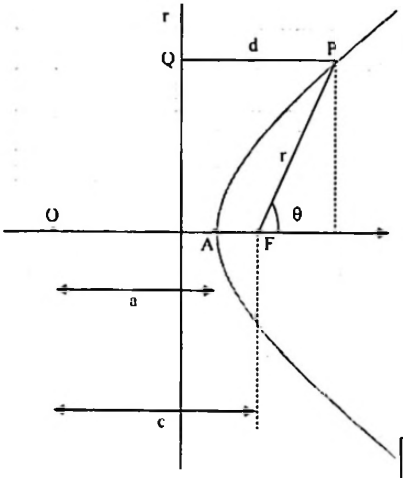
Solução:



Sejam M e M' dois pontos pertencentes a uma hipérbole. As tangentes à hipérbole traçadas por M e M' encontram-se em P. Pelo teorema das tangentes: ∠FMP ∠F'MP = β e ∠F'M'P = ∠FM'P = α. Como P pertence à bissetriz de ∠FMF' tem-se que as distâncias de P às retas FM e F'M são iguais. Como P pertence à bissetriz de ∠F'M'F tem-se que as distâncias de P até às retas F'M' e FM' são iguais.

Pelo teorema de Poncelet, tem-se que PF' é bissetriz do ângulo externo de ∠MF'M', implicando que P está a uma mesma distância de F'M' e de MF'. Assim, P está a uma mesma distância de FM, F'M, F'M' e FM', fazendo com que estes raios vetores sejam tangentes a uma circunferência com centro em P.

7.27. EQUAÇÃO POLAR



Suponha uma hipérbole de foco F e reta diretriz r. Sendo A o vértice da elipse mais próximo de F:

$$e = \frac{d(A,F)}{d(A,r)} \Rightarrow d(A,r) = \frac{c-a}{e}$$

Sabe-se que $e = \frac{d(P,F)}{d(P,r)} \Rightarrow e = \frac{r}{d} \Rightarrow d.e = r$

Pela figura, observa-se que:

$c + r.\cos\theta = d + a - d(A,r) \Rightarrow$

$$c + r.\cos\theta = d + a - \frac{c-a}{e} \Rightarrow$$

$$e.c + e.r.\cos\theta = d.e + a.e - c + a \Rightarrow$$

$$r - c.r.\cos\theta = c - a - c + c.c \Rightarrow r - c.r.\cos\theta = c.c - a \Rightarrow$$

$$r = \frac{\frac{c^2}{a} - a}{1 - e.\cos\theta} = \frac{\frac{c^2 - a^2}{a}}{1 - e.\cos\theta} = \frac{b^2}{a(1 - e.\cos\theta)} \Rightarrow$$

$$\boxed{r(\theta) = \frac{b^2}{a(1 - c.\cos\theta)}}$$

Obs: Na demonstração acima a diretriz não corta o eixo polar, ou seja, a diretriz está à esquerda do pólo. Caso a reta diretriz corte o eixo polar, ou seja, a diretriz esteja à direita do pólo, a equação polar de hipérbole fica da forma $\boxed{r(\theta) = \frac{b^2}{a(1 + e.\cos\theta)}}$

Exemplo:

1) Seja a hipérbole de eixo vertical e centro na origem, cuja equação polar é $\rho = \frac{24}{5 - 7.\cos\theta}$. Determine sua equação reduzida.

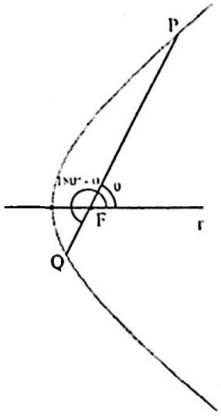
Solução:

Sendo a equação paramétrica de uma hipérbole da forma $\rho = \frac{b^2}{a(1 - e.\cos\theta)}$ tem-se:

i) $b^2 = 24$;
ii) $a = 5$
iii) $a.c = c = 7$

Como o eixo real é vertical: $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow -\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{25} = 1$

7.28. LATUS RECTUM



Suponha uma hipérbole da forma $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, conforme a figura acima. PQ é uma corda focal, ou seja, os pontos P e Q pertencem à hipérbole e o segmento PQ passa por um dos focos F da hipérbole. Deseja-se determinar o menor valor do comprimento de PQ.

Em coordenadas polares tem-se que:

$$PF=\frac{b^2}{a(1-e.\cos\theta)}$$

$$QF=\frac{b^2}{a[1-e.\cos(180^o+\theta)]}=\frac{b^2}{a(1+e.\cos\theta)}$$

$$PQ=PF+QF=\frac{b^2}{a(1-e.\cos\theta)}+\frac{b^2}{a(1+e.\cos\theta)}=\frac{b^2}{a}\left[\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}\right]=$$

$$=\frac{b^2}{a}\left[\frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\right]$$

Assim, conclui-se que $PQ=\frac{2b^2}{a(1-\cos^2\theta)}$

O valor PQ vai ser mínimo quando $1-\cos^2\theta$ for máximo, que ocorre quando $\cos^2\theta$ for mínimo, implicando que a corda focal é mínima para $\cos^2\theta=0$, fazendo com que $\theta=90^o$.

Assim, o valor mínimo de PQ é $\boxed{PQ=\frac{2b^2}{a}}$

Este valor mínimo da corda focal é denominado de *latus rectum*. O parâmetro de uma hipérbole é definido como sendo metade de seu *latus rectum*, implicando que $p=\frac{b^2}{a}$.

Desta maneira, a forma polar de uma hipérbole pode ser descrita de maneira mais sintética pela expressão: $\boxed{r(\theta)=\frac{p}{1-e.\cos\theta}}$

7.29. EQUAÇÃO PARAMÉTRICA

A equação geral de uma hipérbole com eixo real horizontal é da forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, que pode ser reescrita da forma $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$. Da relação trigonométrica $\sec^2\theta-tg^2\theta=1$ conclui-se que existe um ângulo θ tal que $\frac{x-x_0}{a}=\sec\theta$ e $\frac{y-y_0}{b}=tg\theta$. Assim, tem-se que:

$$\boxed{\begin{array}{l}x=x_c+a.\sec\theta\\ y=y_c+b.tg\,\theta\end{array}}$$

Exercícios

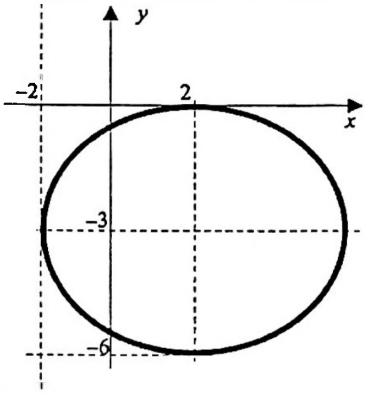
1) (UFAM-2008) Uma parábola tem foco no ponto $F(3, 5)$ e sua diretriz é a reta de equação $y = -3$. Então a sua equação é igual a:

a) $(x-3)^2 = 8(y-1)$ b) $(x-3)^2 = -16(y-1)$

c) $(x-3)^2 = 16(y-1)$ d) $(x-3)^2 = -8(y-1)$

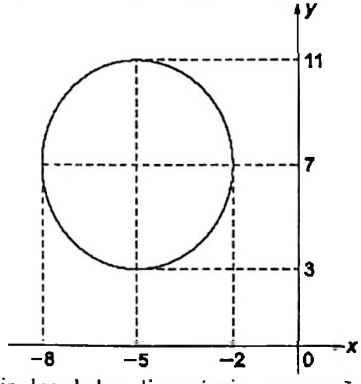
e) $(x-3)^2 = 8(y+1)$

2) (UFAM-2010) A equação da elipse cujo gráfico é mostrado na figura a seguir é dada por:



a) $16x^2 + 9y^2 + 96x - 36y + 36 = 0$
b) $16x^2 + 9y^2 - 96x + 36y + 36 = 0$
c) $9x^2 + 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$
d) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$
e) $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$

3) (Unesp-2003) A figura representa uma elipse.



A partir dos dados disponíveis, a equação desta elipse é

a) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$

b) $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 1$

c) $(x-5)^2 + (y-7)^2 = 1$

d) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+7)^2}{16} = 1$

e) $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{(y-4)^2}{7} = 1$

4) (UFPE-2013) Para cada número real α, analise as proposições a seguir, referentes à representação geométrica da equação $x^2 + \alpha y^2 + 2x - 2\alpha y = 0$ em um sistema de coordenadas cartesianas xOy.

0-0) Se $\alpha = 1$, a equação representa uma circunferência.

1-1) Se $\alpha = 0$, a equação representa uma reta.

2-2) Se $\alpha = 3$, a equação representa uma hipérbole.

3-3) Se $\alpha = -2$, a equação representa uma elipse.

4-4) Se $\alpha = -1$, a equação representa a união de duas retas.

5) (UCS-2007) O centro de uma circunferência está localizado no ponto de interseção das retas de equações $y = 2 - x$ e $y = x - 2$, e seu raio é dado pela distância entre os pontos de interseção da parábola de equação $y = x^2$ com a reta descrita por $y = 2x$. A equação que descreve essa circunferência é

a) $(x-2)^2 + y^2 = 10$. b) $(x-2)^2 + y^2 = 20$.

c) $x^2 + (y-2)^2 = 20$. d) $x^2 - (y-2)^2 = 10$.

e) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 20$.

6) (Udesc-2010) Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é uma parábola com vértice no centro na circunferência $4x^2 + 4y^2 - 12x - 16y - 3 = 0$ e que passa pelo ponto de interseção da reta $y = 2x - 1$ com o eixo das ordenadas. Então o valor de a b c é igual a:

a) 3/2 b) 7/9 c) 13/3 d) 11/3 e) 5/3

7) (Udesc-2011) A parábola que tem o foco em (0,2) e a diretriz na reta $y = -1$ contém o ponto:

a) (0, 2) b) (– 1, 1/3) c) (– 1, 2/3)

d) (1, 1/3) e) (0, – 1)

8) (Udesc-2010) Determine a equação da circunferência cujo centro é o vértice da parábola que passa pelos focos da hipérbole $9x^2 - 16(y-1)^2 = 144$ e pelo ponto P(1, - 3), sabendo que o raio da circunferência é igual à excentricidade da

hipérbole dada. Explicite todos os cálculos, com a maior clareza possível.

9) (Udesc-2009) A equação da circunferência que é tangente à hipérbole $16x^2 - 32x - 9y^2 - 128 = 0$, e cujo centro coincide com o centro desta mesma hipérbole, é dada por:
a) $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$ d) $x^2 - y^2 - 2y - 24 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$

10) (Udesc-2009) Determine a equação da parábola que passa pelos focos da hipérbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ e pelo ponto de interseção entre a reta $y - 2x + 7 = 0$ e o eixo das ordenadas.

11) (Udesc-2008) Calcule a área do triângulo ABC, em que os vértices A e B são os focos da hipérbole de equação $-4x^2 - y^2 = 16$ e o vértice C é o centro da circunferência de equação $x^2 - 6x + y^2 = 34$.

12) (Udesc-2007) A área do triângulo cujos vértices são os focos da elipse $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$ e centro na circunferência $x^2 + (y + 3)^2 = 1$ é:
a) 9/2 b) 3 c) 9 d) 7/2 e) 18

13) (UEL-2007) Seja a parábola de equação $y = 3x^2 + 4$. As equações das retas tangentes ao gráfico da parábola que passam pelo ponto P = (0 ,1) são:
a) $y = 5x + 1$ e $y = -5x + 1$
b) $y = 6x + 1$ e $y = -6x + 1$
c) $y = 3x/2 + 1$ e $y = -3x/2 + 1$
d) $y = 5x/4 + 1$ e $y = -5x/4 + 1$
e) $y = 5x - 1$ e $y = -5x - 1$

14) (UEL-2007) O vértice, o foco e a reta diretriz da parábola de equação $y = x^2$ são dados por:
a) Vértice: (0, 0); Foco: (0, 1/4); Reta diretriz $y = -1/4$
b) Vértice: (0, 0); Foco: (0, 1/ 2); Reta diretriz $y = -1/2$
c) Vértice: (0, 0); Foco: (0, 1); Reta diretriz $y = -1$
d) Vértice: (0, 0); Foco: (0 , -1); Reta diretriz $y = 1$
e) Vértice: (0, 0); Foco: (0, 2); Reta diretriz $y = -2$

15) (UEL-2009) Considere o círculo $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ de raio r e a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Nesse caso, pode-se afirmar que:
a) se $r < 1$, então as curvas se interceptam em quatro pontos.
b) se $r = 1$, então as curvas tem quatro pontos em comum.
c) se $r = 1$ as curvas se interceptam em (0, 1) e (0, -1).
d) se $r = \sqrt{17}$, então as curvas se interceptam apenas nos pontos $(3, 2\sqrt{2})$ e $(-3, -2\sqrt{2})$
e) se $r > \sqrt{17}$, então as curvas se interceptam em quatro pontos.

16) (UEL-2011) Determine a equação da circunferência centrada no vértice da parábola $y = x^2 - 6x + 8$ e que passa pelos pontos em que a parábola corta o eixo x.
a) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$
b) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$
c) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$
d) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = \sqrt{2}$
e) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

17) (UESPI-2009) Qual a menor distância entre um ponto da hipérbole com equação $x^2 - y^2 = 1$ e o ponto com coordenadas (0,1)?
a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6}/2$ c) $\sqrt{6}/3$
d) $\sqrt{5}/2$ e) 1,4

18) (UFBA-2009) No sistema de coordenadas cartesianas, as curvas E e C satisfazem as seguintes propriedades:
• Para qualquer ponto Q(x, y) de E, a soma das distâncias de Q(x, y) a $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ e de Q(x, y) a $F_2(\sqrt{3}, 0)$ é constante e igual a 4u.c.
• C é uma parábola com vértice na interseção de E com o semi-eixo positivo Oy e passa por F_2.
Com base nessas informações, determine os pontos de interseção de E e C.

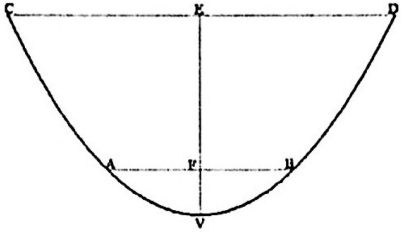
19) (UFBA-2012) Dados os pontos P(−1,2) e Q(1, 2), determine o par de coordenadas cartesianas de cada ponto S da parábola $y = 2x^2$ de abscissa $x \neq \pm 1$, de modo que as retas SP e SQ sejam perpendiculares.

20) (UFC-2002) O número de pontos de interseção das curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{2} = 1$ é igual a:
a) 0 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

21) (UFC-2007) Encontre as equações das retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -1)$.

22) (Udesc-2008) Os pontos A(3, 0) e B(0, 3) são vértices de um triângulo; o terceiro vértice é o ponto M, interseção das retas de equações $2x - 3y + 9 = 0$ e $7x - 3y - 21 = 0$. Encontre a equação da hipérbole cujo centro é o ponto C(0,0), o eixo real está sobre o eixo das abscissas, a distância entre o foco é o dobro da altura do triângulo ABM relativa ao lado AB e a excentricidade é $e = \sqrt{2}$.

23) (UFCG-2009) Uma seção transversal de um refletor parabólico é mostrada na figura abaixo. A lâmpada é colocada no foco F e sabe-se que |AB| = 8cm e |VE|=11cm, onde V é o vértice da parábola. Considere um sistema de coordenadas em que V seja o ponto (0,0). Sabe-se que uma equação de uma parábola de vértice V(0,0) e foco F(0,c) é $x^2 = 4cy$. Com essas informações, a equação da parábola e o comprimento |CD| são, respectivamente:



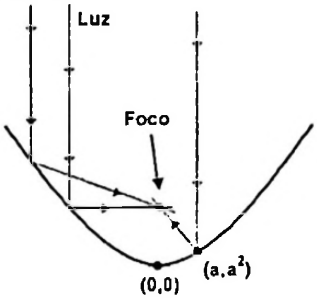
a) $x^2 = 8y$, $|CD| = 11$ cm
b) $x^2 = 10y$, $|CD| = \sqrt{80}$ cm
c) $x^2 = -9y$, $|CD| = 9$ cm
d) $x^2 = 8y$, $|CD| = 4\sqrt{22}$ cm
e) $x^2 = 8y$, $|CD| = 10$ cm

24) (UFCG-2010) Sobre as curvas planas $x^2 + 4y^2 = 16$ e $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$, é verdade que
a) não se intersectam.
b) se tangenciam em um único ponto.
c) se intersectam em dois pontos.
d) se intersectam em quatro pontos.
e) coincidem.

25) (UFC-2005) A elipse F do plano cartesiano xy obtida da elipse E: $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 25 = 0$ por uma translação que leva os focos de E em pontos eqüidistantes da origem e sobre o eixo ox admite uma equação igual a:

a) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 18$ b) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 6$
c) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 16$ d) $x^2 + 2y^2 = 25$
e) $2x^2 + 3y^2 = 49$

26) (UFPR-2011) Alguns telescópios usam espelhos parabólicos, pois essa forma geométrica reflete a luz que entra para um único ponto, chamado foco. O gráfico de $y = x^2$, por exemplo, tem a forma de uma parábola. A luz que vem verticalmente, de cima para baixo (paralelamente ao eixo y), encontra a parábola e é refletida segundo a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Essa lei implica que os raios de luz verticais, encontrando a parábola no ponto (a,a^2), serão refletidos na direção da reta $4ay + (1 - 4a^2)x = a$.



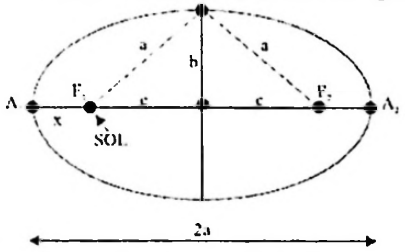
Sendo assim, calcule o ponto em que os raios de luz verticais refletidos em (1,1) e (2,4) se encontrarão.

27) (UFRJ-2010) Determine a equação da parábola que passa pelo ponto $P_1 = (0, a)$ e é tangente ao eixo x no ponto $P_2 = (a, 0)$, sabendo que a distância de P_1 a P_2 é igual a 4.

28) (UFU-2000) Considere uma parábola e uma reta descritas respectivamente pelas equações $y = x^2$ e $y = 2x - 3$. Dentre todos os segmentos com extremidades na parábola e reta dadas, sendo esses segmentos paralelos ao eixo das ordenadas y, determine o de menor comprimento.

29) (FMTM-2007) Considere um corpo celeste (hipotético) que descreve uma órbita elíptica ao redor do Sol, e que o Sol esteja num foco da elipse. Quando o corpo celeste se encontra no vértice A_2 da elipse da figura, a sua distância ao Sol é de 0,808. Sabendo-se que F_1 e F_2 são os focos da elipse, e que a excentricidade de sua

órbita é e = 0,01, então a distância x ao Sol, quando o corpo se encontra no vértice A_1 é igual a



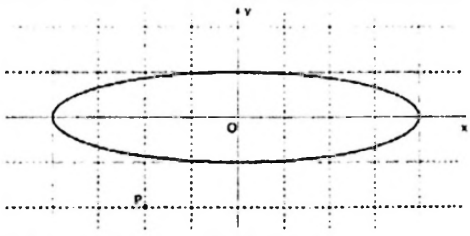
(A) 2,203. (B) 0,792. (C) 0,808.
(D) 1,616. (E) 0,533.

30) (UEM-2013) Sobre a cônica de equação $x^2 + 4y^2 = 9$, assinale o que for correto.
01) Trata-se de uma elipse.
02) A cônica intercepta o eixo das abscissas em (3,0) e (−3,0).
04) Se A e B são pontos da cônica que não são colineares com os focos D e E da cônica, os triângulos ADE e BDE possuem o mesmo perímetro.
08) A circunferência centrada na origem e de raio 2 tangencia essa cônica
16) O ponto $(2\sqrt{2}, 1/2)$ pertence à cônica.

31) (UFAM-2004) As coordenadas dos focos da elipse de equação $4x^2 + 3y^2 = 36$ são:
a) $(0,\sqrt{3})$ e $(0,-\sqrt{3})$ b) $(0,\sqrt{2})$ e $(0,-2)$
c) $(\sqrt{21},0)$ e $(-\sqrt{21},0)$ d) $(4,0)$ e $(-4,0)$
e) $(5,0)$ e $(-5,0)$

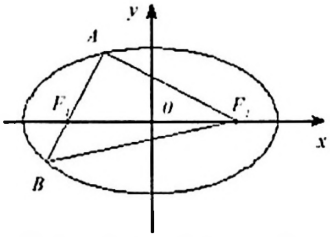
32) (UFAM-2013) A distância entre um dos focos da elipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ e o centro da circunferência $x^2 + (y-4)^2 = 4$ é igual a:
a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{3}$

33) (IBMEC-2008) A figura mostra, no plano cartesiano, a elipse de equação $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$, e um retângulo a ela circunscrito.



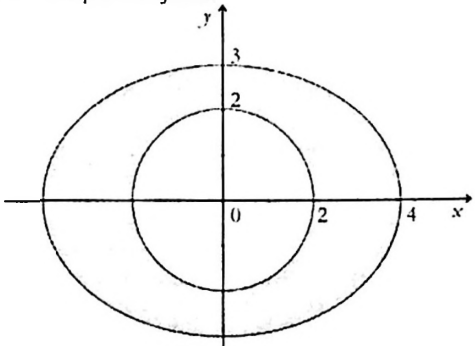
a) $1 < m < 2$ b) $1/2 < m < 1$
c) $1/3 < m < 1/2$ d) $1/6 < m < 1/3$
e) $0 < m < 1/6$

34) (UFPB-2001). Na figura abaixo está representada a elipse de equação $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ com seus focos F_1 e F_2 e os pontos A e B. Se PQ denota a distância entre os pontos P e Q, calcule $d_{AB} + d_{BF_2} + d_{F_2A}$



a) 10 b) 12 c) 14 d) 18 e) 20

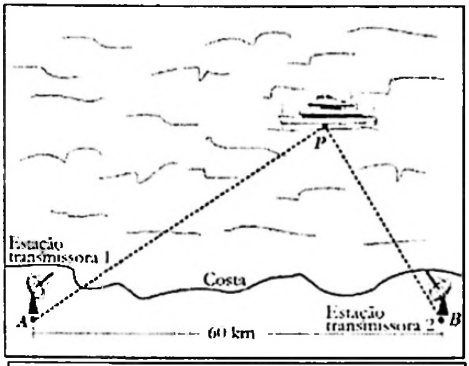
35) (UFPB-2006) A planta baixa de um projeto paisagístico encontra-se ilustrada na figura ao lado. A região hachurada corresponde à parte gramada e está limitada: internamente, pela circunferência que passa pelo ponto (2, 0), com centro na origem; e, externamente, pela elipse centrada na origem, com dois de seus vértices nos pontos (4, 0) e (0, 3). A região hachurada pode ser descrita pelo conjunto:



a) $\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

b) $\{(x, y) \in R^2 \mid 9x^2 + 16y^2 \geq 144\}$
c) $\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4 \text{ e } 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$
d) $\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \geq 4 \text{ ou } 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$
e) $\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$
f) $\{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

36) (UFPB-2010) Em certo sistema marítimo de navegação, duas estações de rádio, localizadas na costa, nos pontos A e B, transmitem simultaneamente sinais de rádio para qualquer embarcação que se encontre no mar, na área de alcance dessas estações. Sendo P o ponto onde está localizada uma embarcação que recebe esses sinais, o computador de bordo da embarcação calcula a diferença, PA − PB, das distâncias da embarcação a cada uma das estações. Um navio que estava ancorado no mar recebeu o sinal da estação localizada em B e, 120 microssegundos (μs) depois, recebeu o sinal da estação localizada em A, conforme a figura ao lado. Considere as estações de rádio e o ponto P onde esse navio estava ancorado como pontos de um plano cartesiano, onde a unidade de comprimento é o quilômetro e A(- 30,0) e B(30,0).



Dados:
- $1s = 10^6\ \mu s$
- A velocidade do sinal de rádio é de 300.000 *km/s*

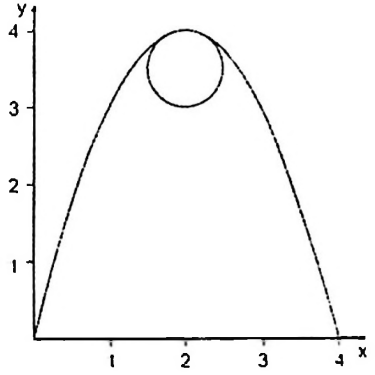
Nesse contexto, é correto afirmar que a hipérbole com focos nos pontos A e B e que contém o ponto P tem como equação a expressão:

a) $\frac{x^2}{324} - \frac{y^2}{576} = 1$ b) $\frac{x^2}{361} - \frac{y^2}{676} = 1$
c) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{324} = 1$ d) $\frac{x^2}{676} - \frac{y^2}{361} = 1$
e) $\frac{x^2}{289} - \frac{y^2}{625} = 1$

37) (UFPB-2009) Um arquiteto fez o projeto de uma praça em formato elíptico, com quadras poliesportivas, um anfiteatro e alguns quiosques, e desenhou a planta dessa praça em um plano cartesiano, tendo o metro como a unidade de comprimento. Nos focos da elipse que contorna a praça, estão dois quiosques, representados pelos pontos A(2,80) e B(2,−80). Um terceiro quiosque, sobre a elipse, está representado pelo ponto C(2,−100). Nesse contexto, a equação dessa elipse é:

a) $\frac{(x-2)^2}{6400} + \frac{y^2}{10000} = 1$ b) $\frac{(x-2)^2}{3600} + \frac{y^2}{10000} = 1$
c) $\frac{(x-2)^2}{10000} + \frac{y^2}{6400} = 1$ d) $\frac{(x-2)^2}{3600} + \frac{y^2}{6400} = 1$
e) $\frac{y^2}{10000} - \frac{(x-2)^2}{6400} = 1$

38) (UFPE-2012) A figura abaixo ilustra a parábola com equação $y = -x^2 + 4x$ e uma circunferência de raio r e centro (2, a). O único ponto comum a ambas é o vértice da parábola. O gráfico da circunferência está entre o eixo das abscissas e o gráfico da parábola, exceto pelo ponto comum à circunferência. Assinale a + r.

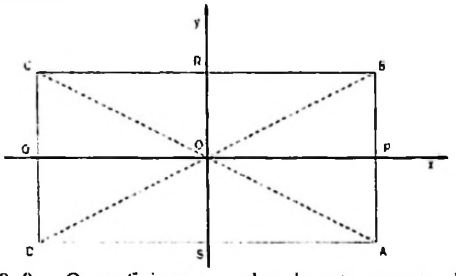


39) (UFPI-2007) A área do triângulo retângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta tangente à elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, em um dos pontos de abscissa x = 1, é igual a:

A) 4/9 unidades de área.
B) 9/4 unidades de área.
C) $2\sqrt{3}$ unidades de área.
D) $4\sqrt{3}$ unidades de área.

E) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ unidades de área.

40) (UFS-2007) Para analisar as sentenças abaixo, considere o retângulo ABCD de base 8 e altura 4, com centro na origem O de um sistema de eixos cartesianos ortogonais, como é mostrado na figura seguinte.



0 0 - O coeficiente angular da reta suporte da diagonal AC é menor que − 3/5.

1 1 - A equação da reta traçada por R e perpendicular à reta suporte da diagonal BD é 2x − y − 2 = 0.

2 2 - A equação da circunferência circunscrita ao retângulo ABCD é $x^2 + y^2 = 20$.

3 3 - A equação da elipse de vértices P, Q, R e S é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

4 4 - A distância focal da elipse de vértices P, Q, R e S é igual a $4\sqrt{3}$

41) (Unesp-2005) A equação da elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e eixo maior igual a 6 é dada por

a) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{15} = 1$

d) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{15} = 1$ e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

42) (Unesp-2000) Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) Mostre que o ponto $P = \left(3, \frac{12}{5}\right)$ pertence à elipse e calcule a distância de P ao eixo das abscissas.

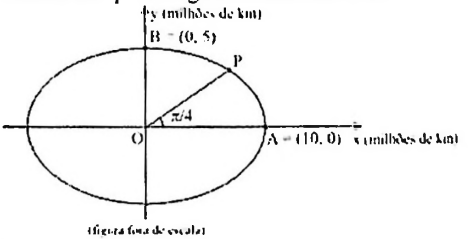
b) Determine os vértices Q e R da elipse que pertencem ao eixo das abscissas e calcule a área do triângulo PQR, onde $P = \left(3, \frac{12}{5}\right)$.

43) (Unesp-2005) A equação da elipse de focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e eixo maior igual a 6 é dada por:

a) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{15} = 1$

d) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{15} = 1$ e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

44) (Unesp-2008) Suponha que um planeta P descreva uma órbita elíptica em torno de uma estrela O, de modo que, considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sendo a estrela O a origem do sistema, a órbita possa ser descrita aproximadamente pela equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, com x e y em milhões de quilômetros. A figura representa a estrela O, a órbita descrita pelo planeta e sua posição no instante em que o ângulo PÔA mede π/4.



A distância, em milhões de km, do planeta P à estrela O, no instante representado na figura, é:

a) $2\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{10}$ c) $5\sqrt{2}$

d) $10\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{10}$

45) (Unesp-2010) A figura mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:

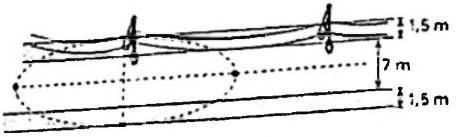
I. os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;

II. o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;

III. o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).

Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

Dado: $0{,}943^2 \cong 0{,}889$ e $\sqrt{0{,}111} \cong 0{,}333$

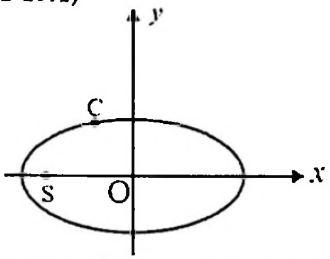


a) 35. b) 30 c) 25. d) 20. e) 15.

46) (Unicentro-2010) Em uma aula de Matemática, o professor disse que a parábola de equação $y = 6x^2 - 5x - 3$ e a hipérbole de equação $y = -2/x$ têm três pontos em comum, P(a,b), Q(c,d) e R(e,f). Um dos alunos, ao fazer os gráficos dessas curvas em um mesmo plano cartesiano, verificou que um dos pontos em comum é P(1,–2). Com essa informação, concluiu corretamente quais são as coordenadas de Q e R. Nessas condições, o valor de (a + c + e) é

a) 0 b) 2 c) – 7/6 d) 7/6 e) 5/6

47) (UNB-2012)



A figura acima ilustra a situação em que um cometa (C) percorre uma órbita elíptica de centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy. Nessa órbita elíptica, o Sol (S) aparece em um dos focos. Considere que a elipse seja representada pela equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, em que a > b > 0, e tenha excentricidade igual a 0,96. Nesse caso, se a distância mínima desse cometa ao Sol for igual a 0,58 UA (unidade astronômica), em que 1 UA = 150×10^6 km é a distância média da Terra ao Sol, então a distância máxima do cometa ao Sol, em milhões de km, será

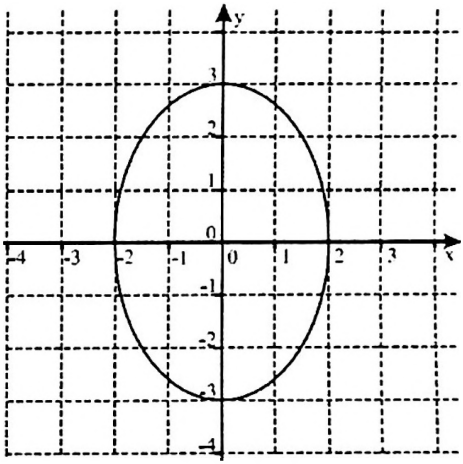
A) inferior a 3.700.
B) superior a 3.700 e inferior a 4.000.
C) superior a 4.000 e inferior a 4.300.
D) superior a 4.300.

48) (FGV-2002) No plano cartesiano, a curva de equações paramétricas x = 2cost e y = 5 sent com t ∈ IR é:

a) uma senóide b) uma cossenóide
c) uma hipérbole d) uma circunferência
e) uma elipse

49) (Unicamp-1993) Dada uma elipse de semi-eixos a e b, calcule, em termos destes parâmetros, a área do quadrado nela inscrito, com lados paralelos aos eixos da elipse.

50) (Fepecs-2012) A elipse E representada a seguir está centrada na origem e seus eixos estão sobre os eixos x e y



A equação cartesiana de E é dada por:

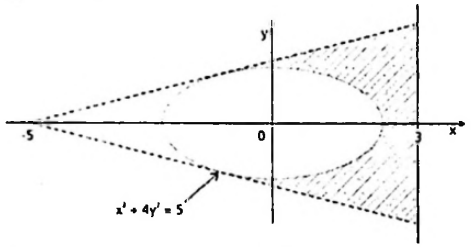
a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$

d) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ e) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

51) (Fuvest-2001) A elipse $x^2+\frac{y^2}{2}=\frac{9}{4}$ e a reta y = 2x + 1, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento AB é:

a) (-2/3, -1/3) b) (2/3, -7/3)
c) (1/3, -5/3) d) (-1/3, 1/3)
e) (-1/4, 1/2)

52) (UERJ-2004) Um holofote situado na posição (−5,0) ilumina uma região elíptica de contorno $x^2 + 4y^2 = 5$, projetando sua sombra numa parede representada pela reta x = 3, conforme ilustra a figura abaixo.



Considerando o metro a unidade dos eixos, o comprimento da sombra projetada é de:
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

53) (Ciaba-2006) O valor de b para que a reta y = x + b não intercepte os ramos da hipérbole $x^2 - y^2 - 1$ é

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) $\sqrt{2}$

54) (AFA-2000) O parâmetro da parábola que passa pelo ponto P(6,2) e cujo vértice V(3,0) é o seu ponto de tangência com o eixo das abcissas, é
a) 9/5 b) 9/4 c) 3 d) 9/2

55) (AFA-2008) Considere as curvas, dadas pelas equações
(I) $16x^2 + 4y^2 + 128x - 24y + 228 = 0$
(II) $y = 7 - |x|$
(III) $y^2 - 6y - x + 5 = 0$
Analise cada afirmação a seguir, classificando-a em VERDADEIRA ou FALSA.
(01) O gráfico de (I) é representado por uma elipse, de (II) por duas retas e de (III) por uma parábola.
(02) O centro de (I) é um ponto de (II) e coincide com o vértice de (III)
(04) A soma das coordenadas do foco de (III) é um número menor que −1
(08) A excentricidade de (I) é igual a $\cos\frac{\pi}{6}$
A soma dos itens verdadeiros é um número do intervalo
a) [1, 3] b) [4, 7] c) [8, 11] d) [12, 15]

56) (AFA-2004) A equação (x + y)(x − y) = 1 representa
a) uma hipérbole com excentricidade e = $\sqrt{2}$
b) duas retas perpendiculares entre si
c) uma elipse com centro na origem
d) uma hipérbole cuja distância focal é igual a 2

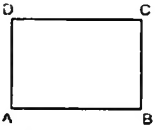
57) (AFA-2007) Classifique em VERDADEIRO ou FALSO cada item a seguir.
2 - A parábola cuja equação é $x^2 - 4y = 0$ tem diretriz representada pela reta y = −1 e foco coincidente com o baricentro do triângulo ABC, onde A é a origem do sistema cartesiano, B (2, 3) e C (-2, 0)
3 - O conjunto de pontos representados pela equação $x^2 - y^2 + x + y = 0$ é uma hipérbole equilátera que NÃO tem centro na origem do sistema cartesiano.
8 - Na elipse $16x^2 + 64y^2 = 1$ a medida do eixo vertical é 50% da medida do eixo horizontal.
16 - Existem apenas 4 números inteiros entre os valores de k, para os quais o vértice da parábola $y^2 = 4x + 1$ é ponto exterior à circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 4y + k = 0$
A soma dos itens VERDADEIROS é um número do intervalo
a) [2, 10[b) [10, 16[c) [16, 22[d) [22, 30[

58) (AFA-2000) A área do polígono que tem como vértices os extremos dos eixos maior e menor da elipse $4x^2 + y^2 - 24x - 6y + 41 = 0$, é
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

59) (AFA-2005) Analise as proposições abaixo, classificando-as em (V) verdadeiras ou (F) falsas.
( ) Considere a circunferência λ e a hipérbole $2y^2 - x^2 = 8$ tendo mesmo centro. Se λ passa pelos focos da hipérbole, uma de suas equações é $x^2 + y^2 = 12$
( ) Numa hipérbole equilátera, uma das assintotas tem coeficiente angular igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$
( ) A excentricidade da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$
Tem-se a seqüência
a) V, F, V b) F, F, V c) F, V, F d) V, V, F

60) (AFA-2000) A excentricidade da elipse que tem centro na origem, focos em um dos eixos coordenados e que passa pelos pontos A(3,2) e B(1,4) é
a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

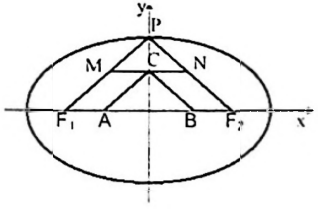
61) (AFA-2009) Suponha um terreno retangular com medidas de 18 m de largura por 30 m de comprimento, como na figura abaixo:



Um jardineiro deseja construir nesse terreno um jardim elíptico que tenha os dois eixos com o maior comprimento possível. Ele escolhe dois pontos fixos P e Q, onde fixará a corda que vai auxiliar no traçado.
Nesse jardim, o jardineiro pretende deixar para o plantio de rosas uma região limitada por uma hipérbole que possui:
. eixo real com extremidades em P e Q;
. excentricidade = $\frac{5}{4}$
Considerando o ponto A coincidente com a origem do plano cartesiano e a elipse tangente aos eixos coordenados, no primeiro quadrante, julgue as afirmativas abaixo.
(01) O centro da elipse estará a uma distância de $3\sqrt{34}$m do ponto A
(02) Para fazer o traçado da elipse o jardineiro precisará de menos de 24 m de corda.
(04) O número que representa a medida do eixo real da hipérbole, em metros, é múltiplo de 5
(08) Um dos focos dessa hipérbole estará sobre um dos eixos coordenados.
A soma dos itens verdadeiros pertence ao intervalo
a) [1, 5[b) [5, 7[c) [7, 11[d) [11, 15]

62) (AFA-2001) Na figura abaixo, F_1 e F_2 são focos da elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. O ponto C, de coordenadas $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, pertence ao segmento $\overline{MN}$.
Os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{MN}$ são, respectivamente, paralelos aos segmentos $\overline{F_1P}$, $\overline{PF_2}$ e $\overline{F_1F_2}$. A área da figura sombreada, em unidades de área, é

a) 3
b) 6
c) 9
d) 12



63) (Escola Naval-2002) São dadas a reta r de equação $x - y/3 + 2 = 0$ e a elipse E de equação $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y = 11$. A equação da reta s que passa pelo centro de E e é perpendicular à reta r é:
a) $3y + x - 7 = 0$ b) $3y + x - 5 = 0$
c) $3y - x - 5 = 0$ d) $3y - x + 8 = 0$

64) (Escola Naval-87) Uma parábola tem vértice na origem, eixo no eixo das abscissas e tangencia a circunferências de centro (6, 0) e raio $2\sqrt{5}$. O parâmetro dessa parábola é:
a) 1 b) 2 c) 4 d) 10 e) 20

65) (Escola Naval-94) A menor distância entre um ponto da parábola $y = 1 - x^2$ e a origem é igual a:

(A) 1 (B) $\frac{7}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

66) (Escola Naval-88) A reta $y = mx + 3$ tangencia a elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ se e só se:

a) $m = \pm\frac{\sqrt{23}}{2}$ b) $m = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$ c) $m = \pm\frac{\sqrt{31}}{2}$

d) $m = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}$ e) $m = \pm\frac{\sqrt{35}}{2}$

67) (Escola Naval-91) As tangentes à curva de equação $y = x^2$ que passam pelo ponto P (-2 , 0) formam ângulo α. Determine tg α.
a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

68) (Escola Naval-91) Determine a excentricidade da elipse de equação $4x^2 + 9y^2 = 2$

a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{9}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{18}$

69) (Escola Naval-92) Um dos focos da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ é o ponto:
a) $(0, \sqrt{2})$ b) $(\sqrt{13}, 0)$ c) $(0, \sqrt{13})$
d) $(\sqrt{5}, 0)$ e) $(0, \sqrt{5})$

70) (Escola Naval-93) A área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela tangente à curva $y = 4x^2$ no ponto (1,4) vale:
a) 8 b) 4 c) 2 d) 1 e) 1/2

71) (Escola Naval-99) A reta s passa pelo ponto (3, 0) e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto

P(x, y). As coordenadas de x e y de P, são, respectivamente,

a) 2 e 4 b) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ c) 1 e 1

d) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ e) $\frac{5}{2}$ e $\frac{25}{4}$

72) (Escola Naval-2000) A reta tangente à curva de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto $P\left(3, \frac{12}{5}\right)$ é dada por

(A) $20y + 9x - 75$ (B) $5y - 5x - 3$
(C) $5y + 15x = 51$ (D) $20y - 9x = 45$
(E) $y - 5x = 75$

73) (Escola Naval-94) A equação da parábola cujo foco é o ponto (1,4) e cuja a diretriz é a reta $y = 3$ é:

(A) $y = x^2 - 2x + 8$ (B) $y = -x^2 + x - 8$

(C) $y = \frac{x^2}{2} - x + 4$ (D) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 2$

(E) $x = y^2 - y + 4$

74) (Escola Naval-97) O gráfico da relação $\left|\frac{x}{4}\right| + \left|\frac{y}{2}\right| < 1$ é a região do plano xy:

a) compreendida entre as retas y = -1/2(x - 4) e y = -1/2(x + 4).
b) interior ao losango de vértices (0,2), (0,-2), (-4,0) e (4,0).
c) interior ao retângulo de vértices (-4,2), (-4,-2), (4,2) e (4,-2).
d) interior á elipse de centro (0,0) com eixo maior AB sendo A(-4,0) e B(4,0) e eixo menor CD onde C(0,2) e D(0,-2).
e) interior à circunferência centrada em (0,0) e raio 4.

75) (Escola Naval-2000) A reta que passa pelo centro da elipse $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$ e pelo vértice da parábola $x^2 - 4x - 2y + 12 = 0$ tem equação dada por

(A) $y + 3x - 2 = 0$ (B) $y + x - 6 = 0$
(C) $-y + 3x - 2 = 0$ (D) $y - 5x + 6 = 0$
(E) $-y - 2x + 8 = 0$

76) (Escola Naval-2001) A equação da circunferência de centro C = (-3, -1), que contém o vértice da parábola $y + 2x^2 + 4x - 0$, é

(A) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$
(B) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$
(C) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$
(D) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$

77) (Escola Naval-2006) O simétrico do ponto M = (3, 4) em relação à reta que une os pontos A = (-1, 3) e B = (4, -2) pertence à curva cuja equação é:

a) $x^2 + 2y^2 = 5$ b) $y = x^2 + 1$

c) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$ d) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

e) $x^2 - y^2 = 4$

78) (ITA-92) Considere as afirmações:
I- Uma elipse tem como focos os pontos F_1: (- 2, 0), F_2: (2, 0) e o eixo maior 12. Sua equação é $x^2/36 - y^2/32 = 1$.
II- Os focos de uma hipérbole são F_1: $(-\sqrt{5}, 0)$, F_2: $(\sqrt{5}, 0)$ e sua excentricidade $\sqrt{10}/2$. Sua equação é $3x^2 - 2y^2 = 6$.
III- A parábola $2y = x^2 - 10x - 100$ tem como vértice o ponto P: (5, 125/2).
Então:
a) Todas as afirmações são falsas.
b) Apenas as afirmações II e III são falsas.
c) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmação III é verdadeira.
e) n.d.a.

79) (ITA-89) A equação da parábola, cujo eixo é perpendicular ao eixo x e que passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 - 2ax + 2y = 0$, com a > 1, e pelos pontos (-1, 0), (1, 0) é:

a) $(a^2 - 1)y = a^2(x^2 - 1)$
b) $(a^2 - 1)y = a^2(1 - x^2)$
c) $(a^2 - 1)y = x^2 - 1$
d) $(a^2 - 1)y = a(x^2 - 1)$
e) $(a^2 - 1)y = -x^2 + 1$

80) (ITA-96) Tangenciando externamente a elipse ε_1, tal que ε_1: $9x^2 + 4y^2 - 72x - 24y + 144 = 0$ considere uma elipse ε_2, de eixo maior sobre a reta que suporta o eixo menor de ε_1 e cujos eixos têm mesma medida que os eixos de ε_1. Sabendo que ε_2 está inteiramente contida no primeiro quadrante, o centro de ε_2 é:

a) (7, 3) b) (8, 2) c) (8, 3) d) (9, 3) e) (9, 2)

81) (ITA-96) São dadas as parábolas p_1: $y = -x^2 - 4x - 1$ e p_2: $y = x^2 - 3x + 11/4$ cujos vértices são denotados, respectivamente, por V_1 e V_2. Sabendo que r é a reta que contém V_1 e V_2, então a distância de r até à origem é:

a) $5/\sqrt{26}$ b) $7/\sqrt{26}$ c) $7/\sqrt{50}$
d) $17/\sqrt{50}$ e) $11/\sqrt{74}$

82) (ITA-95) Uma reta t do plano cartesiano xOy tem coeficiente angular 2a e tangência a parábola $y = x^2 - 1$ no ponto de coordenadas (a, b). Se (c, 0) e (0, d) são as coordenadas de dois pontos de t tais que $c > 0$ e $c = -2d$, então a/b é igual a :
a) – 4/15 b) – 5/16 c) – 3/16
d) – 6/15 e) – 7/15

83) (ITA-82) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, seja "E" uma elipse de equação $5x^2 + y^2 = 5$. Considerando r e s duas retas distintas, tangentes a "E" a com coeficiente angular comum igual a 2, podemos afirmar que:
a) As equações dessas retas são $y = 2x + p$ e $y = 2x - p$, onde p é um número irracional.
b) Os pontos de contato dessas retas com a elipse "E" são pontos do 1O e 3 o quadrantes.
c) A equação de uma reta das retas é $y = 2x - 3$ e a outra tangencia "E" num ponto cujas coordenadas são números racionais.
d) O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos de contato de r e s com a elipse "E" é 2/5.
e) A reta $y = x$ corta uma das retas, r ou s, num ponto $M = (a, a)$, onde a é real e $|a| > 7$.

84) (ITA-99) Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ e a elipse E de equação $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Então:
a) C e E interceptam-se em dois pontos distintos.
b) C e E interceptam-se em quatro pontos distintos.
c) C e E são tangentes exteriormente.
d) C e E são tangentes interiormente.
e) C e E têm o mesmo centro e não se interceptam.

85) (ITA-01) O coeficiente angular da reta tangente à elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ no primeiro quadrante e que corta o eixo das abscissas no ponto P = (8, 0) é:
a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

86) (ITA-02) Seja $k > 0$ tal que a equação $(x^2 - x) + k(y^2 - y) = 0$ define uma elipse com distância focal igual a 2. Se (p, q) são as coordenadas de um ponto da elipse, com $q^2 - q \neq 0$, então $\frac{p - p^2}{q^2 - q}$ é igual a:
a) $2 + \sqrt{5}$ b) $2 - \sqrt{5}$ c) $2 + \sqrt{3}$
d) $2 - \sqrt{3}$ e) 2

87) (IME-54) a) Dada a equação da cônica: $9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$. Pedem-se:
(i) Simplificar a equação, destituindo-a dos termos do primeiro grau das variáveis, mediante uma transformação de coordenadas e identificar a curva.
(ii) Determinar todos os elementos característicos da curva, indicando-os esquematicamente sobre um esboço da mesma, onde devem constar todos os eixos utilizados.

88) (IME-70) Uma cônica tem por equação $9y^2 - 18y + 25x^2 - 50x - 191 = 0$. Identifique-a e calcule sua excentricidade, se for o caso.
(A) Uma hipérbole de excentricidade 0,7
(B) Uma elipse com focos no eixo dos yy
(C) Uma hipérbole equilátera
(D) Uma elipse de excentricidade 0,8
(E) Uma parábola de diretriz $x = -1$
(F) Nenhuma das curvas acima

89) (IME-68) A reta $x - 25/4 = 0$ é uma das diretrizes de uma elipse e (4; 0) é o foco associado. O centro está na origem. Ache a equação da elipse.

90) (IME-67) Dados A(2, 0) e B(– 2, 0) e a elipse $\frac{(x-6)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, pede-se determinar os pontos P_i (i = 1; 2; 3) da curva tais que a reta AP_i tenha coeficiente angular igual ao triplo do coeficiente da reta BP_i.

91) (IME-67) Seja a parábola $y^2 = 4x$. Uma reta de coeficiente angular positivo contém o foco e intercepta a curva nos pontos A e B. Determine as coordenadas de A ou de B, sabendo que o eixo OX divide o segmento AB em partes proporcionais a 3 e 1.

92) (IME-65) Determine a equação cartesiana da elipse de focos F(2; 0) e F'(– 2; 0), tal que o valor máximo da área do triângulo definido pelos raios vetores de um mesmo ponto da curva e o eixo dos x seja igual a oito unidades de área.

93) (IME-55) Achar a equação da hipérbole equilátera que passa pelo ponto A(0; 3) e é tangente ao eixo dos x na origem.

94) (IME-55) Uma circunferência passa pelo foco da parábola $x^2 = -8y$, é tangente ao semi-eixo positivo dos x e tem o centro sobre a reta $x - y - 4 = 0$. Pedem-se:
a) Achar a equação da circunferência.
b) Achar as equações das tangentes à circunferência tiradas pela origem.

95) (IME-90) Na elipse de excentricidade 1/2, foco na origem e reta diretriz dada por $3x + 4y = 25$, determine:
a) os vértices da elipse,
b) o outro foco,
c) a equação da outra diretriz.

96) (IME-91) Determine o quadrado OABC cujos vértices são a origem e os pontos A(1, 1); B(0, 2); C(-1, 1). Seja F(0,1) o centro desse quadrado e (P) a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abcissas. Pede-se:
) Mostre que (P) passa por A e C.
) Determine a equação dessa parábola.
) Calcule as coordenadas do ponto D, segundo ponto de interseção da reta BC com (P).
4) Seja M um ponto qualquer de (P) cuja abcissa é x. Mostre que a potência de M em relação ao círculo (P) de diâmetro $\overline{CD}$ é $\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3)$.

5) A partir do resultado anterior, encontre o conjunto dos pontos de (P) interiores a (P).

97) (IME-92) determine a equação da reta que passa por um dos vértices da curva definida por: $4y^2 + 8y - x^2 = 4$, formando um ângulo de 45° com o eixo horizontal.

98) (IME-98) Considere uma elipse e uma hipérbole centradas na origem, O, de um sistema cartesiano, com eixo focal coincidente com o eixo OX. Os focos da elipse são vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são vértices da elipse.
Dados os eixos da elipse como 10 cm e $\frac{20}{3}$ cm, determine as equações das parábolas, que passam pelas interseções da elipse e da hipérbole e são tangentes ao eixo OY na origem.

99) (IME-2012) É dada uma parábola de parâmetro p. Traça-se a corda focal MN, que possui uma inclinação de 60° em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento da corda MN intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função de p, sabendo que N encontra-se no interior do segmento MR.

100) (IME-2010) Uma hipérbole de excentricidade $\sqrt{2}$ tem centro na origem e passa pelo ponto $(\sqrt{5},1)$. A equação de uma reta tangente a esta hipérbole e paralela a $y = 2x$ é:
a) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 6$ b) $y = -2x + 3\sqrt{3}$
c) $3y = 6x + 2\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}y = 2\sqrt{3}x + 4$
e) $y = 2x + \sqrt{3}$

101) (IME-2010) Seja M um ponto de uma elipse com centro O e focos F e F_0. A reta r é tangente à elipse no ponto M e s é uma reta, que passa por O, paralela a r. As retas suportes dos raios vetores MF e MF_0 interceptam a reta s em H e H_0, respectivamente. Sabendo que o segmento FH mede 2 cm, o comprimento F_0H_0 é:
(A) 0;5 cm (B) 1;0 cm (C) 1;5 cm
(D) 2;0 cm (E) 3;0 cm

102) (IME-93 Militares) Dada a cônica $x^2 + 2y^2 + 3x - 3y - 3 = 0$, pede-se:
a) determinar o lugar geométrico a ela associado;
b) calcular os ângulos internos de um triângulo formado pelo centro da cônica e dois de seus vértices.

103) (IME-92 Militares) Determine o lugar geométrico definido por $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$.

104) (IME-87) Seja uma hipérbole equilátera de centro O e focos F e F'. Mostre que o segmento determinado por O e por um ponto M qualquer da hipérbole é média proporcional entre os segmentos MF e MF'.

105) (IME-54) Dada a equação da cônica:
$$9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y - 4 = 0.$$
Pedem-se:
(i) Simplificar a equação, destituindo-a dos termos do primeiro grau das variáveis, mediante uma transformação de coordenadas e identificar a curva.

(ii) Determinar todos os elementos característicos da curva, indicando-os esquematicamente sobre um esboço da mesma, onde devem constar todos os eixos utilizados.

106) (IME-82) Determine a equação de um círculo que tangencia a hipérbole $x^2 - 4y^2 = 1$ nos pontos em que esta hipérbole é encontrada pela reta $y = 3$.

107) (IME-97) Em uma parábola (P), com foco F e parâmetro p, considere uma corda $\overline{MM'}$ normal à parábola em M. Sabendo que o ângulo MFM' = 90°, calcule os segmentos $\overline{FM}$ e $\overline{FM'}$.

108) (IME-80) Por um ponto M qualquer de uma hipérbole (h), traça-se uma paralela a uma assíntota (a) de (h): esta paralela encontra uma diretriz (d) de (h) em D. Sendo F o foco de (h) correspondente à diretriz (d), mostre que:
MD = MF

109) (IME-82) a) Seja (d) a diretriz e F o foco de uma parábola. Seja MM' uma corda focal qualquer. Mostre que as tangentes em M e M' encontram-se em P, pertencente a (d) e que a reta PF é perpendicular a MM'.
b) Sejam uma elipse (e) e uma hipérbole (h) tendo os mesmos focos e o mesmo eixo não focal. Estabeleça a relação na forma $f(\varepsilon; \varepsilon') = 0$, sendo ε e ε' as excentricidades de (e) e (h), respectivamente.

110) (IME-89) Seja uma elipse cujo eixo maior AA' = 2a e cuja excentricidade é ½. Seja F o foco da elipse, correspondente ao vértice A. Considere a parábola, cujo vértice é o ponto O, centro da elipse, e cujo foco coincide com o foco F da elipse. Determine o ângulo entre as duas curvas nos pontos de interseção.

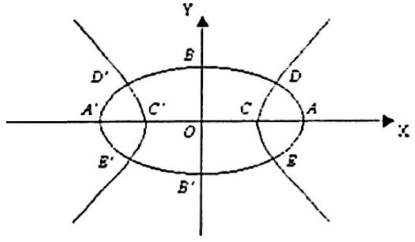
111) (IME-94 Militares) Seja a parábola $y^2 - 5x - 6y + 14 = 0$. Determine:
a) as coordenadas do vértice;
b) o parâmetro;
c) as coordenadas do foco;
d) a equação da diretriz.

112) (IME-77) A tangente e a normal em um ponto M de uma elipse cortam o eixo focal respectivamente em T e N, sendo os focos F e F'.
a) Mostre que o segmento FF' é dividido harmonicamente por T e N, bem como a razão das distâncias de F aos pontos N e M é igual à excentricidade da elipse.
b) Se a tangente e a normal citadas cortam o eixo não focal em T' e N', respectivamente, mostre que o círculo MT'N' passa pelos focos F e F'.

113) (CPRIME-84) Dada a hipérbole xy = 20, considere os pontos $P_0 = (2, 10)$, $P_1 = (-1, -20)$ e $P_2 = (-4, -5)$ a ela pertencentes. Mostre que o ortocentro do triângulo $P_0P_1P_2$ pertence a hipérbole.

114) (IME-83) É dada uma elipse de eixo focal 2a e excentricidade igual a $\sqrt{2/3}$. Essa elipse é seção de um cone de revolução: o ângulo que o plano da elipse forma com o eixo do cone é $\beta = 45°$. Pede-se, em função de a, a distância do vértice V do cone ao plano da elipse.

115) (IME-00) Calcule as coordenadas dos pontos de interseção da elipse com a hipérbole, representadas na figura abaixo, sabendo-se que:
os pontos C e C' são os focos da elipse e os pontos A e A' são os focos da hipérbole;
BB' é o eixo conjugado da hipérbole;
OB = OB' = 3 m e OC = OC' = 4 m.



116) (IME-98) Considere uma elipse e uma hipérbole centradas na origem, O , de um sistema cartesiano, com eixo focal coincidente com o eixo OX. Os focos da elipse são vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são vértices da elipse.
Dados os eixos da elipse como 10 cm e $\frac{20}{3}$ cm, determine as equações das parábolas, que passam pelas interseções da elipse e da hipérbole e são tangentes ao eixo OY na origem.

117) (IME-80) Considere, no plano, o círculo de centro O(0, 0) e raio 4. Determine a equação da hipérbole equilátera que passa pelas interseções do círculo com as retas y = 0 e y = 2.

118) (IME-80) Dada a cônica da equação $3x^2 - y^2 - 12x - 6y = 0$, determine:
a) o centro da curva;
b) as assíntotas de curva.

119) (IME-76) Em um plano são dados A e F', tais que AF' = 3. Represente a mediatriz do segmento AF' por d'. Seja h uma hipérbole que tem A como vértice de um dos ramos, F' como foco situado na concavidade do outro ramo e d' a diretriz associada a F'. Calcule a excentricidade de h, a distância de A ao centro de h e o ângulo (no interior do qual está um ramo de h) que as assíntotas de h formam entre si.

120) (IME-83) Dada a hipérbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, determine uma reta paralela ao eixo dos y tal que seus pontos de interseção com a hipérbole formam com o foco F (de abscissa positiva) um triângulo retângulo em F.

121) (CPRIME-84) Dada a hipérbole xy = 20, considere os pontos $P_0 = (2, 10)$, $P_1 = (1, 20)$ e $P_2 = (4, 5)$ a ela pertencentes. Mostre que o ortocentro do triângulo $P_0P_1P_2$ pertence à hipérbole.

122) (IME-85) Em uma hipérbole H são dados um foco F e a diretriz correspondente d, que distam entre si 5 *cm*. A direção de uma assíntota forma um ângulo de 30° com o eixo focal. Pede-se: calcular os valores dos semi-eixos de H.

123) (IME-79) Seja (T) um triângulo ABC tal que C = 2A. a) Calcule, em função do cos A, as excentricidades da elipse e da hipérbole de focos A e B e que passam por C.
b) Supondo-se existir (T), qual a relação de igualdade que devem satisfazer os lados AB, BC e CA.

124) (IME-78) A tangente e a normal em um ponto M de uma elipse cortam o eixo focal respectivamente em T e N, sendo os focos F e F_0.
a) Mostre que o segmento FF_0 é dividido harmonicamente por T e N, bem como a razão das distâncias de F aos pontos N e M é igual à excentricidade da elipse.
b) Se a tangente e a normal citadas cortam o eixo não focal em T_0 e N_0 respectivamente, mostre que o círculo MT_0N_0 passa pelos focos F e F_0.

125) Mostre que é constante o produto das distâncias dos focos de uma elipse a uma tangente genérica.

126) Prove que a área do triângulo determinado por uma tangente à hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e suas assíntotas é uma constante, e determine-a.

127) Encontrar a equação de uma elipse que está centrada na origem, com eixo focal coincidente com o eixo Ox, de excentricidade 0,5 e que passa pelo ponto (10,0).

128) Duas parábolas de eixos de simetria perpendiculares possuem o mesmo foco. Demonstrar que a diretriz de uma passa pelo ponto de contato da outra com a reta que é tangente simultaneamente às duas parábolas.

129) Pelo foco de uma parábola traça-se uma perpendicular ao eixo de simetria e sobre esta marcam-se dois pontos fixos P e Q, simétricos em relação ao foco. Projeta-se P e Q sobre uma tangente móvel, obtendo-se assim os pontos P' e Q'. Demonstre que a área do trapézio PP'Q'Q é constante.

130) Demonstre que numa parábola, o produto das distâncias do foco e do vértice a duas tangentes retangulares é constante.

131) Consideram-se: uma parábola de foco F e as tangentes PM, PM' em M e M'. Demonstrar que as perpendiculares a PM em M, a PM' em P e a PF em F são concorrentes.

132) Prove que o ortocentro do triângulo formado por três tangentes a uma parábola está situado sobre a diretriz desta parábola.

133) Demonstre que uma reta tangente a uma parábola encontra a diretriz e a corda focal mínima em dois pontos equidistantes do foco.

134) De um ponto P traçam-se duas tangentes PM e PM' a uma parábola de foco F, com M e M' pertencentes à parábola. A reta PX, paralela ao eixo da parábola, intercepta a diretriz no ponto Q. Prove que:
a) PX passa pelo ponto médio da corda MM';

b) QF é perpendicular a MM'.

135) O segmento de uma tangente variável à parábola, compreendido entre duas tangentes fixas, se projeta sobre a diretriz segundo um segmento de comprimento constante.

136) Sejam M e M' dois pontos de uma parábola de foco F. Demonstre que $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FM'}$ é constante.

137) Por um ponto P tiram-se duas tangentes a uma parábola, PT e PT', com T e T' pertencentes à parábola de foco F. Demonstrar que $\frac{\overline{PT}^2}{\overline{FT}}=\frac{\overline{PT'}^2}{\overline{FT'}}$ e $\overline{PF}^2=\overline{FT}.\overline{FT'}$.

138) Sendo dados, numa elipse, os raios vetores FM_1, FM_2, ..., FM_n, que fazem ângulos consecutivos iguais a $\frac{360^\circ}{n}$, demonstrar que a soma $\frac{1}{FM_1}+\frac{1}{FM_2}+...+\frac{1}{FM_n}$ é constante.

139) Numa elipse, prove que a soma dos inversos de 2 cordas focais retangulares é constante.

140) Demonstrar que, numa elipse, qualquer diâmetro é média proporcional entre a corda focal que lhe é paralela e o eixo maior.

141) Prove que se, numa elipse de eixos AA' = 2a, BB' = 2b, P e Q forem as projeções de um ponto qualquer M da curva sobre estes eixos, tem-se que $\frac{PM^2}{PA.PA'}=\frac{b^2}{a^2}$ e $\frac{QM^2}{QB.QB'}=\frac{a^2}{b^2}$.

142) Demonstrar que os 4 raios vetores que unem os focos de uma elipse a dois pontos M e M' são tangentes a uma mesma circunferência.

143) Traça-se a tangente a uma elipse por um ponto M. A partir de M traça a perpendicular ao eixo maior da elipse, que corta o eixo maior no ponto P. Traça-se a partir de M uma reta normal à elipse, que corta seu eixo maior no ponto N. Supondo que a elipse possui centro O e semi-eixo maior e menor valendo a e b, respectivamente, demonstre que $\frac{PN}{PO}=\frac{b^2}{a^2}$.

144) Prove que a diferença dos quadrados das distâncias do centro de uma elipse a uma tangente e a sua paralela tirada por um foco é igual ao quadrado do semi-eixo- menor.

145) Demonstre que se duas hipérbole admitem os mesmos focos, a tangente a uma, em um ponto M, será bissetriz do ângulo formado pelas tangentes tiradas deste ponto M à outra hipérbole.

146) Demonstre que se duas hipérboles equiláteras forem colocadas de maneira que os eixos de uma sejam as assíntotas da outra, ela se cortarão em ângulo reto.

147) Uma reta tangente a uma hipérbole de focos F e F' encontra as assíntotas em P e Q. Demonstrar que os pontos F, F', P e Q pertencem a um mesmo círculo.

148) Prove que a tangente à uma elipse em um ponto é a bissetriz externa do ângulo formado pelos raios vetores do ponto considerado.

149) Se a cônica de equação $r=\frac{dc}{1+e.\cos\theta}$ representa uma elipse, mostre que o comprimento do seu eixo menor é $\frac{2dc}{\sqrt{1-e^2}}$.

150) Achar a equação da hipérbole cujos focos estão nos vértices da elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ e as diretrizes passam pelos focos de esta elipse.

151) Achar a equação da parábola se são conhecidos o foco F (-7, 0) e a equação da diretriz $x - 7 = 0$.

152) Achar a equação da tangente à parábola $y^2 = 2px$ em seu ponto $M_1 (x_1, y_1)$.

153) Determinar a equação da tangente à hipérbole $x^2 - y^2 = 16$ traçadas desde o ponto A (– 1, – 7).

154) Desde o ponto A (5, 9) são traçadas tangentes à parábola $y^2 = 5x$. Determinar a equação das cordas que une os pontos de contato.

155) Determinar os pontos da elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, cujas distâncias ao foco direito são iguais a 14.

156) Determinar a equação da elipse, se conhece-se sua excentricidade $\varepsilon = \frac{2}{3}$, seu foco F (-2; 1) e a equação da diretriz correspondente $x - 5 = 0$.

157) O ponto M_1 (3; -1) é um extremo do eixo menor de uma elipse, cujos focos estão na reta $y + 6 = 0$. Achar a equação desta elipse, conhecendo sua excentricidade $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

158) Deduzir a condição, segundo a qual a reta $y = kx + m$ é tangente à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

159) Achar as equações das tangentes à elipse $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, que são paralelas à reta $3x + 2y + 7 = 0$.

160) Uma elipse passa pelo ponto A (4, – 1) e é tangente à reta $x + 4y - 10 = 0$. Achar a equação desta elipse sabendo que seus eixos coincidem com os eixos coordenados.

161) A reta $x - y - 5 = 0$ é tangente a uma elipse cujos focos são F_1 (– 3, 0) e F_2 (3, 0).

162) Verificando que as elipses:
$n^2x^2 + m^2y^2 - m^2n^2 = 0$
$m^2x^2 + n^2y^2 - m^2n^2 = 0$ $(m \neq n)$
se cortam em quatro pontos situados em uma circunferência com centro na origem, determinar o raio R desta circunferência.

163) Calcular as equações das assíntotas da hipérbole $y^2 - x^2 + 4y + 4x - 1 = 0$.

164) As assíntotas de uma hipérbole são as retas $x + y + 2 = 0$ e $x - y + 3 = 0$. Obter a equação dessa hipérbole, sabendo que ela passa pelo ponto P = (3, 1).

165) Calcular as coordenadas do ponto da parábola $y^2 = 8x$ mais próximo da reta $x - y + 10 = 0$.

166) Calcular as equações das tangentes à elipse $13x + 3y - 26x + 24y + 22 = 0$ e que sejam paralelas à reta $2x - y + 3 = 0$.

167) Determine uma equação de elipse de excentricidade igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e com eixo maior coincidindo com o latus rectum da parábola de equação $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

168) Qual a equação polar da elipse de equação geral $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$?

169) Determine a equação polar da cônica da equação paramétrica $\begin{cases} x = 3 + 20.\cos\theta \\ y = 2 + 16.\operatorname{sen}\theta \end{cases}$.

170) Determine a equação da parábola P_1 cujo vértice coincide com o vértice da parábola P_2: $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$ e cuja diretriz coincide com o eixo focal da hipérbole $-\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.

171) Determine a equação da parábola P cujo vértice coincide com o centro da hipérbole $2x^2 - 7y^2 - 4x + 14y - 19 = 0$ e cuja diretriz coincide com o eixo focal da elipse $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$.

172) Achar a distância do foco superior da hipérbole $9y^2 - 16x^2 = 144$ a cada uma de suas assíntotas.

173) Pede-se a equação canônica da hipérbole que passa pelo ponto A = (3, 1) e que seja tangente à reta $x - 2y - 1 = 0$ (o eixo focal coincide com o eixo x e o centro com a origem do Sistema Cartesiano.

174) Verifique que a equação da reta tangente à elipse E: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ em um ponto $(x_0; y_0) \in E$ é $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$.

175) Verifique que a reta tangente à hipérbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ em qualquer ponto $(x_0; y_0)$ sobre a curva tem por equação $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$.

Lugares Geométricos

8.1. DEFINIÇÃO

Lugar geométrico é o conjunto dos pontos do plano que guardam determinada propriedade.

8.1.1. Principais lugares geométricos

I) Circunferência: Lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de certo ponto.

II) Mediatriz: Lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de dois pontos distintos.

III) Bissetriz: Lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de duas retas secantes.

IV) Arco capaz: Lugar geométrico dos pontos que enxergam determinado segmento de reta sob um ângulo constante.

V) Eixo Radical: Lugar geométrico dos pontos que possuem igual potência de ponto com relação à duas circunferências.

VI) Elipse: Lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos distintos é constante.

VII) Hipérbole: Lugar geométrico dos pontos cujo módulo da subtração das distâncias a dois pontos distintos é constante.

VIII) Parábola: Lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de um ponto e uma reta.

8.2. DETERMINAÇÃO DE UM LUGAR GEOMÉTRICO

Existem duas maneiras de determinar um lugar geométrico: 1) identificar, dentro da situaçã problema, as propriedades que definem os principais lugares geométricos (listados no item anterior, 2) definir um par de eixos e desenvolver algebricamente a propriedade que define o lugar geométrico, determinando uma equação que relaciona as coordenadas dos pontos do lugar geométrico.

Não existe um método universal para determinar um lugar geométrico. Observe com detalhe os exemplos resolvidos, onde são aplicados vários instrumentos para a identificação de um lugar geométrico.

Exemplos:

1) (IME-2007) Considere uma circunferência C fixa de raio R. A partir de dois pontos A e B pertencentes a C, traçam-se retas tangentes a C que se interceptam num ponto P, tal que $\overline{PA} = \overline{PB} = k$. Sendo k um valor constante, o lugar geométrico de P é uma:

a) reta b) circunferência c) parábola
d) hipérbole e) elipse

Solução:

Pelo teorema de Pitágoras, a distância de P ao centro da circunferência vale $\sqrt{k^2 + R^2}$, que é constante pois K é constante. Assim, o lugar geométrico de P é uma circunferência.

2) (IME-2008) Assinale a opção correspondente ao número de possíveis valores de $\alpha \in [0, 2\pi]$ tais que o lugar geométrico representado pela equação $3x^2 + 4y^2 - 16y - 12x + tg\ \alpha + 27 = 0$ seja um único ponto.

a) Nenhum valor b) Apenas 1 valor c) 2 valores d) 4 valores e) Um número infinito de valores

Solução:

Reorganizando a equação, tem-se que: $\frac{(x-2)^2}{1/3} + \frac{(y-2)^2}{1/4} = 1 - tg\alpha$

Para que esta equação represente um ponto, deve-se ter $1 - tg\,\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 1$ ou seja:

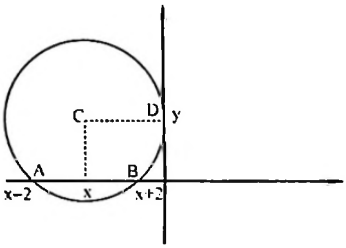
$\alpha = \frac{\pi}{4}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; $\alpha \in [0, 2\pi[$

Logo, há 2 valores possíveis para α

3) (ITA-2003) Considere a família de circunferência com centro no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

a) de uma elipse.
b) de uma parábola.
c) de uma hipérbole.
d) de duas retas concorrentes.
e) da reta $y = -x$.

Solução:



Pelo esboço acima, o centro da circunferência C(x, y) é eqüidistante dos pontos A(x–2, 0), B(x + 2, 0) e D(0, y):

$d^2_{AC} = 2^2 + y^2 = d^2_{CD} = x^2 \Rightarrow 2^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow$

$x^2 - y^2 = 2^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

4) (ITA-2007) Sejam A: (a, 0), B: (0, a) e C: (a,a), pontos do plano cartesiano, em que a é um número real nulo. Nas alternativas abaixo, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos P: (x, y) cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

a) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

Solução (Alternativa A):

Reta que passa por A e B: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow x + y = a$

Logo: $\frac{|x+y-a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} \Rightarrow$

$x^2 + y^2 + a^2 - 2ax - 2ay + 2xy = 2x^2 - 4xa + 2a^2 + 2y^2 - 4ya + 2a^2 \Rightarrow$
$x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$

5) (ITA-2009) No plano, considere S o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta t: x = 1 e ao ponto A = (3, 2) é igual a 4. Então, S é:

a) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro (2, 1).
b) uma circunferência de raio 1 e centro (1, 2).
c) uma hipérbole.
d) uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2.
e) uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1.

Solução (Alternativa D):

Seja (x, y) um ponto do lugar. Então:

$|x-1|^2 + \left[\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\right]^2 = 4 \Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2-6x+9+y^2-4y+4=4 \Leftrightarrow$

$2x^2-8x+y^2-4y+10=0 \Leftrightarrow 2(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+10=12 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+\frac{(y-2)^2}{2}=1$, que representa uma elipse de eixos 2 e $2\sqrt{2}$.

6) (ITA-2012) Dados os pontos A = (0,0), B = (2,0) e C = (1,1), o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d = 2$ da bissetriz interna por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por

A ( ) $r_{1,2}: \sqrt{2}y-x\pm 2\sqrt{4+\sqrt{2}}=0$.

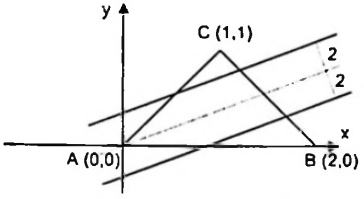
B ( ) $r_{1,2}: \frac{\sqrt{2}}{2}y-x\pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}}=0$.

C ( ) $r_{1,2}: 2y-x\pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}}=0$.

D ( ) $r_{1,2}: \left(\sqrt{2}+1\right)y-x\pm\sqrt{2+4\sqrt{2}}=0$.

E ( ) $r_{1,2}: \left(\sqrt{2}+1\right)y-x\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}=0$.

Solução (Alternativa E):



1) Δ ACD isósceles $\Rightarrow 2\alpha=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \alpha = S = \cos\alpha-\cos\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha+\ldots$

$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\Rightarrow 1=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$. Fazendo $tg\alpha = y$

$1=\frac{2y}{1-y^2} \Rightarrow y^2+2y-1=0 \Rightarrow y=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}\Rightarrow tg\frac{\pi}{8}=-1+\sqrt{2}$

Bissetriz Interna: $y=(\sqrt{2}-1)x \Rightarrow (1-\sqrt{2})x+y+0=0$

$D=\frac{|c-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow 2=\frac{|c|}{\sqrt{1-2\sqrt{2}+2+1}}\Rightarrow |c|=2\sqrt{4-2\sqrt{2}}\Rightarrow c=\pm 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$

Retas paralelas: $(1-\sqrt{2})x+y\pm 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}=0$.

Multiplicando ambos os membros por $\sqrt{2}+1=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$: $(\sqrt{2}+1)y-x\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}=0$.

7) (IME-2004) Considere a parábola P de equação $y = ax^2$, com $a > 0$ e um ponto A de coordenadas (x_0, y_0) satisfazendo a $y_0 < a x_0^2$. Seja S a área do triângulo ATT', onde T e T' são os pontos de contato das tangentes a P passando por A.

a) Calcule o valor da área S em função de a, x_0 e y_0.

b) Calcule a equação do lugar geométrico do ponto A, admitindo que a área S seja constante.

c) Identifique a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

Solução:

Seja $y - y_0 = m(x - x_0)$, a equação da reta tangente à parábola, onde $m = 2ax$ (derivada de $y = ax^2$).

Assim: $ax^2 - y_0 = 2ax(x - x_0) \Rightarrow ax^2 - 2ax_0x + y_0 = 0$, cujas raízes são x_1 e x_2.

Assim, $x_1 + x_2 = 2ax_0 \quad x_1x_2 = \frac{y_0}{a} \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}$

a) A área S é dada por: $S = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & ax_1^2 & 1 \\ x_2 & ax_2^2 & 1 \end{vmatrix}\right| \Rightarrow 2S = \left|x_0ax_1^2 + x_2y_0 + x_1ax_2^2 - ax_1^2x_2 - y_0x_1 - x_0ax_2^2\right| \Rightarrow$

$2S = \left|-x_0a(x_2^2 - x_1^2) + y_0(x_2 - x_1) + ax_1x_2(x_2 - x_1)\right| \Rightarrow 2S = \left|(x_2 - x_1)[y_0 + ax_1x_2 - x_0a(x_2 + x_1)]\right|$

Substituindo as relações de x_1 e x_2: $S = \left|\frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}(y_0 - ax_0^2)\right| \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}(ax_0^2 - y_0)$

b) Desenvolvendo a expressão de S:

$S = \frac{2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}(ax_0^2 - y_0) \Rightarrow \frac{S^2a^2}{4} = a(ax_0^2 - y_0)(ax_0^2 - y_0)^2 \Rightarrow$

$\sqrt[3]{\frac{S^2a}{4}} = ax_0^2 - y_0 \Rightarrow y_0 = ax_0^2 - \sqrt[3]{\frac{S^2a}{4}}$

c) a cônica representada acima é uma parábola de vértice $\left(0, -\sqrt[3]{\frac{S^2a}{4}}\right)$, eixo de simetria x = 0 e parâmetro a/2.

8) (IME-02) Considere uma parábola de eixo focal OX que passe pelo ponto (0,0). Define-se a subnormal em um ponto P da parábola como o segmento de reta ortogonal à tangente da curva, limitado pelo ponto P e o eixo focal. Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios das subnormais dessa parábola.

Solução:

Sendo p o parâmetro da parábola, sua equação é $y^2 = 2px$. Seja $P\left(\frac{a^2}{2p}, a\right)$ um ponto da parábola, com $a \neq 0$. Em uma vizinhança deste ponto na qual y seja função de x, temos $2y.y' = 2p \Leftrightarrow y' = \frac{p}{y}$.

Logo o coeficiente angular da reta normal à parábola no ponto P é $-\frac{a}{p}$.

Logo a reta normal é $n : y - a = -\frac{a}{p}\left(x - \frac{a^2}{2p}\right)$.

A interseção da normal com o eixo OX é o ponto T(t,0) tal que $0 - a = -\frac{a}{p}\left(t - \frac{a^2}{2p}\right) \Leftrightarrow t = \frac{a^2 + 2p^2}{2p}$.

Assim, o ponto médio de PT é $(x, y) = \left(\frac{\frac{a^2}{2p} + \frac{a^2 + 2p^2}{2p}}{2}, \frac{a + 0}{2}\right) = \left(\frac{a^2p^2}{2p}, \frac{a}{2}\right)$.

Logo $a = 2y$ e $x = \frac{(2y)^2 + p^2}{2p} \Rightarrow 4y^2 - 2px + p^2 = 0$, que é a equação de uma parábola. Como a subnormal não está definida para $a = 0$, deve-se excluir o ponto $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, que é o vértice desta parábola.

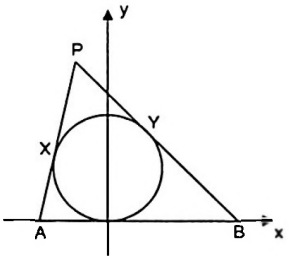
9) (IME-2006) Considere os pontos A(–1,0) e B(2,0) e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também é tangente a C e contém o ponto B. Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2, determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar R no intervalo $(0, \infty)$.

Solução:

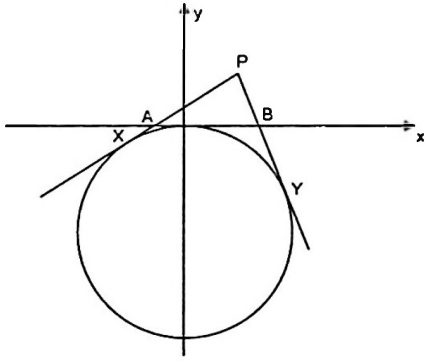
$r_1 \cap r_2 = \{P\}$, $r_1 \cap C = X$ e $r_2 \cap C = Y$. Tem-se que:

$PX = PY$, $AX = AO = 1$, $BY = BO = 2$. Podem ocorrer dois casos:

(I) C está inscrita no triângulo PAB



(II) C está ex-inscrita ao triângulo PAB



Em qualquer caso: $|PB - PA| = |(PY \pm YB) - (PX \pm XA)| = |\pm 2 - (\pm 1)| = 1$.

Portanto, P descreve uma hipérbole de focos A e B e eixo real $2a = 1$. Assim, o eixo focal é $2c = 2 - (-1) = 3$, do que o eixo imaginário é $2b = 2\sqrt{2}$. O centro é o ponto médio de $\overline{AB}$: (1/2,0).

Deste modo, a equação do lugar geométrico de P é: $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\dfrac{(y-0)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\right) = 1 \Leftrightarrow 8x^2 - y^2 - 8x = 0$

10) (IME-2007) O quadrilátero BRAS, de coordenadas A(1,0), B(– 2,0), $R(x_1,y_1)$ e $S(x_2,y_2)$ é construído tal que $R\hat{A}S = R\hat{B}S = 90°$. Sabendo que o ponto R pertence à reta t de equação $y = x + 1$, determine a equação algébrica do lugar geométrico descrito pelo ponto S ao se deslocar R sobre t.

Solução:

Se R pertence a $y = x + 1$ então é da forma R: $(a, a + 1)$

Logo: $m_{BR} = \dfrac{a+1}{a+2} \Rightarrow m_{BS} = -\dfrac{(a+2)}{a+1}$

$m_{AR} = \dfrac{a+1}{a-1} \Rightarrow m_{AS} = -\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)$

reta BS: $y = -\dfrac{(a+2)}{a+1}(x+2) \Rightarrow a = -\dfrac{(2x+y+4)}{x+y+2}$ (1)

reta AS: $y = -\dfrac{(a-1)}{a+1}(x-1) \Rightarrow a = \dfrac{x-y-1}{x+y-1}$ (2)

Igualando (1) e (2) obtemos:

$(x - y - 1)(x + y + 2) = -(2x + y + 4)(x + y - 1) \Rightarrow x^2 + xy + x = 2$, com $x \neq 1$ e $x \neq -2$.

11) (IME-2009) Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B sobre o eixo positivo das ordenadas. Sabe-se que a base mede b e seus ângulos oposto $\hat{B} = 120^o$. Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias as outras duas retas que suportam os dois outros lados. Determine a (s) equação (ões) do lugar geométrico e identifique a(s0 curvas(s) descrita(s).

Solução:

Sejam A, B e C os vértices do triângulo. No sistema dado, considerem-se $A\left(-\frac{b}{2},0\right)$, $C\left(\frac{b}{2},0\right)$, B $\left(0,\frac{b\sqrt{3}}{6}\right)$ (pois $\hat{B}$ mede 120^o e o triângulo é isósceles) e P(x, y) um ponto pertencente ao lugar geométrico. Sejam M, N e Q as projeções do ponto P sobre os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Então $PM^2 = PN \cdot PQ$ (*)

reta $\overline{AB}$: $2\sqrt{3}x - 6y + b\sqrt{3} = 0$

reta $\overline{BC}$: $-2\sqrt{3}x - 6y + b\sqrt{3} = 0$

De (*), vem: $|y|^2 = \frac{|2\sqrt{3}x - 6y + b\sqrt{3}|}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-6)^2}} \cdot \frac{|-2\sqrt{3}x - 6y + b\sqrt{3}|}{\sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-6)^2}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{\left|\left(b\sqrt{3} - 6y\right)^2 - \left(2\sqrt{3}x\right)^2\right|}{48} \Leftrightarrow$

$18y^2 = |3b^2 - 12b\sqrt{3}y + 36y^2 - 12x^2| \Leftrightarrow$

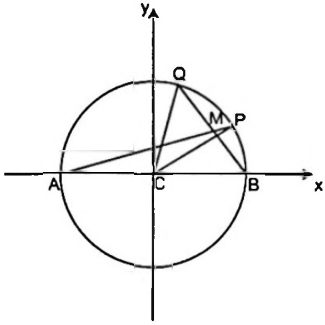
$2x^2 + 12y^2 + 12b\sqrt{3}y = 3b^2$ ou $12x^2 - 84y^2 + 12b\sqrt{3}y = 3b^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + \left(y + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2$: circunferência de centro em $\left(0,-\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ e de raio b.

ou $\frac{x^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{7}}\right)^2} - \frac{\left(y - \frac{b\sqrt{3}}{14}\right)^2}{\left(\frac{b}{7}\right)^2} = 1$: hipérbole centrada em $\left(0,\frac{b\sqrt{3}}{14}\right)$ com semi-eixo real $\frac{b}{\sqrt{7}}$ e imaginário $\frac{b}{7}$.

12) (IME-2013) Considere um círculo com centro C, na origem, e raio 2. Esse círculo intercepta o eixo das abscissas de A menor do que a abscissa de B. Considere P e Q, dois pontos desse círculo, com ordenadas maiores ou iguais a zero. O ângulo formado entre o segmento CP e CQ vale $\frac{\pi}{3}$ rd. Determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção dos segmentos AP e BQ internos ao círculo.

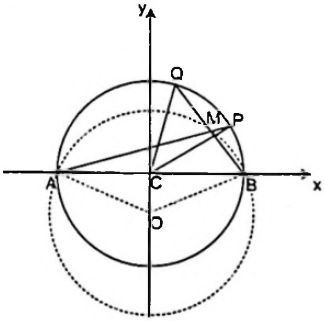
Solução:



Considere-se a seguinte figura que destaca as informações dadas, em que M é o ponto de encontro do qual se deseja descobrir o lugar geométrico.

Note-se que, em qualquer posição dos pontos P e Q, forma-se sempre o ângulo excêntrico interior $A\hat{M}B$, cuja medida é dada pela semissoma dos arcos de circunferência de extremidades em PQ e em AB (no sentido anti-horário). Portanto, a medida de $A\hat{M}B$ é constante

e igual a $\frac{\frac{\pi}{3}+\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$ rad. Daí, segue diretamente que o ponto M pertence a um dos arcos capazes (o contido no primeiro e segundo quadrantes) de visar o segmento, fixo, $\overline{AB}$ sob um ângulo de 120°.



Sendo O o centro da circunferência que contém o arco capaz AMB, uma vez que tal arco mede 120°, no triângulo BOA, isósceles com base $\overline{AB}$, de 4 unidades, é fácil ver que AO = AC·cosec 60° = $\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ é o raio da mesma. Além disso, OC = AO·cos 60° = $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ou seja, O tem coordenadas $(0,-\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

Dessa forma, a equação do lugar geométrico procurado é $(x-0)^2+(y+\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=(\frac{4}{\sqrt{3}})^2$, que equivale a $x^2+y^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}y-4=0$, com a condição de y não ser menor ou igual a 0.

13) (IME-2012) Considere uma reta r que passa pelo ponto P(2,3). A reta r intercepta a curva $x^2-2xy-y^2=0$ nos pontos A e B. Determine:

a) o lugar geométrico definido pela curva;

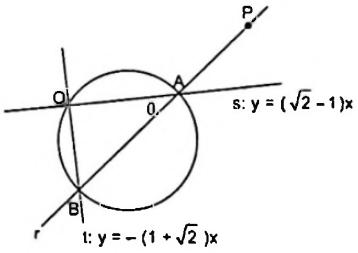
b) a(s) possível(is) equação(ões) da reta r, sabendo que $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=17$.

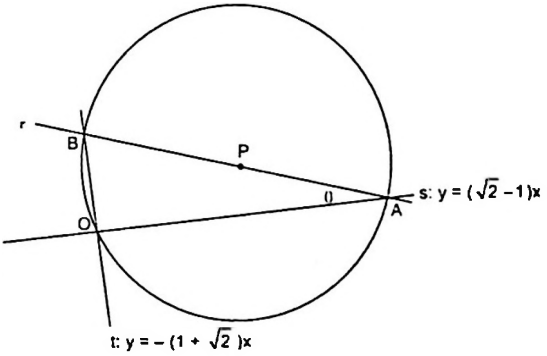
Solução:

a) $x^2-2xy-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)^2-\left(y\sqrt{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow x-y+y\sqrt{2}=0$ ou $x-y-y\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow y=\frac{x}{1-\sqrt{2}}$ ou $y=\frac{x}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow y=-(1+\sqrt{2})x$ ou $y=(\sqrt{2}-1)x$

Portanto, o lugar geométrico (lg) consiste em duas retas, perpendiculares na origem, com coeficiente angulares $\sqrt{2}-1$ e $-(\sqrt{2}+1)$, respectivamente.

b) Como as retas do lg encontrado, denominadas s e t a partir de agora, são perpendiculares e fixas, tal qual o ponto P, tem-se que A, O, B sempre serão vértices de um triângulo retângulo em O, inscrito numa circunferência variável λ. Em relação à λ, há duas possibilidades para P: ser um ponto interno ou externo, conforme r varie por P.





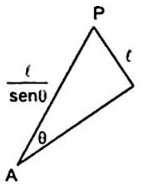
Seja, em qualquer caso anterior, θ o ângulo (agudo) formado entre r e uma das retas do lugar, por exemplo, s, sem perda de generalidade, uma vez que com a outra reta o ângulo é $\frac{\pi}{2}-\theta$. Note-se a

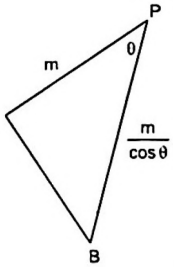
inconveniência de θ ser reto, tendo em vista que B seria impróprio, o mesmo ocorrendo para $\frac{\pi}{2} - \theta$, que tornaria o ponto A impróprio (e a condição PA·PB ∈ R seria impossível).

Sejam ℓ e m as distâncias de P às retas definidas pelo lg. Então, em qualquer dos casos precedentes, é fácil notar que:

$$PA \cdot PB = \frac{2m\ell}{\operatorname{sen} 2\theta},$$

bastando contemplar os triângulos retângulos de hipotenusas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$. Por exemplo, no 1º caso:





$$PA \cdot PB = \frac{\ell}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{m}{\cos\theta} \Leftrightarrow$$

$$PA \cdot PB = \frac{2m\ell}{\operatorname{sen} 2\theta}$$

Na situação sob análise, ℓ e m podem ser obtidos a partir das distâncias de P(2,3) às retas s: $(\sqrt{2}-1)x - y = 0$ e t: $(\sqrt{2}+1)x + y = 0$. Assim, conclui-se que, a menos da ordem:

$$\ell = \frac{\left|(\sqrt{2}-1).2-3\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+(-1)^2}} = \frac{5-2\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \text{ e } m = \frac{\left|(\sqrt{2}+1).2+3\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2+1^2}} = \frac{5+2\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \text{ (ou permutando)}$$

Assim: $\ell m = \frac{5^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{17}{2\sqrt{2}} \Rightarrow PA.PB = \frac{17}{\sqrt{2}\operatorname{sen} 2\theta}$

Impondo PA·PB = 17, segue: $\operatorname{sen} 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + K\pi$ ou $\theta = \frac{3\pi}{8} + K\pi$, com K ∈ Z.

Como θ é agudo, aparentemente, surgem duas possibilidades para θ: $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{3\pi}{8}$. Contudo, na hipótese de P ser externo à λ, θ é orientado no sentido anti-horário de r até s: $(\sqrt{2}-1)x - y = 0$, ao passo que, sendo P interno à λ, o sentido é o horário. Restam, assim, quatro possibilidades para a reta r.

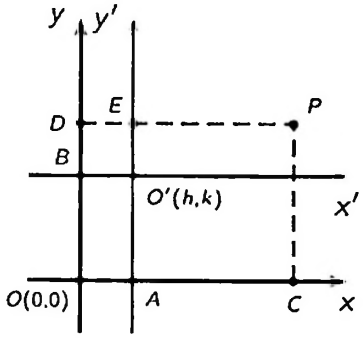
Desse modo, para a inclinação de r, denotada por α, há quatro possibilidades:

$\alpha = \theta + \frac{\pi}{8}$ ou $\alpha = \pi - \theta + \frac{\pi}{8}$, sendo $\theta = \frac{\pi}{8}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{8}$

Logo, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \pi$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, que fornecem as possíveis equações de r a seguir, respectivamente:

r : y − 3 = x − 2 ⇔ x − y + 1 = 0 ou r : x = 2 ou r : y = 3 ou r : y − 3 = 2 − x ⇔ x + y − 5 = 0.

8.3. TRANSLAÇÃO DE EIXOS



Suponha um sistema de eixos cartesianos ortogonais xOy. Neste sistema um ponto P possui coordenadas P(x, y). Deseja-se agora determinar um outro sistema de eixos x'O'y', onde o eixo x' é paralelo ao eixo x e o y' é paralelo ao eixo y. Considere que, em relação ao sistema de eixos xOy o ponto O', origem do sistema x'O'y', possui coordenadas O'(h, k). Assim, o novo sistema x'O'y' pode ser obtido a partir de uma translação do sistema de eixos xOy, onde cada ponto P(x, y) está relacionado com o novo sistema x'O'y' da forma:

$$x = x' + h \text{ e } y = y' + k$$

Por exemplo, suponha que deseja-se transladar um sistema xOy, com origem em O(0, 0), para um sistema x'O'y' de modo que o centro seja O'(– 1, 2). Assim, pode-se relacionar as coordenadas dos pontos de cada sistema da seguinte maneira: $x = x' - 1$ e $y = y' + 2$. Deste modo, a parábola que no sistema xOy possui equação $y^2 = 2x + 1$, no sistema x'O'y' terá equação dada por:

$$(y' + 2)^2 = 2(x' - 1) + 1 \Rightarrow y'^2 + 4y' + 4 = 2x' - 2 + 1 \Rightarrow y'^2 + 4y' = 2x' - 5$$

8.3.1. Eliminação dos termos lineares de uma equação de 2º grau

A expressão algébrica geral do 2º grau em duas variáveis é da forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Fazendo uma translação de eixos, de um sistema xOy com origem em (0, 0) para um sistema x'O'y' com origem em (h, k), obtém-se uma nova equação $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$, onde uma escolha conveniente dos valores de h e k pode fazer com que $D' = 0$ e $E' = 0$. Desde que as coordenadas de cada sistema são relacionadas por $x = x' + h$ e $y = y' + k$:

$$A(x' + h)^2 + B(x' + h)(y' + k) + C(y' + k)^2 + D(x' + h) + E(y' + k) + F = 0 \Rightarrow$$
$$Ax'^2 + 2Ahx' + Ah^2 + Bx'y' + Bkx' + Bhy' + Bhk + Cy'^2 + 2Cky' + Ck^2 + Dx' + Dh + Ey' + Ek + F = 0 \Rightarrow$$
$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Ah + Bk + D)x' + (2Ck + Bh + E)y' + Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0$$

Assim, segue que $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$, $D' = 2Ah + Bk + D$, $E' = 2Ck + Bh + E$ e $F' = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F$. De modo que $D' = 0$ e $E' = 0$ tem-se que $\begin{cases} 2Ah + Bk = -D \\ Bh + 2Ck = -E \end{cases}$. Resolvendo este sistema para h e k determina-se O'(h, k), centro de um sistema x'O'y' onde $D' = E' = 0$, bem como uma nova equação de 2º grau, agora nas variáveis x' e y', desprovida dos termos lineares.

Note que, dependendo dos valores de A, B e C pode acontecer do sistema $\begin{cases} 2Ah + Bk = -D \\ Bh + 2Ck = -E \end{cases}$ não possuir solução única. Analisando o determinante da matriz principal do sistema isto ocorre para $B^2 - 4AC = 0$. Neste caso, pode-se afirmar que não existe nenhuma translação do sistema xOy para um novo sistema x'O'y' onde a equação de 2º grau apresente $D' = E' = 0$.

Exemplos:

1) Por uma translação de eixos coordenados transforme a equação $4x^2 + y^2 + 8x - 6y + 1 = 0$ em outra desprovida dos termos de grau um.

Solução:

Fazendo $x = x' + h$ e $y = y' + k$:

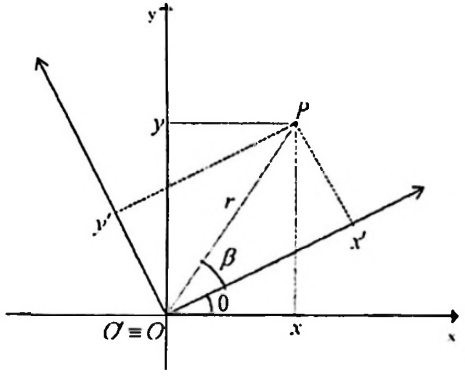
$4(x' + h)^2 + (y' + k)^2 + 8(x' + h) - 6(y' + k) + 1 = 0 \Rightarrow$

$4x'^2 + y'^2 + (8h + 8)x' + (2k - 6)y' + 4h^2 - 6k + 1 = 0$

Este equação será desprovida dos termos de 1º grau se: $\begin{cases} 8h + 8 = 0 \\ 2k - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = -1 \text{ e } k = 3.$

Substituindo estes valores obtém-se a equação transladada $4x'^2 + y'^2 = 12$.

8.4. ROTAÇÃO DE EIXOS



Suponha um sistema cartesiano ortogonal xOy. Neste sistema é dado um ponto P(x, y). Rotacionando o sistema xOy em torno de O um ângulo θ ($0 \leq \theta \leq 90°$) pode-se obter um outro sistema cartesiano ortogonal x'Oy', mantendo em cada eixo a mesma escala do sistema de origem. Neste novo sistema as coordenadas de P agora são P(x', y'). É possível obter uma relação entre as coordenadas de P nos dois eixos. Supondo que $\overline{OP} = r$ faz um ângulo β com o eixo x':

$x' = r.\cos\beta$ e $y' = r.\text{sen}\,\beta$

$x = r.\cos(0 + \beta)$ e $y = r.\text{sen}(0 + \beta)$

Desenvolvendo os termos trigonométricos de x e y segue que: $\boxed{\begin{cases} x = x'.\cos\theta - y'.\text{sen}\theta \\ y = x'.\text{sen}\theta + y'.\cos\theta \end{cases}}$

Resolvendo esta sistema para x' e y' obtém-se: $\begin{cases} x' = x.\cos\theta + y.\text{sen}\theta \\ y' = -x.\text{sen}\theta + y.\cos\theta \end{cases}$

Exemplos:

1) Determinar as coordenadas do ponto P'(0, 3) em relação ao sistema de coordenadas xOy rotacionado de um ângulo de 60°.

Solução:

$\begin{cases} x = x'.\cos\theta - y'.\text{sen}\theta \\ y = x'.\text{sen}\theta + y'.\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.\cos 60° - 3.\text{sen}\,60° \\ y = 0.\text{sen}\,60° + 3.\cos 60° \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $y = \frac{3}{2}$, que são as coordenadas do ponto P no sistema xOy.

2) Determine como fica a equação $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4$ num sistema de eixos coordenadas rotacionado de 30°.

Solução:

$$\begin{cases} x = x'.\cos\theta - y'.\text{sen}\theta \\ y = x'.\text{sen}\theta + y'.\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'.\cos 30° - y'.\text{sen}30° \\ y = x'.\text{sen}30° + y'.\cos 30° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

Substituindo na equação original:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + \left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = 4 \Rightarrow 5x'^2 + y'^2 = 4$$

8.5. INTERPRETAÇÃO DE UMA EXPRESSÃO DE 2º GRAU

A expressão algébrica geral do 2º grau em duas variáveis é da forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Esta expressão pode representar, num plano cartesiano, uma cônica. Neste caso, devido à presença do termo misto Bxy, será uma cônica rotacionada, com seu(s) eixo(s) e diretriz(es) não paralelos aos eixos do sistema. Para que seja possível identificar a natureza desta curva é necessário eliminar o termo misto Bxy através de uma rotação de eixos, onde, neste novo sistema de eixos x'Oy' seja determinada uma equação do tipo $A'x'^2 + C'x'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$.

Assim, deve-se fazer a rotação $\begin{cases} x = x'.\cos\theta - y'.\text{sen}\theta \\ y = x'.\text{sen}\theta + y'.\cos\theta \end{cases}$ Substituindo na equação (1):

$$A(x'.\cos\theta - y'.\text{sen}\,\theta)^2 + B(x'.\cos\theta - y'.\text{sen}\,\theta)(x'.\text{sen}\,\theta + y'.\cos\theta) + C(x'.\text{sen}\,\theta + y'.\cos\theta)^2 +$$
$$+ D(x'.\cos\theta - y'.\text{sen}\,\theta) + E(x'.\text{sen}\,\theta + y'.\cos\theta) + F = 0 \Rightarrow$$

$$A(x'^2.\cos^2\theta - \text{sen}(2\theta).x'.y' + y'^2.\text{sen}^2\theta) + B[(x'^2 - y'^2).\text{sen}\,\theta.\cos\theta + \cos(2\theta).x'.y'] +$$
$$+ C(x'^2.\text{sen}^2\theta + \text{sen}(2\theta).x'.y' + y'^2.\cos^2\theta)^2 + D(x'.\cos\theta - y'.\text{sen}\,\theta) + E(x'.\text{sen}\,\theta + y'.\cos\theta) + F = 0 \Rightarrow$$

$$\left[A.\cos^2\theta + \frac{B}{2}\text{sen}(2\theta) + C.\text{sen}^2\theta\right]x'^2 + \left[(C - A)\text{sen}(2\theta) + B.\cos(2\theta)\right]x'y' +$$
$$+ \left[A.\text{sen}^2\theta - \frac{B}{2}\text{sen}(2\theta) + C.\cos^2\theta\right]y'^2 + (D.\cos\theta + E.\text{sen}\theta)x' + (E.\cos\theta - D.\text{sen}\theta)y' + F = 0$$

Logo, tem-se que: $\boxed{A' = A.\cos^2\theta + \frac{B}{2}\text{sen}(2\theta) + C.\text{sen}^2\theta}$, $\boxed{B' = (C - A)\text{sen}(2\theta) + B.\cos(2\theta)}$,

$\boxed{C' = A.\cos^2\theta + \frac{B}{2}\text{sen}(2\theta) + C.\text{sen}^2\theta}$, $\boxed{D' = D.\cos\theta + E.\text{sen}\,\theta}$ $\boxed{E' = E.\cos\theta - D.\text{sen}\,\theta,\ F' = F}$

Como o objetivo é eliminar o termo B'x'y' deve-se ter B' = 0, ou seja:

$$(C - A)\text{sen}(2\theta) + B.\cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}}$$

De posse de θ pode fazer a substituição $\begin{cases} x = x'.\cos\theta - y'.\operatorname{sen}\theta \\ y = x'.\operatorname{sen}\theta + y'.\cos\theta \end{cases}$ na equação original de 2º grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, encontrando assim uma equação desprovida do termo xy.

Observações:

1) Perceba que se A = C teremos um valor indeterminado de tg 2θ.

Deste modo, deve-se ter $2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

2) Observe também que a rotação não altera o valor do termo independente F. Isto ocorre pois na rotação a origem dos sistemas xOy e x'Oy' não é alterada.

11.4.1. Teorema:
Em uma rotação de eixos que transforma uma equação da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ em uma equação da forma $A'x'^2 + B'x'y' + C'x'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ tem-se:
i) $A + C = A' + C'$;
ii) $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$.
Demonstração:

i) Fazendo a substituição $\begin{cases} x = x'.\cos\theta - y'.\operatorname{sen}\theta \\ y = x'.\operatorname{sen}\theta + y'.\cos\theta \end{cases}$ na equação geral de 2º grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ obtém-se $A' = A.\cos^2\theta + \frac{B}{2}\operatorname{sen}(2\theta) + C.\operatorname{sen}^2\theta$ e $C' = A.\operatorname{sen}^2\theta - \frac{B}{2}\operatorname{sen}(2\theta) + C.\cos^2\theta$.

Assim: $A' + C' = A(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + C(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = A + C$

ii) $B'^2 - 4A'C' = \left[(C-A)\operatorname{sen}(2\theta) + B.\cos(2\theta)\right]^2 - 4\left[A.\cos^2\theta + \frac{B}{2}\operatorname{sen}(2\theta) + C.\operatorname{sen}^2\theta\right]\left[A.\operatorname{sen}^2\theta - \frac{B}{2}\operatorname{sen}(2\theta) + C.\cos^2\theta\right] =$

$= (C - A)^2\operatorname{sen}^2 2\theta + 2B(C - A)\operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta) + B^2\cos^2 2\theta - 4(A^2 + C^2)\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta -$

$- 4AC(\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta) + 2B(A - C)(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}(2\theta) + B^2\operatorname{sen}^2 2\theta =$

$= B^2(\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta) + 4(A^2 + C^2 - 2AC)\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - 4(A^2 + C^2)\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - 4AC(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta) =$

$= B^2 - 4AC$

Observação: A aplicação deste teorema faz com que a determinação dos coeficientes A' e C' seja feita de forma bem mais rápida. Uma vez que A' + C' = A + C o valor de A' + C' é determinado diretamente.

Como B' = 0 segue que $A'C' = -\frac{B^2 - 4AC}{4}$. De posse de A' + C' e A'C' pode-se determinar os valores de A' e C', montando a equação de segundo grau $x^2 - (A' + C')x + A'C' = 0$.

Exemplos:

1) Determine o ângulo de rotação que transforma a equação $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 = 4$ em outra desprovida do termo misto de grau dois.
Solução:
Comparando com expressão geral de 2º grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ tem-se que A = 2, $B = \sqrt{3}$, C = 1 e F = – 4. Assim, deve-se ter $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{\sqrt{3}}{2 - 1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ$

2) Através de uma rotação dos eixos, transforme a equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$ em outra desprovida do termo misto de grau dois.

Solução:

Comparando com expressão geral de 2º grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ tem-se que A = 5, B = 4, C = 2, D = – 24, E = – 12 e F = 29. Assim, deve-se ter $tg(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3}$.

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(2\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Deste modo, as equações de rotação ficam da forma: $x = \frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}$ e $y = \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}$

Substituindo na equação original:

$$5\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right) + 2\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 24\left(\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right) - 12\left(\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right) + 29 = 0 \Rightarrow$$

$$4x'^2 - 4x'y' + y'^2 + \frac{4(2x'^2+3x'y'-2y'^2)}{5} + \frac{2(x'^2+4x'y'+4y'^2)}{5} - \frac{24\sqrt{5}(2x'-y')}{5} - \frac{12\sqrt{5}(x'+2y')}{5} + 29 = 0 \Rightarrow$$

$$6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}x' + 29 = 0 \Rightarrow 6(x'-\sqrt{5})^2 + y'^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x'-\sqrt{5})^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} + y'^2 = 1$$

3) Transformar a equação $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 6y + 1 = 0$ numa equação do tipo $Ax''^2 + Cy''^2 + F = 0$.

Solução:

Inicialmente será feita uma translação de eixos de modo que os termos de 1º grau sejam nulos.

Substituindo x' = x + h e y' = y + k:

$3(x' + h)^2 + 2(x' + h)(y' + k) + 3(y' + k)^2 - 6(x' + h) - 6(y' + k) + 1 = 0$

Fazendo D' = E' = 0 tem-se: $\begin{cases} 6h + 2k - 6 = 0 \\ 2h + 6k - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{3}{4}$ e $k = \frac{3}{4}$.

Substituindo obtém-se a equação $6x'^2 + 4x'y' + 6y'^2 - 7 = 0$.

Agora será realizada uma rotação para eliminar o termo misto x'y'. Como A = C tem-se que o ângulo de rotação é igual a 45º. Logo:

$$\begin{cases} x' = x''.\cos 0 - y''.\text{sen}0 \\ y' = x''.\text{sen}0 + y''.\cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x''.\cos 45^\circ - y''.\text{sen}45^\circ \\ y' = x''.\text{sen}45^\circ + y''.\cos 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'') \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'') \end{cases} \Rightarrow$$

$$6\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y'')\right]^2 + 4\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x''-y'')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y'')\right] + 6\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y'')\right]^2 - 7 = 0 \Rightarrow 8x''^2 + 4y''^2 - 7 = 0$$

4) (ITA-2003) A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y - 6 = 0\}$, é igual a:

a) $\sqrt{6}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $\frac{10}{3}$

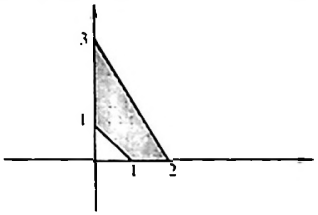
Solução:

Este é um bom exemplo que não é obrigatório fazer a rotação de eixos para determinar o lugar geométrico definido pela expressão de 2º grau com termo cruzado. Uma fatoração mostrará que o lugar geométrico em questão se trata de duas retas.

$3x^2 + 2y^2 - 5xy - 9x - 8y + 6 = 0 \Rightarrow \underline{3x^2} + \underline{2y^2} + \underline{3xy} + \underline{2xy} - 6x - \underline{3x} - 6y - \underline{2y} + 6 = 0 \Rightarrow$

$3(x^2 + xy - x) + 2(y^2 + xy - y) - 6x - 6y + 6 = 0 \Rightarrow 3x(x + y - 1) + 2y(y + x - 1) - 6(x + y - 1) = 0 \Rightarrow$
$(x + y - 1)(3x + 2y - 6) = 0.$

A equação apresentada é o conjunto de duas retas e a área está representada abaixo:



A área é dada pela diferença das áreas de dois triângulos retângulos:

$$A = \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

5) (ITA-2013) Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

a) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.
b) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.
c) ela admite duas retas tangentes paralelas ao eixo Ox.
d) a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.
e) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$

Solução (Alternativa B):

Pode-se obter o coeficiente angular de uma reta tangente qualquer à elipse em um ponto, genérico, (x_P, y_P), por meio da derivada de y em relação a x, y', aplicada nas coordenadas do ponto.

Assim, derivando implicitamente: $2x + 2y + 2xy' + 2yy' - 2 + 4y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{1 - x - y}{x + y + 2}$

Dessa forma, em cada ponto (x_P, y_P), o coeficiente angular da reta tangente é:

$m = \frac{1 - x_P - y_P}{x_P + y_P + 2}$, desde que $x_P + y_P \neq -2$.

Nota-se que uma tangente é paralela ao eixo Ox se, e somente se, $m = 0$. Logo, $x_P + y_P = 1$. Mas como o ponto também deve pertencer à curva, é necessário impor que:

$(1 - y_P)^2 + 2.(1 - y_P).y_P + y_P^2 - 2.(1 - y_P) + 4y_P + 1 = 0 \Leftrightarrow 6y_P = 0 \Leftrightarrow y_P = 0$, significando que em apenas 1 ponto, (1,0), há reta tangente à parábola e paralela ao eixo das abscissas.

Finalmente, para obter o vértice da parábola, deve-se eliminar o termo retangular, aplicando uma rotação dos eixos coordenados de 45° em torno da origem. Desse modo, fazendo $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \end{cases}$.

conclui-se que a equação fica: $2u^2 + u\sqrt{2} + 3v\sqrt{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = -2.\frac{3}{4}.\left(v\sqrt{2} + \frac{1}{4}\right)$, que é uma parábola de vértice $V\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$. No sistema cartesiano original, xOy, tem-se que $V\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$.

6) (IME-2011) Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 15 = 0$.

1ª Solução:

Para eliminar o termo retangular, aplique-se uma rotação de eixos em torno da origem, segundo, um ângulo θ, tal que: $tg2\theta = \frac{-10\sqrt{3}}{1-11} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi$, com $k \in Z$.

Pode-se, assim, utilizar $\theta = \frac{\pi}{6}$. A partir das equações de rotação de eixos:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y') \\ y = \frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \end{cases}$$ substituindo-se na equação dada, vem que:

$$\left[\frac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y')\right]^2 - 10\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y')\right]\left[\frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3})\right] + 11\left[\frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3})\right]^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$-4x'^2 + 16y'^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{4} - y'^2 = 1$, que representa uma hipérbole, centrada na origem, de semieixos a = 2 e b = 1 (real e imaginário, respectivamente).

Assim, como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$, conclui-se que a excentricidade da cônica vale $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2ª Solução:

Como não se está interessado no ângulo de rotação que elimina o termo retangular, pode-se utilizar o fato que, para toda mudança de sistema cartesiano, a equação geral de 2º grau a duas variáveis: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, possui os valores $\Delta = B^2 - 4AC$ e $T = A + C$ invariantes.

Assim, escolhendo-se uma rotação de eixos em torno da origem adequada, pode-se obter uma nova equação: $A'x'^2 + C'y'^2 + F = 0$, notando-se que a equação dada está desprovida de termos lineares (já centrada na origem), que o termo independente é invariável, neste caso, por rotação de eixos, em que $B' = 0$. Logo: $\begin{cases} A' + C' = A + C \\ B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' + C' = 12 \\ A'C' = -64 \end{cases}$

Tal sistema admite como solução o par $(A', C') = (-4, 16)$, que conduz à nova equação $-4x'^2 + 16y'^2 + 16 = 0$, representando, assim, uma hipérbole de excentricidade $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Obs: A outra solução do sistema, $(16, -4)$, conduz à equação $16x''^2 - 4y''^2 + 16 = 0$, a qual também representa uma hipérbole de excentricidade $\frac{\sqrt{5}}{2}$. A única diferença é que se trata de outro sistema, rotacionado $\frac{\pi}{2}$ em relação ao utilizado anteriormente.

Exercícios

1) (Cederj-2010) O lugar geométrico dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja distância ao ponto (1, 2) é maior do que 3 é descrito por uma das inequações seguintes. Identifique-a:
(A) $(x-1)^2 + (y-2)^2 > 9$
(B) $x^2 + y^2 > 9$
(C) $(x+1)^2 + (y+2)^2 < 3$
(D) $x^2 + y^2 > 3$
(E) $(x-2)^2 + (y-1)^2 > 3$

2) (UCS-2007) O centro de uma circunferência está localizado no ponto de intersecção das retas de equações $y = 2 - x$ e $y = x - 2$, e seu raio é dado pela distância entre os pontos de intersecção da parábola de equação $y = x^2$ com a reta descrita por $y = 2x$. A equação que descreve essa circunferência é
a) $(x-2)^2 + y^2 = 10$.
b) $(x-2)^2 + y^2 = 20$.
c) $x^2 + (y-2)^2 = 20$.
d) $x^2 + (y-2)^2 = 10$.
e) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 20$.

3) (UEPB-2009) O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano eqüidistante dos pontos P(0, 0), Q(2, 6) é a reta de equação:
a) $x + 3y = 0$ d) $y = 3x$
b) $x - 3y - 10 = 0$ e) $x + 3y - 8 = 0$
c) $x + 3y - 10 = 0$

4) (UERN-2011) Sendo A(2, – 1) e B(5, 3) dois vértices de um triângulo no plano cartesiano, o lugar geométrico do terceiro vértice C, para que a área do triângulo ABC seja 10 (unidades de área), é:
A) A reta mediatriz de AB.
B) Uma circunferência com centro no ponto médio de AB.
C) Um par de retas paralelas ao segmento AB.
D) Uma única reta paralela ao segmento AB.

5) (UESPI-2008) Indique a condição sobre os coeficientes a, b, c e d para que a equação $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ seja gráfico de uma circunferência.
A) $a \neq 0$ e $b^2 + c^2 > 4ad$
B) $a \neq 0$ e $b^2 + c^2 < 4ad$
C) $a \neq 0$ e $b^2 - c^2 = 4ad$
D) $a > 0$ e $b^2 - c^2 > 4ad$
E) $a < 0$ e $b^2 + c^2 < 4ad$

6) (Unifesp-2006) A parábola $y = x^2 - tx + 2$ tem vértice no ponto (x_t, y_t). O lugar geométrico dos vértices da parábola, quando t varia no conjunto dos números reais, é
a) uma parábola.
b) uma elipse.
c) um ramo de uma hipérbole.
d) uma reta.
e) duas retas concorrentes.

7) (Unesp-2006) Fixado um sistema de coordenadas ortogonais em um plano, considere os pontos O(0, 0), A(0, 2) e a reta r de equação $y = -1$.
a) Se a distância do ponto $Q(x_0, 2)$ ao ponto A é igual à distância de Q à reta r, obtenha o valor de x_0, supondo $x_0 > 0$.
b) Obtenha a equação do lugar geométrico dos pontos P(x, y) desse plano, cuja distância até o ponto A é igual à distância até a reta r.

8) (Fuvest-96) Considere no plano cartesiano, os pontos P= (0, - 5) e Q = (0, 5). Seja X = (x, y) um ponto qualquer com $x > 0$.
a) Quais são os coeficientes angulares das retas PX e QX?
b) Calcule, em função de x e y, a tangente do ângulo PXQ.
c) Descreva o lugar geométrico dos pontos X = (x, y) tais que $x > 0$ e $PXQ = \pi/4$ radianos.

9) (UFC-99) O lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC mede 3 unidades de comprimento. Determine uma equação do lugar geométrico descrito pelo vértice C quando este se desloca de tal forma que o ângulo $C\hat{B}A$ tenha como medida o dobro da medida do ângulo $C\hat{A}B$.

10) (EsPCEx-2012) A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$ é dada por
a) duas retas concorrentes
b) uma circunferência
c) uma elipse
d) uma parábola
e) uma hipérbole

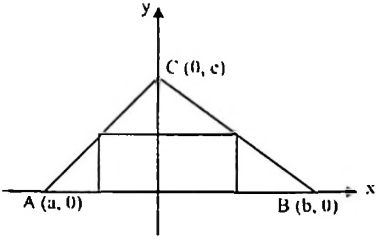
11) (AFA-98) O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que, juntamente com os pontos A(-3,5) e B(3,5), determina triângulos com perímetro $2p = 16$ cm é uma

a) elipse. b) parábola.
c) hipérbole. d) circunferência.

12) (ITA-67) Qual o lugar geométrico dos pontos, cuja soma das distâncias a duas retas que se cortam, é igual a uma constante K?
a) um quadrilátero
b) uma circunferência
c) uma reta passando pelo ponto de interseção das retas
d) uma elipse
e) uma hipérbole

13) (ITA-71) Dada uma circunferência de diâmetro AB, centro O e um ponto C da circunferência, achar o lugar geométrico dos pontos de intercessão do raio OC à paralela ao diâmetro AB e passando pelo pé da perpendicular a AC tirada por O.
a) um segmento de reta paralela a AB;
b) uma circunferência de raio 2R/3 e origem O;
c) uma circunferência de raio R/2 e origem O;
d) uma elipse de semi-eixo maior OA;
e) N.d.r.a.

14) (ITA-74) Uma equação do lugar geométrico das interseções das diagonais dos retângulos inscritos no triângulo ABC e com um lado em AB (figura abaixo) é:



a) $x + \frac{2(a+b)}{c} y = a + b$

b) $x + \frac{(a+b)}{c} y = \frac{a+b}{2}$

c) $ax + 3(b+c)y = \frac{a+b}{2}$

d) $x + cy + ab = 0$
e) N.D.R.A.

15) (IME Militares-91) Sejam x e y coordenadas de um ponto M de uma elipse. Sejam A e A' as extremidades do eixo maior da elipse. Determine a equação e identifique o lugar geométrico do ortocentro do triângulo AMA'.

16) (ITA-81) Seja xOy um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Com referência a este sistema, consideremos um ponto P = (2, 0) e uma reta r cuja equação é $x - 1 = 0$. Qual o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias ao ponto P e à reta r são iguais?
a) Duas semi-retas, cujas equações são: $x - y - 1,5 = 0$ e $x + y - 1,5 = 0$, com $x \geq 1,5$.
b) uma circunferência, com centro no ponto (3, 0) e raio 1,5.
c) Uma parábola, cuja equação é $y = 2x^2 - 3$.
d) Uma parábola, cuja equação é $y^2 - 2x - 3$.
e) Nenhuma das anteriores.

17) (ITA-84) O lugar geométrico da intercessão de duas retas, uma passando pelo ponto (0, –1) com coeficiente angular a_1, a outra passando pelo ponto (0, 1) com coeficiente angular a_2 tal que $a_1^2 + a_2^2 = 2$, é:
a) $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = 1$ d) $y = a_1 x^2$
b) $x^2 - y^2 = 1$ e) $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$
c) $x^2 + y^2 = 1$

18) (ITA-85) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, considere a família de circunferências que passam pelo ponto (2, – 1 2) e que são tangenciadas pela reta y = – 3 2. Então a equação do lugar geométrico dos centros dessas circunferências é dado por:
a) $x^2 - 4x - 2y + 2 = 0$
b) $y^2 - 2y - 5x - 2 = 0$
c) $x^2 + 2x - 7y + 3 = 0$
d) $y^2 - 4y - 2x - 3 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$

19) (ITA-87) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, seja (L) o lugar geométrico dos pontos P(x, y) que satisfazem a seguinte condição: "a distância de P(x, y) ao ponto Q(6, 0) é igual à distância do ponto P(x, y) ao eixo das ordenadas". Nestas condições (L) é:
a) uma parábola de equação $y^2 = 6x$
b) uma elipse de equação $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$
c) um quadrado
d) uma hipérbole de equação $3x^2 - 2y^2 = (6)^{1/2}$
e) uma parábola de equação $y^2 - 12x + 36 = 0$

20) (ITA-90) Sejam as retas (r) e (s) dadas respectivamente pelas equações $3x - 4y + 12 = 0$

e $3x - 4y + 4 = 0$. Considere (ℓ) o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam simultaneamente (r) e (s). Uma equação que descreve (ℓ) é dada por:

a) $3x - 4y + 8 = 0$ b) $3x + 4y + 8 = 0$
c) $x - y + 1 = 0$ d) $x + y = 0$
e) $3x - 4y - 8 = 0$

21) (ITA-98) Considere a hipérbole H e a parábola T, cujas equações são, respectivamente, $5(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = -20$ e $(y - 3)^2 = 4(x - 1)$. Então, o lugar geométrico dos pontos P, cuja soma dos quadrados das distâncias de P a cada um dos focos da hipérbole H é igual ao triplo do quadrado da distância de P ao vértice da parábola T, é:

a) a elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.

b) a hipérbole de equação $\frac{(y+1)^2}{5} + \frac{(x-3)^2}{4} = 1$.

c) O par de retas dadas por $y = \pm (3x - 1)$.
d) A parábola de equação $y^2 = 4x + 4$.
e) A circunferência centrada em (9 , 5) e raio $\sqrt{120}$.

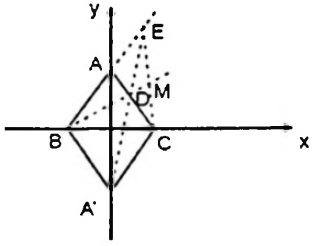
22) (IME-65) Sobre uma circunferência toma-se um ponto qualquer A. A partir desse ponto, traçam-se retas secantes, tendo como comprimento o dobro das respectivas cordas. Definir, provando, o lugar geométrico das extremidades das retas assim construídas.

23) (IME-74) Dado um ponto fixo A, sobre uma circunferência C, de raio r, determine o lugar geométrico das interseções das circunferências que têm por diâmetros duas cordas da circunferência C, perpendiculares entre si e que passam pelo ponto A.

24) (IME-77) Sejam A, B $\in \Re^2$ de coordenadas cartesianas (2, 5) e (1, 3), vértices fixos de um conjunto de triângulos de área 12. Determine a equação do lugar geométrico do conjunto de pontos C, terceiro vértice destes triângulos. Obs: A área é considerada positiva qualquer que seja a orientação do triângulo, de acordo com a orientação axiomática.

25) (IME-78) De um ponto P(x, y) traçam-se duas tangentes à elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Determine a equação do lugar geométrico do ponto P, de tal forma que estas tangentes sejam perpendiculares entre si.

26) (IME-81) Dados dois triângulos equiláteros ABC e A BC traça-se por A uma reta qualquer que encontra os lados AC e AB, ou os seus prolongamentos, nos pontos D e E, respectivamente. Determine o lugar geométrico dos pontos de encontro das retas BD e CE.



27) (IME-83) Determine a equação, identificando a sua natureza, do lugar geométrico de um ponto que se desloca de tal forma que o quadrado de sua distância ao ponto (1, 1) é proporcional à sua distância à reta $x + y = 0$.

28) (IME-84) São dadas duas retas paralelas r e r' e um ponto O. Determine o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de O aos segmentos da reta AA', vistos de O sob um ângulo reto e tais que A pertence a r e A' pertence a r'. Sabe-se que: distância de O a r: d; distância de O a r': p; distância de r e r': p – d.

29) (IME-85) Uma reta m_1 passa pelo ponto fixo $P_1(-1, -3)$ e intercepta a reta m_2: $3x + 2y - 6 = 0$ no ponto A e a reta m_3: $y - 3 = 0$ no ponto B. Determinar a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento retilíneo AB à medida que a reta m_1 gira em torno do ponto P_1.

30) (IME-86) Calcular a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos determinados pela interseção da cônica $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ com as retas de coeficiente angular igual a 1/2.

31) (IME-86) Dados dois pontos fixos A e B (AB = d), considere as elipses passando por B, com foco em A e eixo maior de comprimento $2a$, tal que $2a > d$.
a) Determine o lugar geométrico do segmento do foco F das elipses.

b) Determine o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos ABF.

32) (IME-91) Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num plano. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes ao círculo dado (exteriormente) e à reta dada.

33) (IME-79) Considere a família de triângulos ABC onde BC = a, AB = c e AC = b. Os pontos B e C são fixos e A varia de tal maneira que b – c = k (constante). Pede-se o lugar geométrico do ponto D, encontro da bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ com a perpendicular baixada do vértice C àquela bissetriz.

34) (IME-89) Um ponto se move de modo que, o quadrado de sua distância à base de um triângulo isósceles é igual ao produto de suas distâncias aos outros dois lados do triângulo. Determine a equação da trajetória deste ponto; identificando a curva descrita e respectivos parâmetros.

35) (IME-89) Dada a equação
$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m + 1)y + 3m + 14 = 0$
a) Determine os valores de m, para que esta equação corresponda a um círculo.
b) Determine o lugar geométrico dos centros destes círculos.

36) (IME-89) Seja ABCD um trapézio cuja base maior AB = *a* é fixa e cuja base menor CD tem comprimento constante, igual a *b*. A soma dos lados não paralelos é constante e igual a *l*. Os prolongamentos dos lados não paralelos se cortam em I.
a) demonstre que o l.g. descrito pelo ponto I, quando a base CD se desloca, é uma cônica;
b) determine eixos e distância focal.

37) (IME-90) De cada ponto do círculo $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$, traça-se uma perpendicular sobre o diâmetro paralelo ao eixo OY. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos médios destas perpendiculares.

38) (IME-90) Considere a família de retas representadas pela equação $y = mx - \frac{p(1+m^2)}{2m}$ onde *p* é uma constante positiva dada e m um número real variável.
a) Determine a condição para que num ponto M – (x_0, y_0) do plano cartesiano, passem duas retas dessa família;
b) Determine o lugar geométrico dos pontos M para os quais as retas que por eles passem sejam perpendiculares.

39) (IME-94) Seja $y = \frac{x^2}{2}$ uma parábola com foco F e diretriz **d**. Uma reta, cujo coeficiente angular é $m \neq 0$, passa por F e corta a parábola em dois pontos M_1 e M_2, respectivamente. Seja G o conjugado harmônico de F em relação a M_1 e M_2. Pede-se:
a) As coordenadas de G em função de m
b) O lugar geométrico do ponto G quando m varia

40) (IME-95) Seja ABC um triângulo qualquer no qual os vértices B e C são fixos. Determine o lugar geométrico descrito pelo ponto A, variável, sabendo que os ângulos B e C satisfazem à relação tg B tg C = k, k constante real. Discuta a solução para os diversos valores de k.
Sugestão: Considere como eixos coordenados as retas BC e a mediatriz do segmento BC.

41) (IME-97) Dados os pontos A e B do plano, determine a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano, de tal modo que a razão entre as distâncias de P a A e de P a B seja dada por uma constante k. Justifique a sua resposta analiticamente, discutindo todas as possibilidades para k.

42) (IME-Militares-2000) Determine o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes interiormente simultaneamente às duas circunferências descritas pelas equações:
$x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ e $x^2 + y^2 = 1$.

43) (IME-2002) Considere uma parábola de eixo focal OX que passe pelo ponto (0; 0). Define-se a subnormal em um ponto P da parábola como o segmento de reta ortogonal à tangente da curva, limitado pelo ponto P e o eixo focal. Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios das subnormais dessa parábola.

44) (IME-87) Dados um sistema de eixos ortogonais XOY e um ponto A, de coordenadas $(x_0; y_0)$, $(x_0; y_0) \neq (0; 0)$, considere dois pontos variáveis P e Q, P pertencente ao eixo OX e Q pertencente ao eixo OY, tais que a área do

triângulo APQ seja constante e igual a K, $K \in \mathbb{R}$. Calcule e identifique a equação do lugar geométrico do ponto médio do segmento PQ.

45) (IME-96) Um triângulo ABC tem base AB fixa sobre uma reta r. O vértice C desloca-se ao longo de uma reta s, paralela a r e a uma distância h da mesma. Determine a equação da curva descrita pelo ortocentro do triângulo ABC.

46) (IME-72) Seja E a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e t uma tangente variável. Sejam $M(x_0; 0)$ e $N(0; y_0)$ as interseções de t com os eixos coordenados Ox e Oy, respectivamente. Determine a equação cartesiana do lugar geométrico descrito pelo ponto $P(x_0; y_0)$ e esboce o seu gráfico.

47) Determinar o LG dos pontos (x, y) tais que a soma dos quadrados de suas distâncias às retas $5x + 12y - 4 = 0$ e $12x - 5y + 10 = 0$ é 5.

48) O triângulo ABC possui fixos os vértices A(0, 0) e B(9, 12). O seu vértice C move-se de modo que, para todas as suas posições, AC = AB. Determine o lugar geométrico do baricentro do triângulo ABC.

49) Sobre uma reta XY, consideram-se 2 pontos A, B e um terceiro ponto, C, fora do segmento AB; achar o lugar da interseção das tangentes tiradas de A e B a cada um dos círculos tangentes a XY no ponto C.

50) Considere em um plano dois círculos exteriores. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes exteriores a estes dois círculos.

51) Uma circunferência de raio variável passa por dois pontos fixos A e A'. Qual é o lugar geométrico das extremidades de seu diâmetro paralelo a AA'?

52) Sejam AB e CD dois diâmetros perpendiculares fixos de uma circunferência de centro O. Se M é um ponto variável sobre a circunferência e P a projeção de M sobre CD, achar o lugar geométrico da interseção das retas OM e AP.

53) Determinar o lugar geométrico dos focos das parábolas que admitem para tangente no vértice uma reta r e que passam por um ponto fixo A.

54) Em uma parábola seja TM uma tangente, com M pertencente à parábola e T sendo a interseção da tangente com o eixo de simetria da parábola. Fazendo esta tangente variar, determine o lugar geométrico do ponto médio do segmento TM.

55) Em uma parábola seja TM uma reta normal, com M pertencente à parábola e T sendo a interseção da normal com o eixo de simetria da parábola. Fazendo esta normal variar, determine o lugar geométrico do ponto médio do segmento TM.

56) Um triângulo retângulo ABC tem o vértice do ângulo reto fixo. O vértice B percorre uma reta dada r e a hipotenusa BC permanece perpendicular a r. Determinar o lugar geométrico o vértice C.

57) Determinar o lugar geométrico dos pontos cuja diferença dos quadrados das distâncias a uma reta e um ponto dados tem um valor constante k^2.

58) Determinar o lugar geométrico dos centros dos círculos que passam por um ponto fixo A e que interceptam uma reta r sob segmento de comprimento constante 2ℓ.

59) São dados um ponto fixo A e uma reta fixa r, sobre a qual desliza um segmento de reta BC de comprimento constante a. Achar o lugar geométrico do centro O do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

60) Seja MM' uma corda focal móvel de uma parábola. Determine o lugar geométrico dos pontos médio de MM'.

61) Qual é a equação de uma hipérbole quando se toma para eixos coordenados suas assíntotas.

62) Qual o lugar geométrico dos pontos tais, que o produto de suas distâncias a duas retas fixas seja constante.

63) Qual é o lugar geométrico dos pontos tais, que a diferença dos quadrados de suas distâncias a 2 retas fixas seja constante.

64) Sendo AR e CR dois diâmetros retangulares fixos de um círculo de centro O, sendo M um ponto variável sobre a curva e P a projeção de M sobre CD, achar o lugar geométrico da interseção das retas OM a AP.

65) Um triângulo retângulo ABC tem o vértice do ângulo reto fixo. O vértice B percorre uma reta dada D e a hipotenusa BC permanece perpendicular a D. Achar o lugar geométrico do meio M, de BC e o lugar de C.

66) O lado AB de um triângulo ABC mede 3 unidades de comprimento. Determine uma equação do lugar geométrico descrito pelo vértice C quando este se desloca de tal forma que o ângulo CBA tenha como medida o dobro da medida do ângulo CAB.

67) Considere o triângulo ABC inscrito na circunferência $(x + 1)2 + (y - 4)2 = 25$. Se A(4, 4), B(2, 0) e C percorre a circunferência. Determine o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos de vértices A, B e C.

68) Eliminar o termo xy na equação $x^2 + 4xy + y^2 - 2 = 0$ mediante uma rotação de eixos.

69) Calcular o ângulo θ ($0^o \leq \theta \leq 90^o$) necessário para girar os eixos para que desapareça o termo em xy na equação $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + \sqrt{3}x - y + 3 = 0$ e achar a equação da curva referida aos novos eixos.

70) Transformar a equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$ numa equação do tipo $Ax'^2 + Cy'^2 = F$, mediante uma rotação de eixos.

71) Reduzir a equação $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y - 1 = 0$ à forma $Ax''^2 + Cy''^2 + F = 0$.

72) Transformar a equação $4x^2 + y^2 - 4xy - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ numa equação $Ay'^2 + Bx'^2 = 0$.

73) Reduza a equação à forma mais simples através de translação e/ou e rotação.
a) $4x^2 + y^2 + 8x - 10y + 13 = 0$
b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$
c) $4x^2 - 5y^2 + 12x + 40y + 29 = 0$
d) $x^2 - 6x - 5y + 14 = 0$

74) Dada a cônica de equação $x^2 + y^2 - 2xy + \sqrt{2}x = 0$, determine as coordenadas do foco e uma equação da diretriz.

75) Determine a equação reduzida da parábola de diretriz $y + x = -2$, sabendo que os pontos $L_1(-1, 3)$ e $L_2(3, -1)$ são as extremidades do latus rectum.

76) Determine os focos da cônica de equação $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$.

77) Determine os parâmetros e os focos da cônica dada pela equação $24xy - 7y^2 + 36 = 0$.

78) Mediante uma rotação de eixos, elimine o termo xy nas equações:
a) $x^2 + 4xy + y^2 - 2 = 0$
b) $5x^2 + 4xy - 2y^2 - 1 = 0$

79) Reduza a equação $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 4x + 4y - 1 = 0$ à forma $Ax''^2 + Cy''^2 + F = 0$.

80) Dada a cônica de equação $3x^2 - 4xy - 8x - 1 = 0$, pede-se o centro e sua a equação canônica desprovida do termo xy.

81) Identifique as seguintes cônicas:
a) $2x^2 + xy - y^2 + 7x + y + 6 = 0$
b) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$
c) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 68x - 74y + 41 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$
e) $25x^2 - 14xy - 25y^2 + x - 3y - 3 = 0$
f) $4x^2 + 4xy + y^2 + 6x - 3y + 2 = 0$
g) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

82) Determine a equação da cônica que passa pelo ponto (4, – 2) e pelas interseções das cônicas $x^2 + xy + y^2 + x - 3y - 1 = 0$ e $2x^2 - xy - 2x + y = 0$.

83) Calcular as coordenadas do centro da cônica $x^2 - 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$.

84) Determinar as equações das retas tangentes à cônicas definida pela equação $x^2 + xy - y^2 - 2x - y = 0$ e que passam pelo ponto (1, – 2)

Aplicações da Geometria Analítica na Geometria Plana

9.1. INTRODUÇÃO:

É possível utilizar todos os instrumentos apresentados nos capítulos de geometria analítica para resolver alguns problemas de geometria plana. Na verdade, é possível resolver qualquer problema de geometria plana a partir dos conceitos da geometria analítica, entretanto na maioria das situações a aplicação dos conceitos da geometria analítica resultará em uma solução muito mais longa. Neste apêndice serão apresentadas as situações em que a solução por geometria analítica proporciona uma solução mais curta e elegante do que a solução usando apenas os conceitos e teoremas da geometria plana.

9.2. DEFINIÇÃO DOS EIXOS

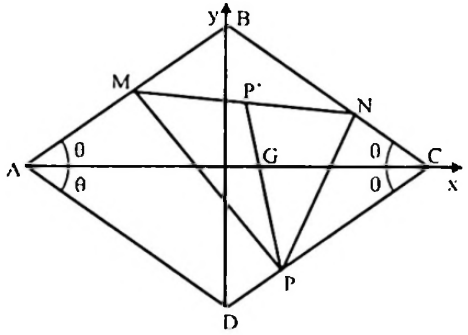
Para uma solução mais curta por geometria analítica é fundamental a definição da origem e das direções dos eixos que serão adotados para a resolução do problema. A princípio qualquer ponto do plano pode ser usado como centro do sistema de eixos, porém a simplicidade das contas dependerá do ponto a ser escolhido. Por exemplo, em uma questão que envolva circunferência é natural que o centro do sistema cartesiano coincida com o centro da circunferência. Do mesmo modo, em uma questão sobre triângulo retângulo é indicado adotar a origem do sistema como sendo o vértice do ângulo reto e cada eixo sobre os catetos do triângulo. Na verdade, não existe um método universal para definição do sistema de eixos que deverá ser adotado, acompanhe os exemplo resolvidos para identificar o mais apropriado par cada caso.

9.3. PONTO MÉDIO E BARICENTRO

Pela simplicidade da fórmula do ponto médio a grande maioria dos problemas de geometria plana envolvendo este conceito podem ser resolvidas utilizando geometria analítica.

Exemplos:

1) Sobre os lados AB, BC e DC, de um losango ABCD, marcam-se, respectivamente, os pontos M, N e P, de modo que o baricentro do triângulo MNP esteja sobre a reta AC. Demonstre que AM + DP = BN.
Solução:



Suponha um sistema ortogonal com origem no centro do losango, eixo x sobre AC e eixo y sobre BD.

$G \in AC \Leftrightarrow y_G = 0 \Leftrightarrow \frac{y_M + y_N + y_P}{3} = 0 \Leftrightarrow$

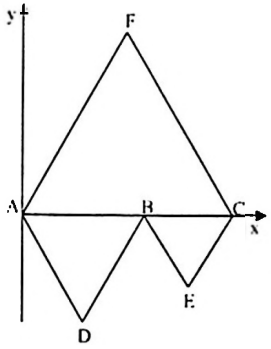
$AM.\text{sen}\,\theta + CN.\text{sen}\,\theta - CP.\text{sen}\,\theta = 0 \Leftrightarrow$

$AM + CN - CP \Leftrightarrow AM + L - AN - L - DP \Leftrightarrow$

$AM - DP = BN$

2) (Olimpíada da Irlanda-94) Sejam A, B e C três pontos colineares, com B entre A e C. Os triângulos eqüiláteros ABD, BCE e CAF são construídos com D e E de um lado da reta AC e F no lado oposto. Prove que os baricentros dos triângulos são vértices de um triângulo eqüilátero. Prove também que o baricentro deste triângulo pertence à reta AC.

Solução:



Neste sistema a origem estará no ponto A, com o eixo x sobre a reta AC.

Suponha que $\overline{AB} = 6a$ e $\overline{BC} = 6b$, ou seja:

$A(0, 0)$, $B(6a, 0)$, $C(6a + 6b, 0)$, $D\left(3a, -3\sqrt{3}a\right)$,

$E\left(6a + 3b, -3\sqrt{3}b\right)$, $F\left(3a + 3b, 3\sqrt{3}(a + b)\right)$

Sejam P, M e N os baricentros de ΔACF, ΔABD e ΔBCE, respectivamente. Assim:

$P\left(3a + 3b, \sqrt{3}(a + b)\right)$, $M\left(3a, -\sqrt{3}a\right)$ e $N\left(6a + 3b, -\sqrt{3}b\right)$

$$\overline{PM} = \sqrt{(3a + 3b - 3a)^2 + (\sqrt{3}a + \sqrt{3}b + \sqrt{3}a)^2} = \sqrt{9b^2 + 3(2a + b)^2} =$$

$$= \sqrt{9b^2 + 12a^2 + 12ab + 3b^2} = \sqrt{12a^2 + 12ab + 12b^2} = 2\sqrt{3(a^2 + ab + b^2)}$$

$$\overline{PN} = \sqrt{(3a + 3b - 6a - 3b)^2 + (\sqrt{3}a + \sqrt{3}b + \sqrt{3}b)^2} = \sqrt{9a^2 + 3(a + 2b)^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2 + 12ab + 12b^2} =$$

$$= \sqrt{12a^2 + 12ab + 12b^2} = 2\sqrt{3(a^2 + ab + b^2)}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{(6a + 3b - 3a)^2 + (-\sqrt{3}a + \sqrt{3}b)^2} = \sqrt{9(a + b)^2 + 3(a - b)^2} = \sqrt{9a^2 + 18ab + 9b^2 + 3a^2 - 6ab + 3b^2} =$$

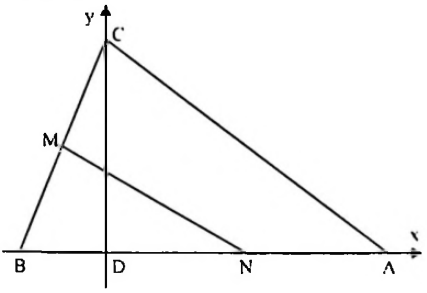
$$= \sqrt{12a^2 + 12ab + 12b^2} = 2\sqrt{3(a^2 + ab + b^2)}$$

Como $\overline{PM} = \overline{PN} = \overline{MN}$ então ΔPMN é equilátero. Se G é o baricentro de ΔPMN:

$$y_G = \frac{\sqrt{3}a + \sqrt{3}b - \sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{3} = 0 \Rightarrow G \in AC$$

3) Seja ABC um triângulo acutângulo e CD a altura correspondente ao vértice C. Se M é o ponto médio de BC e N é o ponto médio de AD, calcular MN sabendo que AB = 8 e CD = 6.

Solução:



No sistema de eixos cartesianos a origem coincide com o ponto D, o eixo x está sobre AB e o eixo y está sobre CD.

Supondo $\overline{BD} = 2a$ tem-se:

$A(8 - 2a, 0)$, $B(-2a, 0)$, $C(0, 6)$, $D(0, 0)$

Como M e N são pontos médios segue que:

$M(-a, 3)$, $N(4 - a, 0)$

Assim: $\overline{MN} = \sqrt{(-a - 4 + a)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

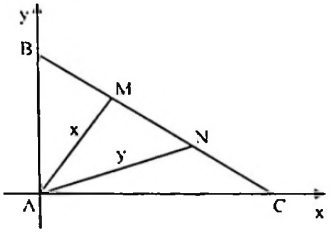
12.4. DISTÂNCIA AO QUADRADO

Sabe-se que a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, que envolve uma raiz quadrada. Porém, se elevarmos ao quadrado o valor da distância entre dois pontos obtém-se uma expressão bem mais simples.

Exemplos:

1) Determinar uma relação entre as cevianas x e y de um triângulo de hipotenusa igual a 9, sabendo-se que os pés das cevianas dividem a hipotenusa em três partes iguais.

Solução:



Considere um sistema cartesiano com origem em A e com eixos retangulares em AC e AB, conforme ilustra a figura. Fazendo AB = 3c e AC = 3b, pelo teorema de Pitágoras segue que $b^2 + c^2 = 1$.
Além disso: B(0, 3c) e C(3b, 0)
Como M divide BC na razão 1:2 tem-se que:

$$M = \frac{B + 2C}{3} \Rightarrow M(b, 2c)$$

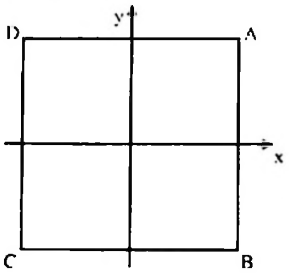
Como N divide BC na razão 2:1 tem-se que:

$$N = \frac{2B + C}{3} \Rightarrow N(2b, c)$$

Deste modo: $x^2 + y^2 = AM^2 + AN^2 = b^2 + 4c^2 + 4b^2 + c^2 = 5(b^2 + c^2) = 5$
Assim, a relação entre x e y é $x^2 + y^2 = 5$.

2) Considere um quadrado ABCD de modo que P é um ponto em seu interior. Se PA = a, PB = b e PC = c e PD = d, demonstre que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Solução:



Suponha um sistema de eixos ortogonais com origem no centro do quadrado de lado 2L, eixo x paralelo a DA e eixo y paralelo a AB, conforme a figura ao lado. Assim, as coordenadas dos vértices do quadrado são: A(L, L), B(L, – L), C(– L, – L) e D(– L, L).
Deste modo, sendo P(x, y) um ponto qualquer do plano:

$$PA^2 + PC^2 = (x - L)^2 + (y - L)^2 + (x + L)^2 + (y + L)^2 = 2(x^2 + y^2) + 4L^2$$
$$PB^2 + PD^2 = (x - L)^2 + (y + L)^2 + (x + L)^2 + (y - L)^2 = 2(x^2 + y^2) + 4L^2$$

Assim, segue diretamente que $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

Obs: Perceba que não é necessário que o ponto P seja interior ao quadrado.

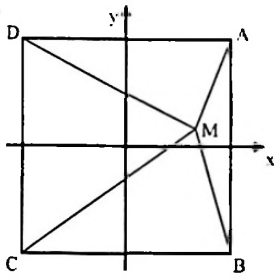
9.5. RETAS PERPENDICULARES

As soluções por geometria plana sobre retas perpendiculares acabam por gerar contas longas envolvendo cálculo sobre ângulo. Pelo fato do produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares ser igual a – 1, em determinadas circunstâncias a aplicação de geometria analítica pode gerar uma solução mais simples.

Exemplos:

1) (Torneio Internacional das Cidades-83) No interior de um quadrado ABCD considere um ponto M. Prove que os baricentros dos triângulos ABM, BCM, CDM e DAM formam um quadrado.

Solução:



Suponha um sistema de eixos ortogonais com origem no centro do quadrado de lado 6L, eixo x paralelo a DA e eixo y paralelo a AB, conforme a figura ao lado. Assim, as coordenadas dos vértices do quadrado são: A(3L, 3L), B(3L, – 3L), C(– 3L, – 3L) e D(– 3L, 3L).

Seja M(3a, 3b). Sejam G_1, G_2, G_3 e G_4 os baricentros dos triângulos ABM, BCM, CDM e DAM. Deste modo, tem-se que:

$G_1(2L + a, b)$, $G_2(a, – 2L + b)$, $G_3(– 2L + a, b)$ e $G_4(a, 2L – b)$

Portanto, as inclinações dos lados do quadrilátero $G_1G_2G_3G_4$ são:

$$m_{G_1G_2} = \frac{b-(-2L+b)}{2L+a-a} = 1 \; ; \quad m_{G_2G_3} = \frac{b-(-2L+b)}{-2L+a-a} = -1$$

$$m_{G_3G_4} = \frac{2L+b-b}{a-(-2L+a)} = 1 \; ; \quad m_{G_4G_1} = \frac{2L+b-b}{a-(2L+a)} = -1$$

Assim, os ângulos internos de $G_1G_2G_3G_4$ são iguais a 90°, que justifica que este quadrilátero é u retângulo. Para mostrar que este retângulo é um quadrado basta demonstrar que dois lados consecutivos são congruentes.

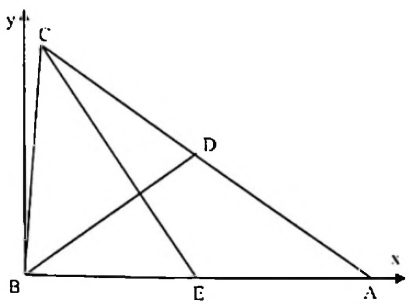
$$\overline{G_1G_2} = \sqrt{(2L+a-a)^2 + ([b-(-2L+b)]^2} = \sqrt{4L^2+4L^2} = 2\sqrt{2}L$$

$$\overline{G_2G_3} = \sqrt{[a-(-2L+a)^2 + (-2L+b-b)^2} = \sqrt{4L^2+4L^2} = 2\sqrt{2}L$$

Desta forma, provou-se que dois lados consecutivos do retângulo são congruentes, implicando que, na verdade, o quadrilátero $G_1G_2G_3G_4$ é um quadrado.

2) (Olimpíada da Irlanda-2001) Seja ABC um triângulo de lados BC, CA, AB cujas medidas são respectivamente iguais a a, b, c. Se D e E são os pontos médios de AC e AB respectivamente, mostre que a mediana BD é perpendicular a CE se, e somente se, $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Solução:



Suponha um sistema cartesiano tal que B(0, 0), A(c, 0) e C(m, n), onde $m^2 + n^2 = a^2$.

Assim, $E\left(\frac{c}{2}, 0\right)$ e $D\left(\frac{c+m}{2}, \frac{n}{2}\right)$

Logo: $m_{BD} = \frac{n}{c+m}$ e $m_{CE} = \frac{2n}{2m-c}$

$$BD \perp CE \Leftrightarrow m_{BD}.m_{CE} = -1 \Leftrightarrow \frac{n}{c+m}\frac{2n}{2m-c} = -1 \Leftrightarrow$$

$$2n^2 = -2m^2 + c^2 - mc \Leftrightarrow 2a^2 = c^2 - mc \Leftrightarrow$$

$$4a^2 = 2c^2 - 2mc \Leftrightarrow 4a^2 = (c^2 - 2mc + m^2) + c^2 - m^2 \Leftrightarrow$$

$$4a^2 + m^2 + n^2 = [(m-c)^2 - n^2] + c^2 \Leftrightarrow 4a^2 + a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$$

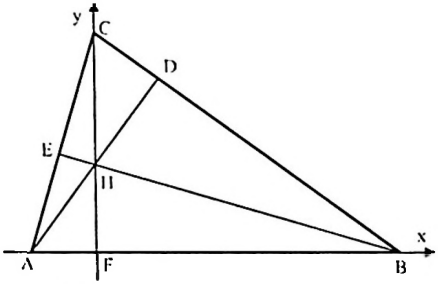
$$5a^2 = b^2 + c^2$$

9.6. RETAS CONCORRENTES

Mais uma situação em que a geometria analítica pode ser aplicada. Na demonstração que três retas são concorrentes, pode-se encontrar a equação de cada reta e determinar a interseção de duas destas retas, bastando demonstrar que este ponto pertence à terceira reta.

Exemplos:

1) Demonstre que as 3 alturas de um triângulo são concorrentes.
Solução:



Considere um sistema de eixos cartesianos com origem em F, pé da altura de C, com eixo x sobre a reta AB e eixo y sobre a reta CF. Supondo que AF = a, BF = b e CF = c tem-se A(– a, 0), B(b, 0) e C(0, c).

$m_{BC} = -\frac{c}{b} \Rightarrow m_{AD} = \frac{b}{c}$

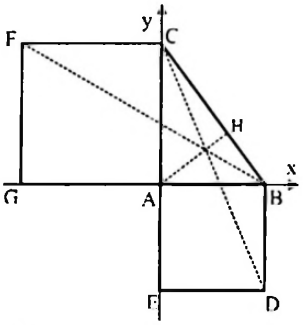
Reta AD: $y - y_A = m_{AD}(x - x_A) \Rightarrow y = \frac{b}{c}(x + a)$

Fazendo x = 0 tem-se que $y_H = \frac{ab}{c}$

$m_{AC} = \frac{c}{a} \Rightarrow m_{AC} = -\frac{a}{c} \Rightarrow$ reta BE: $y - y_B = m_{AC}(x - x_B) \Rightarrow y = -\frac{a}{c}(x - b)$

Fazendo x = 0 tem-se que $y_{H'} = \frac{ab}{c} \Rightarrow H = H' \Rightarrow$ as 3 alturas de ΔABC são concorrentes.

2) (IME-87/88) Sobre os catetos AB e AC de um triângulo ABC, constroem-se dois quadrados ABDE e ACFG. Mostre que os segmentos CD, BF e altura AH são concorrentes.
Solução:



Será adotado um sistema cartesiano com centro em A e eixos sobre as retas AB e AC. Fazendo AB = c e AC = b tem-se:
A(0, 0), B(c, 0), C(0, b), D(c, – c), E(– c, b) e G(– b, 0)

reta AH: $y = \frac{-1}{m_{BC}}x \Rightarrow y = \frac{c}{b}x$

reta BF: $y - y_B = m_{BF}(x - x_B) \Rightarrow y = -\frac{b}{b+c}(x - c)$

reta CD: $y - y_C = m_{CD}(x - x_C) \Rightarrow y - b = -\frac{b+c}{c}x$

Interseção de AH e CD: $\frac{c}{b}x = b - \frac{b+c}{c}x \Rightarrow x\left(\frac{c}{b} + \frac{b+c}{c}\right) = b \Rightarrow$

$x\left(\frac{b^2 + bc + b^2}{bc}\right) = b \Rightarrow x = \frac{b^2c}{b^2 + bc + c^2} \Rightarrow y = \frac{c}{b}\frac{b^2c}{b^2 + bc + c^2} = \frac{bc^2}{b^2 + bc + c^2}$

Substituindo $x = \frac{b^2c}{b^2 + bc + c^2}$ na equação da reta BF:

$$y = -\frac{b}{b+c}\left(\frac{b^2c}{b^2 + bc + c^2} - c\right) = -\frac{b}{b+c}\left(\frac{\cancel{b^2c} - \cancel{b^2c} - bc^2 - c^3}{b^2 + bc + c^2}\right) = \frac{b}{\cancel{b+c}}\frac{c^2\cancel{(b+c)}}{b^2 + bc + c^2} = \frac{bc^2}{b^2 + bc + c^2}$$

Deste modo, a reta BH passa pelo ponto de interseção das retas AH e CD, implicando que estas 3 retas são concorrentes.

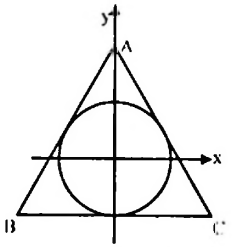
9.7. CIRCUNFERÊNCIA

Adotando o centro da circunferência como centro do sistema cartesiano tem-se a equação da circunferência de centro R como sendo $x^2 + y^2 = R^2$, uma expressão simples de ser trabalhada e que pode ser aplicada na solução de problemas de geometria plana.

Exemplos:

1) (UFPE-2000) Seja P um ponto na circunferência inscrita num triângulo equilátero ABC de lado 4. Indique $PA^2 + PB^2 + PC^2$.

Solução:



Considere um sistema cartesiano com origem no centro da circunferência inscrita de ΔABC. Supondo que o raio da circunferência vale r, tem-se que para qualquer ponto P(x, y) da circunferência tem-se $x^2 + y^2 = r^2$.

Seja L o lado de ΔABC. Como ΔABC é equilátero seu baricentro coincide com o incentro: $r = \frac{1}{3}\frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow L = 2\sqrt{3}r$ (1)

Assim, as coordenadas dos vértices de ΔABC são:

$A(0, 2r)$, $B(\sqrt{3}r, -r)$ e $C(-\sqrt{3}r, -r)$

Portanto: $PA^2 + PB^2 + PC^2 = (x-0)^2 + (y-2r)^2 + (x-\sqrt{3}r)^2 + (y+r)^2 + (x+\sqrt{3}r)^2 + (y+r)^2 =$

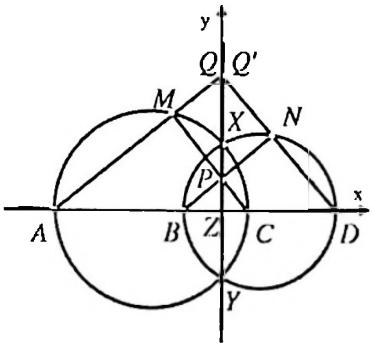
$= x^2 + y^2 \cancel{-4ry} + 4r^2 + x^2 \cancel{-2\sqrt{3}r} + 3r^2 + y^2 + \cancel{2ry} + r^2 + x^2 \cancel{+2\sqrt{3}r} + 3r^2 + y^2 + \cancel{2ry} + r^2 =$

$= 3(x^2 + y^2) + 12r^2 = 3r^2 + 12r^2 = 15r^2$

Desde que L = 4 de (1) segue que $r = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow r^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow 15r^2 = 20 \Rightarrow PA^2 + PB^2 + PC^2 = 20$

2) (IMO-95) Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos em uma reta, nesta ordem. Os círculos com diâmetros AC e BD se interceptam nos pontos X e Y. A reta XY encontra BX no ponto Z. Seja P um ponto na reta XY diferente de Z. A reta CP intercepta o círculo com diâmetro AC nos pontos C e M e a reta BP intercepta o círculo com diâmetro BD nos pontos B e N. Prove que as retas AM, DN e XY são concorrentes.

Solução:



Considere um sistema de eixos coordenados com origem em Z e eixo x sobre AD e eixo y sobre XY.

Suponha que a circunferência da esquerda possua raio r_1 e centro em $(x_1, 0)$ e que a circunferência da direita possua raio r_2 e centro em $(x_2, 0)$.

Deste modo segue que $A(x_1 - r_1, 0)$ e $C(x_1 + r_1, 0)$.

Como P pertence ao eixo y pode-se fazer $P(0, y_0)$.

Como AM $\perp$ CP e $m_{CP} = -\frac{y_0}{x_1 + r_1}$, a reta AM é dada por:

$$y - 0 = \frac{x_1 + r_1}{y_0}[x - (x_1 - r_1)] \Rightarrow (x_1 + r_1)x - y_0 y = x_1^2 - r_1^2$$

Se Q é a interseção de AM com XY segue que $y_Q = \frac{r_1^2 - x_1^2}{y_0}$.

Analogamente, se Q' é a interseção de DN com XY tem-se $y_{Q'} = \frac{r_2^2 - x_2^2}{y_0}$.

Pelo teorema de Pitágoras tem-se $ZX^2 = r_1^2 - x_1^2 = r_2^2 - x_2^2 \Rightarrow Q = Q'$.

Seções Cônicas

9.8. BREVE HISTÓRICO

O estudo das seções cônicas teve fundamental contribuição de Apolônio, que em sua obra "As Cônicas", escrito em 8 volumes, fez mais de 400 proposições, solidificando as bases desta área da matemática. Outros autores, entre eles Euclides, já haviam publicado obras o estudo das seções cônicas, porém foi Apolônio que aprofundou os estudos sobre este assunto. Antes de Apolônio acreditava-se que as seções cônicas eram obtidas pela interseção de planos perpendiculares à geratriz de diferentes cones circulares retos. Apolônio mostrou que não é necessário que o plano seja perpendicular à geratriz do cone e que pode-se obter todas as cônicas em um mesmo cone. Apolônio também demonstrou que não é necessário que o cone seja circular reto, sendo possível obter seções cônicas em cones obliquos.

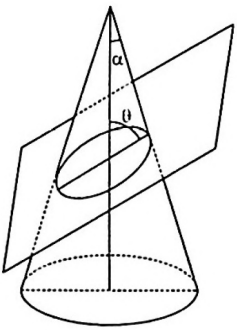
9.9. DETERMINAÇÃO DAS SEÇÕES CÔNICAS

9.9.1. Teorema de Apolônio: A seção feita num cone por um plano qualquer é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, segundo o plano secante faz com o eixo do cone um ângulo superior, igual ou inferior ao semi-ângulo no vértice do cone.

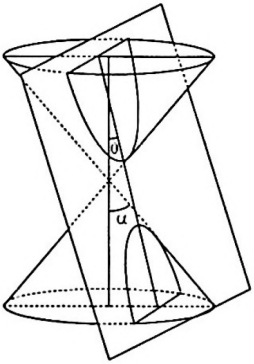
9.9.2. Teorema de Dandelin: A seção de um cone circular, por um plano tangente a uma esfera inscrita nesse cone, é uma cônica que tem foco no ponto de contato e para diretriz correspondente a interseção o plano secante com o plano da circunferência de contato da esfera e do cone.

Seja um cone cujo eixo forma um ângulo θ com as geratrizes. Suponha que um plano corta este cone fazendo um ângulo α com o eixo do cone.

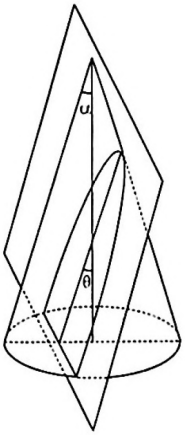
(1) Se $\alpha < \theta$ o plano β cortará apenas uma das folhas da superfície cônica, formando uma curva fechada, denominada elipse.
(2) Se $\alpha > \theta$ o plano β cortará duas folhas da superfície cônica, formando uma curva aberta denominada hipérbole.
(3) Se $\alpha = \theta$ o plano β cortará apenas uma das folhas do cônica sobre uma curva aberta chamada de parábola. Neste caso o plano β é paralelo a uma geratriz do cone.



(1) Elipse: $\alpha < \theta$

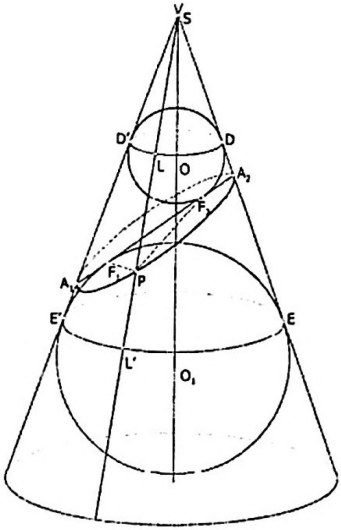


(2) Hipérbole: $\alpha > \theta$



(3) Parábola: $\alpha = \theta$

9.10. ELIPSE



Suponha que um plano β corta um cone segundo um ângulo $\alpha > \theta$, conforme indicado no item anterior. Assim, o plano forma com o eixo do cone um ângulo maior que o semi-ângulo do vértice do cone. O plano secante e o plano da figura se cortam segundo a reta A_1A_2. Ainda no plano da figura, tome as circunferências inscrita e ex-inscrita no triângulo A_1SA_2. Estas circunferências tangenciam A_1A_2 nos pontos F_1 e F_2. Rotacionando estas circunferências em torno de seus centros obtém-se esferas que tangenciam o cone e o plano β nos pontos F_1 e F_2, conforme a figura ao lado. A esfera gerada pela rotação do incírculo de ΔA_1SA_2 tangencia o cone segunda a circunferência de diâmetro DD'. A esfera gerada pela rotação do excírculo de ΔA_1SA_2 é tangente ao cone segundo a circunferência de diâmetro EE'.

Tomando um ponto P qualquer da seção, são traçados os segmentos PF_1 e PF_2. Considere que a geratriz que passa por P corta a circunferência DD' em L e a circunferência EE' em L'. Deste modo, depreende-se que $PF_1 = PL'$ e $PF_2 = PL$.

Assim: $DE = LL' = PL' + PL = PF_1 + PF_2$ (1)

Devido às tangencias segue que: $DA_2 = F_2A_2$, $E'A_1 = F_1A_1$, $D'A_1 = F_2A_1$, $EA_2 = F_1A_2$

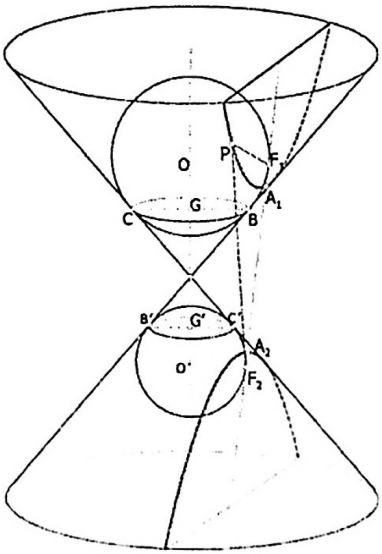
Sendo 2p o perímetro de ΔA_1SA_2 sabe-se que $F_2A_2 = p - VA_1 = F_1A_1$

Assim: $DE = DA_2 + EA_2 = F_2A_2 + F_1A_2 = F_1A_1 + F_1A_2 = A_1A_2$ (2)

De (1) e (2) conclui-se que $PF_1 + PF_2 = A_1A_2$ (3)

A expressão (3) é a lei que caracteriza uma elipse. Desta forma, fica demonstrado que a seção gerada pelo corte de um plano em um cone, quando o plano forma com o eixo do cone um ângulo maior que o semi-ângulo do vértice do cone, é uma elipse.

9.11. HIPÉRBOLE



Na figura, o plano β forma com o eixo do cone um ângulo menor que o semi-ângulo do vértice do cone, cortando as duas folhas do cone. Tome um ponto P sobre a curva que é resultado do corte do plano com o cone.

Observando-se a figura conclui-se que:

$PF_2 - PF_1 = PG' - PG = GG' = BB'$

Como $A_1B = A_1F_1$ e $A_1B' = A_1F_2$ tem-se:

$BB' = A_1B' - A_1B = A_1F_2 - A_1F_1$

Desde que $A_2C = A_2F_1$ e $A_2C' = A_2F_2$ então:

$BB' = CC' = A_2C - A_2C' = A_2F_1 - A_2F_2$

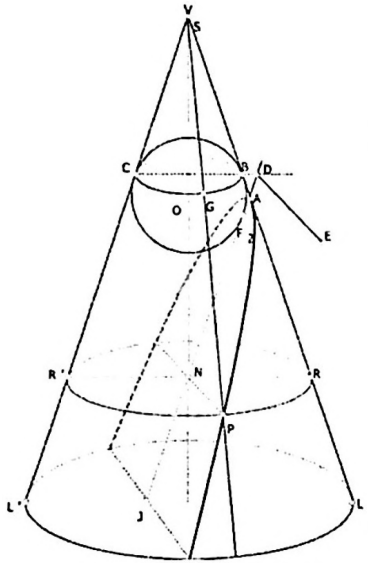
Assim: $BB' = CC' = A_1F_2 - A_1F_1 = A_2F_1 - A_2F_2$

O plano da figura determina nas esferas duas circunferências que são excírculos de ΔVA_1A_2. Sendo 2p o perímetro de ΔVA_1A_2 sabe-se que $A_1F_1 = A_2F_2 = p - A_1A_2$

Logo $A_2F_1 - A_1F_2 = A_1F_2 - A_2F_2 = BB' = A_1A_2$

Portanto: $PF_2 - PF_1 = A_1A_2$, que é a lei de formação de uma hipérbole. Desta forma, a seção formada pela interseção de um plano que forma com o eixo do cone um ângulo menor que o semi-ângulo do vértice do cone é uma hipérbole.

9.12. PARÁBOLA



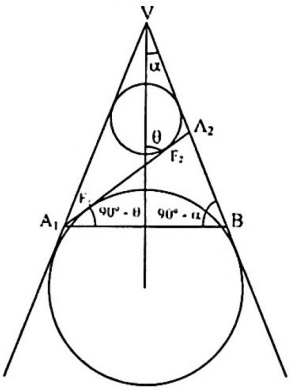
Agora corte um cone segundo um plano β de modo que seja β seja paralelo à geratriz VL' do cone. Assim, o ângulo que o plano faz com o eixo do cone é igual ao semiângulo de abertura do cone em V. Considere a circunferência tangente à retas VL', VA e AJ. Rotacionando esta circunferência sobre seu centro obtém-se a esfera que tangencia a superfície do cone e o plano β. Seja F_2 o ponto onde esta esfera tangencia o plano β. Tome um ponto P sobre a seção determinada pelo plano β no cone. A geratriz PV tangencia a esfera no ponto G, que pertence à circunferência de diâmetro BC, gerada pelos pontos de contato da esfera com a superfície do cone. Por P traça-se um plano perpendicular ao eixo do cone que o secciona segundo uma circunferência de centro N e diâmetro RR'. Seja A o vértice da seção. Por simetria os pontos A, F_2 e N estão alinhados. Como PF_2 e PG são duas tangentes tiradas a uma mesma esfera, segue que $PF_2 = PG$. Observando a superfície do cone, tem-se por simetria que PG = BR.

Seja π um plano definido pelo circunferência de diâmetro BC. A interseção de π e β determina uma reta DE, perpendicular ao plano LVL'. Por simetria tem-se que ND é igual à distância de P à reta DE.

Como ΔANR e ΔABD são isósceles e ambos são semelhantes a ΔVLL', conclui-se que ND = BR, implicando que $PF_2 = ND$. Assim, segue que $PF_2 = d\left(P, \overline{DE}\right)$, que é a relação que caracteriza a parábola, possuindo DE como reta diretriz e F_2 como foco.

9.13. TEOREMA: Um cone reto é seccionado por um plano β de modo que a seção definida é uma elipse. O semiângulo de abertura do cone é igual a α e o ângulo que o plano β forma com o eixo do cone é igual a θ. A excentricidade e da elipse satisfaz $e = \dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha}$.

Demonstração:



A figura ao lado é uma seção transversal do corte do plano β no cone. Na demonstração do teorema de Apolônio para o caso da elipse conclui-se que $A_1A_2 = 2a$, eixo maior da elipse, e $F_1F_2 = 2c$, distância focal da elipse. Na figura tem-se duas circunferências, uma inscrita e outra ex-inscrita no triângulo ΔVA_1A_2. Se α é o ângulo que a geratriz com cone faz com o eixo e θ é o ângulo que o plano β faz com o eixo do cone, segue que $\angle A_2A_1B = 90° - \theta$ e $\angle VBA_1 = 90° - \alpha$.

Se 2p é o perímetro de ΔVA_1A_2, sabe-se que:

$$F_2A_2 = F_1A_1 = p - A_1V$$

Assim, lembrando que $VA_1 = VB$

$$2c = F_1F_2 = A_1A_2 - F_1A_1 - F_2A_2 = A_1A_2 - 2p + 2A_1V =$$
$$= A_1A_2 - A_1A_2 - A_1V - A_2V + 2A_1V = A_1V - A_2V = BV - A_2V = BA_2$$

Lei dos senos em ΔBA_1A_2:

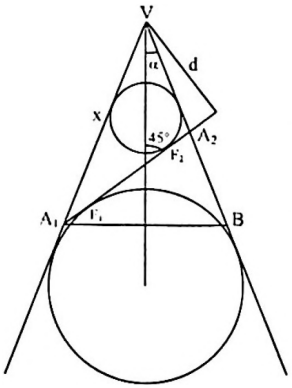
$$\frac{A_1A_2}{\operatorname{sen}(90°-\alpha)} = \frac{BA_2}{\operatorname{sen}(90°-\theta)} \Rightarrow \frac{2a}{\cos\alpha} = \frac{2c}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$$

Sabe-se que a razão $\dfrac{c}{a}$ é igual à excentricidade e da elipse. Logo $e = \dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha}$.

Exemplos:

1) (IME-83) É dada uma elipse de eixo focal 2a e excentricidade igual a $\sqrt{2}/3$. Essa elipse é seção de um cone de revolução: o ângulo que o plano da elipse forma com o eixo do cone é $\beta = 45°$. Pede-se, em função de a, a distância do vértice V do cone ao plano da elipse.

Solução:



Sabe-se que $e = \dfrac{\cos 45°}{\cos\alpha} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2.\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\alpha = 30° \Rightarrow \angle A_1VA_2 = 60°$

Assim, tem-se que $\angle VA_1A_2 = 15°$ e $\angle VA_2A_1 = 75°$

Lei dos senos em ΔVA_1A_2:

$$\frac{x}{\text{sen}75°} = \frac{2a}{\text{sen}60°} \Rightarrow x = \frac{2a.\text{sen}75°}{\text{sen}60°}$$

Logo:

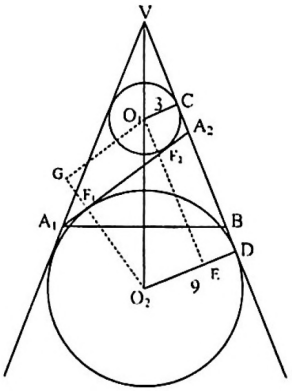
$$d = x.\text{sen}15° = \frac{2a.\text{sen}15°.\text{sen}75°}{\text{sen}60°} = \frac{a\,(2.\text{sen}15°.\cos 15°)}{\text{sen}60°} = \frac{a.\text{sen}30°}{\cos 60°} =$$

$$= \frac{a.\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

2) (IME-80) São dadas duas esferas (e_1) de centro O_1 e raio 3, e (e_2) de centro O_2 e raio 9. O_1 dista de O_2 de 20. Essas esferas são focais de uma seção elíptica (E) de um cone de revolução. Determine a excentricidade e a distância focal de (E).

Obs: Esferas focais de uma seção esferas inscritas num cone que tangenciam o plano seção.

Solução:



A partir de O_1 trace uma paralela a VA_2, que encontra O_2D em E.

Assim, tem-se $O_2E = R_2 - R_1 = 9 - 3 = 6$

Pelo teorema de Pitágoras em ΔO_1O_2E:

$(O_1O_2)^2 = (O_2E)^2 + CD^2 \Rightarrow 400 = 36 + CD^2 \Rightarrow CD = \sqrt{91}$

Como estão traçadas na figura o incírculo e um dos ex-círculos de ΔVA_1A_2, se 2p é o perímetro de ΔVA_1A_2 sabe-se que:

i) $VD = p$;

ii) $CA_2 = A_2F_2 = A_1F_1 = p - VA_1 = VD - VB = BD$.

Assim, lembrando que $VA_1 = VB$

$2c = F_1F_2 = A_1A_2 - F_1A_1 - F_2A_2 = A_1A_2 - 2p + 2A_1V =$

$= A_1A_2 - A_1A_2 - A_1V - A_2V + 2A_1V = A_1V - A_2V = BV - A_2V = BA_2$

Logo: $2a = A_1A_2 = F_1F_2 + A_1F_1 + A_2F_2 = A_2B + CA_2 + BD = CD = \sqrt{91}$

A partir de O_1 trace uma paralela a F_1F_2, que encontra O_2F_1 em G.

Assim, segue que $O_2G = R_2 + R_1 = 9 + 3 = 12$.

Pelo teorema de Pitágoras em ΔO_1O_2G: $(O_1O_2)^2 = (O_2G)^2 + (O_1G)^2 \Rightarrow 400 = 144 + (O_1G)^2 \Rightarrow$

$O_1G = 16 \Rightarrow F_1F_2 = 16 \Rightarrow$ distância focal = 16

Se e é a excentricidade da elipse: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2c}{2a} = \dfrac{16}{\sqrt{91}} = \dfrac{16\sqrt{91}}{91}$

Gabaritos

Capítulo 1: Números Complexos

Questões de Vestibulares

1) a
2) a) i; b) $5 - 4i$
3) $-\sqrt{3}/2 + i/2$, $-\sqrt{3}/2 - i/2$, $-i$, $\sqrt{3}/2 - i/2$, $\sqrt{3}/2 + i/2$
4) b
5) d
6) 150°
7) $1 - 2i$
8) 22
9) $z_1 = 6 + 8i$ $z_2 = 6 + 17i$
10) 2
11) a) $-1, -i, 1, i, \ldots, 1$; b) não; c) 0
12) b
13) 76
14) $a = 1$ e $b = 1$ ou $a = -7/5$ e $b = -1/5$
15) b
17) a
18) d
19) e
20) $-3/2$
21) a
22) $-(1 - 4i)/9$
23) 2/5
24) (cis 0, cis q0, cis $q^2$0, cis $q^3$0), com $0 = \pi(\sqrt{3} - 1)/2$ e $q = \sqrt{3}$
25) $-1 + 4i$ e $-1 - 4i$
26) a
27) FFVFF
28) FFVFV
29) b
30) c
31) 2
32) $-1 + \sqrt{3}.i$, $-\sqrt{3} - i$ e $1 - \sqrt{3}.i$
33) 20
34) d
35) e
36) b
37) b
38) 0
39) d
40) c
41) d
42) a
43) a
44) c
45) a
46) VFVFV
47) FFVFV
48) $3\sqrt{3}/4$
49) 0, 1, -1, i e $-i$
50) -1
51) c
52) e
53) b
54) -1
55) e
56) 2
57) $\sqrt{2}.\text{cis}(5\pi/4)$
58) d
59) $3\sqrt{3}$
60) -2 e $1 - \sqrt{3}i$
61) d
62) VFVFF
63) a
64) c
65) 0
66) d
67) a
68) c
69) c
70) d
71) c
72) d
73) a
74) a
75) b
76) b
77) d
78) b
80) e
81) $2 + 3i$ e $2 - 3i$
82) c
83) c
84) a
85) -16
87) a) $z_2 = -\sqrt{3} + i$, $z_3 = -2i$; b) lado $= 2\sqrt{3}$
88) a) circunferência $x^2 + (y + 2)^2 = 8$; b) $y = x + 2$
89) a) i) circunferência $x^2 + y^2 = 4$, ii) retas $x = 2$ e $x = -2$; b) (2, 0) e (– 2, 0)
91) b
92) a
93) b
94) e
95) b
96) c
97) a
98) a
99) b
100) b
101) b
102) b
103) a
104) d
105) b
106) d
107) d
108) a
109) c
110) c
111) b
112) a
113) a
114) b
115) d
116) b
117) a
118) e
119) c
120) c
121) 1/5
122) d
123) pontos exteriores a uma elipse de focos em 1 e -1 e eixo maior 3
124) b
125) a
126) $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$
127) $\sqrt{3}$
128) max = 6 e min = 4
129) n
130) $-\pi/2$
131) circunferência de centro em (3, 4) e raio $\sqrt{2}$
132) circunferência $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$
133) raízes de ordem $n + 1$ da unidade
134) 0
135) $\sqrt{3} - i$, $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-\sqrt{3} + i$, 2 e -2
136) $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} - i$, $-1 + \sqrt{3}i$ e $1 - \sqrt{3}i$
137) 3i
138) $1 - 4i$ ou $-1 + 4i$
139) 3
140) reta $y = 0$ ou circunferência $(x + 2)^2 + y^2 = 2$
141) não existe r que satisfaz o problema
142) 0
143) elipse $(x - 2)^2/4 + (y - 3)^2/9 = 1$
144) $2 - i$ ou $-2 + i$
145) 1, -1, i e $-i$
146) elipse $(x - 2)^2/4 + (y - 3)^2/9 = 1$
147) $15\sqrt{3}/2 + 45i/2$
148) para $C \neq 1$: circunferência $x^2 + y^2 - 2x[(C^2 + 1)/(C^2 - 1)] + 1 = 0$ e para $C = 1$: reta $x = 0$

152) 1 154) $e^{-4}.cis(\pi/3)$ 155) $(4 - 3i)/5$ e $(-4 + 3i)/5$

156) a) $a = -j^2c - jb$; b) $z = -ij/(i + j)^2$ 157) $1 + i$ e $-1 - 3i$ 158) $(n - 1)/2$ 159) $3\sqrt{2}$

Respostas dos Exercícios

1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})i$ 2) real 3) real

4) círculo com centro em (1, 1) e raio igual a 1. 5) $12 + 16i$

9) $\text{sen } 3\theta = 3\cos^2\theta.\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta$, $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta.\text{sen}^2\theta$

10) $|z| = 1$ ou $y = 0$ 11) 3: (0, 2, – 2) 12) quadrado 13) – 1

14) $e^{\pi/2}$ 15) $(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1 - \theta_2))^{1/2}$ 16) reta $y = -x$ 17) $z = 3 + 2i$

20) $-1 + i$ 22) $z_1 = 6 + 8i$ $z_2 = 6 + 17i$ 23) $(1+i)\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

24) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 25) $2i^{n-1}$

29) $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i.\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ 33) 27

35) reta $2x - 3y + 7 = 0$ 36) circunferência com centro em (1/2, 1/2) e raio $\sqrt{2}/2$

44) $\{1, i, -1, -i, 2, 2i, -2, -2i\}$

Capítulo 2: Polinômios

Respostas das Questões de Vestibulares

01) e	02) a	03) a	04) c	05) FFV
07) – 6	08) e	09) a	10) $a = d^2$, $b = 2de$, $c = e^2$	
11) 6	12) a	13) d	14) 4	15) d
16) $13x - 7$	17) a	18) VVFF	19) d	20) b
21) a	22) d	23) 2 e 3	24) a	
25) $a = 39$, $b = -45$	26) FFVFV	27) VFVVV	28) FFVV	
29) $(x-2)^2(x-1)(x+1)$		30) $a = 0$, $b = -4$	31) 14	32) d
33) 3 e – 2	34) a	35) d	36) 1/3, 1, $3 + 2i$, $3 - 2i$	
37) e	38) d	39) d	40) c	41) d
42) VVFVV	43) VVFFF	44) $a = 0 - 1$, $b = 3$, raiz = 3		45) a
46) a	47) 17	48) 60	49) n tem que ser par	
50) 2 e 3	51) i) se n é igual a 1, qualquer valor de a é raiz, ii) se $n > 1$, somente $a = 0$ é raiz			
52) 8	53) c	54) b	55) a	56) a
57) a	58) c	59) d	60) d	61) d
62) b	63) d	64) b	65) d	66) e
67) c	68) a	69) c	70) c	
71) a) $\partial[p(x)] = 1$; b) $p(x) = x$		72) e	73) a) $(n + 1)a_0$	74) a
75) a) $R(x) = -x + 3$; b) 5/2		76) b		
77) $q(x) = x^{98} + x^{96} + x^{94} + \ldots + x^2 + 1$ $r(x) = x + 2$			78) $r(x) = -2x^3 - 2x^2 + x + 5$	
79) $P(0) = 2$	80) p é par e q é ímpar		82) c	83) c
84) a	85) a	86) d	87) d	88) a
89) d	90) a	91) d	92) d	93) c
94) c	95) b	96) b	97) $R(x) = -4x/3 + 5/3$	

98) c 100) a 101) $R(x) = x^2 + x - 1$
102) $P(x) = x^3/6 - x^2/2$ 103) – 1 104) 51/16
105) $-(x + 2)/3$ e $-1/3$ 106) $m = -3$, $n = -5$
107) $p = -6$ e $q = 1$ 108) $P(x) = \frac{35}{16}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right]$
109) $P(x) = (x + 1)(x - 6)(x + 5)(x - 2) - 60$ 111) n par: x + 1; n ímpar: 0
112) a) $b = -2a$, $d = a - c$; b) $\frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$, $\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$ 113) 21

Respostas dos Exercícios

Nível 1
02) $ad = bc$ 03) 2m 05) $2x^2 + 3x + 4$ 05) $q(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
07) $r = -20$ 08) – 1/2 09) $x^2/8 + x + 3/2$
10) $r = 0$ $q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$
11) $r = 2a^n$ $q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$
12) $r = 0$ (se n par) ou $r = -2a^n$ (se n ímpar); $q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3a^{n-4} + \ldots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$
13) $r = 2a^n$ (se n par) ou $r = 0$ (se n ímpar)
$q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3a^{n-4} + \ldots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$
14) para todo n natural 15) $r(x) = 3x + 7$ 16) $A = 1$, $B = 2$ e $C = -3$
17) $q(x) = x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + 4x^{n-4} + \ldots + n$ 18) $q = 1$ e $p = \pm\sqrt{2}$
19) $c = 0$ 20) $a = -1$ e $b = -3$ 21) $m = q$ e $p = -q^2 - 1$
22) 1) $m = 0$ e $p = q + 1$; 2) $p = q - m^2 + 2$ 23) $a = -5$
24) $A = 3$ e $B = -4$ 25) $p(x) = x$
27) i) $a = 2$ e $b = 1$ ii) $a = -1$ e $b = -8$
28) $q(x) = 2x^n + 4x^{n-1} + 6x^{n-2} + 8x^{n-3} + \ldots + 2(n - 1)x^2 + 2nx + n$

Nível 2
02) $r(x) = x$ 03) $2^{n+1} - 1$ 04) $a = n/(n - 2)$ 05) $A = n$ e $B = -1 - n$
11) $P(x) = x^3/3 + x^2/2 + x/6 + d$, $d \in \Re$ 12) $p(7) = 727$ 13) $p(9) = 40410$
14) $p(n + 1) = n! + (n + 1)^{n-1}$ 15) 5
16) $P(x) = x^5 - (21/8)x^4 + x^3 + (11/4)x^2 - 3x - 1/8$
17) 2 19) a) $n = 6k - 1$; b) não existe n 20) $P(x) = 16(x/4)^n$ 22) 5x
23) i) n par: $P(n + 1) = n/(n + 2)$; ii) n ímpar: $P(n + 1) = 1$

24) n tem que ser múltiplo de 4; i) se n for múltiplo de 8 $\Rightarrow$ $r = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$; ii) se n não for múltiplo de 8 $\Rightarrow$ $r = -\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

26) $p(x) = k(x - 16)(x - 8)(x - 4)(x - 2)$ 32) $A(x - 3)^2$ 33) $x^3 - 1$

Capítulo 3: Equações Algébricas

Questões de Vestibular

01) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 2$ 02) c
03) a) $-2x^3 + 12x^2 - 26x + 20$; b) $k = 1$, $\{i, -i\}$
04) 0, 1 + 2i, 1 – 2i, $(-3 \pm \sqrt{5})/2$ 05) i, – i, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, – 1

06) a = – 1, b = – 7 07) FFVVV 08) – 4 09) d 11) a
12) 14 13) FFVVV 14) c 15) e 16) 2
17) b 18) a) $(-1-i\sqrt{3})/2$, b) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; c) $(-1\pm\sqrt{5})/2$
19) b) a = 3, b = – 4, raiz: – 1 – i; c) 1 (2), – 2 (1), – 1 + i (1), – 1 – i (1)
20) a 21) d 22) b 23) e 24) e
25) a) 1 e 2; b) $x^3 - 3x^2 + 2x$ e – 3 26) a 27) c 28) 1, 3, 5
29) a 30) d 31) VVFF 32) VFVFV 33) FVVVV
34) 52 35) b 36) e 37) FVVVF 38) FVFV
39) e 40) c 41) 64 42) a 43) c
44) c 45) a) 4; b) – 2, 1, 3 46) – 1/2 47) d 48) a
49) 2 50) e 51) a 52) b 53) e
54) a 55) FVVFV 56) b 57) a 58) d
59) VVVVV 60) VFVVF 61) a 62) e 63) a
64) b 65) 5 66) d 67) a) $\mu = -2\lambda$; b) – 1
68) a) 2; b) $1\pm\sqrt{3}$ 69) a) 7; b) 3/2, $1\pm\sqrt{2}$ 70) 20 71) VFFVF
72) c 73) c 74) a 75) c 76) b
77) b 78) d 79) a 80) b 81) b
82) {– 8, – 5, – 2} 83) a 84) a 85) a 86) a
87) a) x = {– 1, 1 , 3}; b) $a = -3$ e $b = -1$ 88) a) x = {– 2, $2+\sqrt{3}i$, $2-\sqrt{3}i$};
b) $14x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$; c) $x^3 + x^2 - 28x - 196 = 0$ 89) a
90) a) 2, 4 e 8; b) 56 91) d 92) b 93) c
94) a) n = – m – 2; b) m = – 1; c) m < – 1 95) e

96) $x = \{-1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

97) a) 20/13 + 30/13i; b) {1, 4, i, - i}

98) $x = \{1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

99) i) $m = 0$: $\{1, -1/2+\sqrt{3}i/2, -1/2-\sqrt{3}i/2\}$; ii) $m = -3$: $\{-2, -1/2+\sqrt{21}i/2, -1/2+\sqrt{21}i/2\}$
100) a) l = 6; b) x = {3, 1 + *i*, 1 – *i*} 101) a) $\{-1, 2, -1/2+\sqrt{11}i/2, -1/2-\sqrt{11}i/2\}$
102) d 104) e 105) b 106) b 107) e
108) d 109) a 110) e 111) d 112) d
113) b 114) b 115) a 116) c 117) c
118) Não há alternativa correta 119) d 120) b 121) b
122) a 123) c 124) b 125) b 126) b
127) e 128) e 129) $m = n/\beta^2 - \beta^4/n$ 130) 2 e 3
131) (cm – ap)/(an – bm) 132) k = 11 ou 8 ou – 117 133) $\pm\sqrt{D/B}$
134) 0 135) 3/2; 1 + i; 1 – i 136) $8c + a^3 = 4ab$
137) $\{(-3\pm\sqrt{11}i)/2, (-3\pm\sqrt{5})/2\}$ 138) $(ad - bc)^3$ 139) – 6/19 ou 6
140) (1/2, - 1/3, 1/6) 141) $8c + a^3 = 4ab$ 142) $s = -q$, $t = rp$, $u = -r^2$
143) (6, - 14, 15) e (2, - 15, 28) 144) – 1/20 ou – 1/5 145) 5 ou – 25/19
146) $\{(-1\pm i\sqrt{3})/2, (-3\pm\sqrt{5})/2\}$ 147) 5, – 3, 4 e – 4 148) 2, 1 e 4/3
149) p = 4: $\{-1, -1, 1\pm\sqrt{2}i\}$; p = – 4: $\{1, 1, -1\pm\sqrt{2}i\}$; p = 4i: $\{i, i, \pm\sqrt{2}-i\}$; p = – 4i: $\{-i, -i, \pm\sqrt{2}+i\}$
151) a) $-q = (p-q)^2$; b) $\{1, (-1\pm\sqrt{23}i)/2\}$ 152) q 154) a) 3t
155) a 156) c 157) a 158) a^2b

Exercícios

01) $a = 12/5$ $b = 3$ $c = 2$

02) $a = -\frac{A_1}{2A_0}$ $b = \frac{-A_1 - \sqrt{5A_1^2 - 16A_0A_2}}{4A_0}$ $c = \frac{-A_1 - \sqrt{5A_1^2 - 16A_0A_2}}{4A_0}$

05) 31/4 06) x = {1, 2, – 2, 3} 07) x = {2, – 3} 08) x = {2, 1/2, 1, – 3}

10) x = {2 – $\sqrt{3}$i, 2 + $\sqrt{3}$i, – 2 + i, – 2 – i} 11) x = {1, i, – i} 12) $\gamma = \alpha.\beta$ 13) x = {1, – 3}

14) x = {2, 3, 5} 15) x = {3/2, – 1}

16) p = 4, q = 3, x = {(–1 + $\sqrt{3}$i)/2, (–1 – $\sqrt{3}$i)/2, (–1 + $\sqrt{7}$i)/2, (–1 – $\sqrt{7}$i)/2}

19) x = {1, 4, 7} 20) x = {1, 2, 3, 6}

34) $x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$ $x_{2,3}^{(1)} = \frac{-x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{4q_1}{x_0}}}{2}$ $x_{2,3}^{(2)} = \frac{-x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{4q_2}{x_0}}}{2}$

35) $a = 1$ $b = 2$ $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}i$ 40) x = {1/6, 1/2, – 1/3} 45) – 35

49) $r = 9$ ou $r = 1/9$

50) $(x^2 - 4x + 1)(x^3 + 4x^2 + 15x + 56)$ ou $(x^2 - 52x + 1)(x^3 + 52x^2 + 2703x + 56)$

51) $p^2 = 3q$ e $r = p^3/27 - u^3$, com $p^3 \neq 27r$ 52) $a = 6241$ $b = -234$

54) $p = -1$ ou $p = 3$ 55) x = {3 – 3/2, – 3/2 – i/2, – 3/2 + i/2}

56) x = {–1 – $\sqrt{3}$, –1 + $\sqrt{3}$, 1 + $\sqrt{5}$i, 1 – $\sqrt{5}$i} 59) $k = -1/9$ ou $k = 1$ 63) – 7/8

64) – 28082 76) k = 86 78) a = 8 ou a = 120 79) 41

80) 2 83) (–1 ± $\sqrt{2}$)/2, (–1 ± $\sqrt{5}$)/2 84) 1

85) $x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$ 87) $(p \pm \sqrt{p^2 + 4s})/2$ 95) 18

98) 19840 101) $2^{n+1} - 1$ 102) 96

105) (99, 9), (80, 10), (90, 12), (88, 12) 107) 2011, – 2009, 2013, – 2011, 3 ou – 1

108) $p^2 = 2q + 2r + 1$

Capítulo 4: Transformadas Algébricas

01) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$ 02) $16x^4 + 48x^3 + 108x^2 + 216x + 405 = 0$

03) y = 2x 04) b 05) $4t^3 - 21t^2 - 27t + 54 = 0$

06) $27y^3 + 45y - 173 = 0$ 07) y = x – 3 08) a

09) $x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0$ 10) e 11) $x^3 - 5x^2 + 14x - 14$

12) c 13) a 14) $P(x) = 2(x-2)^3 - 2(x-2)^2 - 24(x-2) + 24$

15) – 0,05x + 1 17) a = – 1, b = 5 e c = 2 ou a = 1, b = – 5 ou c = – 2 18) c

19) a 20) b 21) c 22) $\left\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

23) a 24) e 25) e 26) b 27) b

28) c 29) d 30) {– 1, 3, 1/3, 2, 1/2}

31) $35x^4 - 68x^3 - 1230x^2 - 68x + 35$ 32) 98 33) c

34) {1, – 1, – 2, – 1/2, 3, – 1/3} 35) b) $\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$

36) a 37) $\left\{2, \frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}\right\}$ 38) a = – 1/2, b = 3 e c = – 1; $\left\{1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

40) – 1/3 41) 7 43) $(x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 4x + 1)(x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 4x + 1)$.

44) 4/5

Capítulo 5: Ponto e Reta

01) d 02) c 03) d 04) a 05) d
06) b 07) a 08) b 09) c 10) c
11) a 12) (3, 1), (– 1, – 3) e (3, 7) 14) c 15) e
16) e 17) e 18) VVVVV 19) d
20) a) $2y - x = 3$; b) 4,05 21) a 22) c 23) d
24) d 25) a 26) c 27) b 28) c
29) a 30) CECE 31) b 32) c 33) d
34) $x + 2y = 8$ 35) c 36) FVVVV 37) d 38) c
39) b 40) c 41) d 42) a 43) a
44) e 45) c 46) c 47) b 48) e
49) a 50) c 51) d 52) b 53) c
54) b 55) a 56) FVVFV 57) a 58) d
59) a 60) c 61) c 62) a 63) a
64) c 65) a 66) FVFVF 67) FFFVV 68) e
69) a 70) c 71) 24 72) $\frac{4-\sqrt{7}}{9}$ 73) VVFVV
74) FVVFV 75) a 76) d 77) b 78) e
79) a 80) d 81) ECCC 82) c 83) a
84) a 85) c 86) d
87) a) $-17u^2/54 + 64u/27 + 32/27$; b) 64/17. 88) b 89) $\sqrt{2}/2$
90) a = 1 e b = 3 91) a) $-1 < m < 1$; b) m = 0
92) a) Duas retas; b) $y = 2x + 1$ e $y = -x/2 + 6$ 93) a 94) d
95) a 96) d 97) a 98) b 99) c
100) a 101) b 102) b 103) d 104) b
105) $4x - 5y - 20 = 0$ 107) d 108) d 109) b
110) a 111) c 112) d 113) d
114) (– 5/6, – 5/6) e (5, – 13,2) 115) e 116) $-2\sqrt{2} - 8$ 117) (15, – 8)
118) 25/13 119) e 120) (2, 3) 124) (– 1, 4)
125) $x - 7y - 3 = 0$ 126) (1/2, 13/4) 127) $x - y - 4 = 0$
128) $2ax - 2by + [b^2(1 + m) - a^2(1 - m)] = 0$ 129) $3x + 4y - 12 = 0$
130) $\frac{\sqrt{130}}{2}$

Capítulo 6: Circunferência

01) b 02) d 03) a 04) b 05) c
06) c 07) e 08) c 09) c 10) d
11) c 12) d 13) b 14) d 15) c
16) a 17) (5, 5) 18) e 19) VVVVF 20) VFFVF
21) b 22) 12 23) e 24) b 25) b
26) e 27) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ 28) $2y + x + 1 = 0$
29) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$ 31) $(x - 1)^2 + (y - \sqrt{3}/3)^2 = 1/3$ 32) e
33) d 34) d 35) d 36) a) $]0, +\infty[$; b) $\alpha = 1$
37) c 38) a 39) c 40) c 41) c
42) b 43) b 44) a 45) a 46) 04
47) 05 48) a 49) $y = x + \sqrt{10}$ 50) a) C(5, 3); b) x = 2

51) a 52) a 53) a 54) 11 55) e
56) a 57) EEC 58) CEE 59) CECEE 60) CECCC

61) d 62) a) $\sqrt{3}/3$; b) $\frac{2|m|\sqrt{1-3m^2}}{m^2+1}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$, $m \neq 0$

63) a) (6, 3); b) (2, 11) 64) a) $x + 2y - 5 = 0$; b) $\left(2\sqrt{3}+1, 0\right)$

65) a) (– 1, – 2); b) $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 25$; c) 25/4 66) e 67) b
68) a) (– 1, 1) e (7, 7); b) 2,5π km/h

69) a) P(– b/a, 0), Q = (0, b) e $R = \left(\frac{b}{2b-2a}, \frac{b(2b-a)}{2b-2a}\right)$; b) a = – 8, b = 4 e c = 16

70) a) (0, 2/a); b) (1/5, 3/5) e $(x - 1/5)^2 + (y - 5/3)^2 = (3/5)^2$

71) a) $\left(-4\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5\right)$; b) $y = -3x$ 72) e 73) b 74) b

75) b 76) b 77) b 78) d 79) d
80) c 81) b 82) d 83) c 84) b
85) d 86) c 87) b 88) c 89) d
90) d 91) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 92) d 93) a 94) c
95) e 96) c 97) d 98) d 99) a
100) b 101) b 102) c 103) e 104) b
105) a 106) c 107) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$ ou $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
108) $(x - 15/8)^2 + (y + 9/8)^2 = 9/64$ 109) $(x - 6)^2 + y^2 = 20$
110) $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 40$ 111) x = 8,8 112) c < – 6 ou c > 4
113) a = 4 114) $4y + 3x - 30 = 0$
115) $(x - 3,2)^2 + (y - 2,1)^2 = 16$ e $(x - 4,8)^2 + (y - 3,6)^2 = 36$ 116) $x^2 + (y - 3,5)^2 = (3/4)^2$
117) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ 118) $x^2 + y^2 + 7x - 11y + 38 = 0$

119) – 4/3 ou 4/3 120) $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$ 121) 5/4 123) $x^2 + y^2 - 18x - 16y + 120 = 0$

Capítulo 7: Cônicas

01) c 02) e 03) b 04) VFFFV 05) b
06) e 07) c 08) $x^2 - (y + 19/6)^2 = 25/16$ 09) b
10) $y = x^2 - 6x - 7$ 11) $6\sqrt{5}$ 12) c 13) b 14) a
15) e 16) b 17) b 18) $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$
19) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ou $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 20) c 21) $y = 2x - 1$ ou $y = -2x - 1$
22) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$ 23) d 24) b 25) a 26) (0, 1/4)
27) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x \pm \sqrt{2})^2$ 28) e 29) b 30) VVVFV
31) a 32) c 33) d 34) e 35) c
36) a 37) b 38) 4 39) d 40) FVVFV
41) b 42) a) 12/5; b) Q = (– 5, 0), R = (5, 0) e S = 12 43) b
44) b 45) b 46) e 47) c 48) c

49) $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ 50) a 51) d 52) c 53) b

54) b 55) c 56) a 57) d 58) d
59) a 60) b 61) c 62) b 63) a
64) b 65) d 66) e 67) b 68) a
69) e 70) d 71) c 72) s 73) c
74) b 75) d 76) b 77) c 78) c
79) c 80) d 81) c 82) a 83) a
84) c 85) d 86) a

87) a) $x'^2/4 - y'^2/9 = 1$, hipérbole; b) $a = 2$, $b = 3$ e $c = \sqrt{13}$ 88) d

89) $x^2/25 + y^2/9 = 1$ 90) (2, 0), (10, 0), $\left(4,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $\left(4,-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

91) $A\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ e $A\left(3,-2\sqrt{3}\right)$ 92) $x^2/20 + y^2/16 = 1$

93) $-x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$ 94) a) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$; b) $x = 0$ e $y = 0$

95) a) $x_v = 1$ $y_v = 4/5$; b) $(-3, -4)$; c) $3x + 4y = -50$

96) b) $x^2 + 1 = 2y$; c) D (3, 5); c) pontos do arco CD 97) $y = x - 1 \pm \sqrt{2}$

98) P: $y^2 = \pm\, 8\frac{\sqrt{35}}{63}x$ 99) $2p(\sqrt{3}+3)$ 100) a 101) d

102) a) elipse de centro em $(-3/2, 3/4)$, eixo maior $\sqrt{102}/2$ e eixo menor $\sqrt{51}/2$; b) 90°, arc tg $\sqrt{2}$ e arc tg $\sqrt{2}/2$

103) parábola com vértice V(2, 3), parâmetro p = 4, foco F(2, 1) e diretriz y = 5.

105) a) $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$; b) $a = 2$, $b = 3$ e $c = \sqrt{13}$ 106) $x^2 + (y-15)^2 = 181$

107) 5p/2 e 5p 109) b) $\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2\varepsilon'^2 + \varepsilon'^2 = 0$ 110) $\pm \text{arctg}\sqrt{6}$

111) a) (– 1, 3); b) 5/2; c) (– 9/4, 3); d) 1/4 114) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

115) $(\pm a, \pm b)$, com $a = \frac{20\sqrt{82}}{41}$ e $b = \frac{9\sqrt{41}}{41}$ 116) $x = \pm\frac{9\sqrt{35}}{40}y^2$

117) $\frac{x^2}{12} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$ 118) a) (2, 3); b) $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 3$ e $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 3$

119) 2, 1 e 120° 120) $x = \frac{80 - 36\sqrt{2}}{7}$ ou $x = \frac{80 + 36\sqrt{2}}{7}$ 122) 10 e $10\sqrt{3}$

123) a) $c_e = \frac{c}{a+b}$ e $c_h = \frac{\cos A}{|2.\cos^2 A - 1|}$; b) $c^2 = a(a+b)$ 126) ab

127) $x^2/100 + y^2/75 = 1$ 150) $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$ 151) $y^2 = -28x$

152) $y_1 y = p(x + x_1)$ 153) $5x - 13y - 16 = 0$ e $13x + 5y + 48 = 0$
154) $5x - 18y + 25 = 0$ 155) (-5; 3) e (-5; -3)
156) $5x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 55 = 0$ 157) $x^2 + 2y^2 - 6x + 24y + 31 = 0$
158) $k^2a^2 + b^2 = m^2$ 159) $3x + 2y - 10 = 0$ e $3x + 2y + 10 = 0$

160) 133) $x^2/20 + y^2/5 = 1$ 161) $x^2/17 + y^2/8 = 1$ 162) $\frac{m.n.\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + n^2}}$

163) $x + y = 0$ e $x - y - 4 = 0$ 164) $x^2 - y^2 + 5x + y - 24 = 0$ 165) (2, 4)

166) $2x - y - 1 = 0$ e $2x - y - 11 = 0$ 167) $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

168) $\rho = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta}$ 169) $\rho = \frac{64}{5 - 3.\cos\theta}$

170) $(y-2)^2 = -8(x-3)$ 171) $(x-1)^2 = 12(y-1)$ 172) 3

173) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

Capítulo 8: Lugares Geométricos

01) a 02) b 03) c 04) c 05) a

06) a 07) a) 3; b) $y = (x^2 + 3)/6$

08) a) $m_{PX} = (y + 5)/x$ e $m_{QX} = (y - 5)/x$; b) $\operatorname{tg}\theta = 10x/(x^2 + y^2 - 25)$; c) arco de circunferência de centro $(5, 0)$ e raio $5\sqrt{2}$ com abscissa positiva.

09) se $A = (0, 0)$ e $B = (3, 0)$ então LG: $(x - 1)^2 - (y^2)/3 = 1$

10) c 11) a 12) a 13) c 14) b

15) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2/b^2} = 1$ 16) d 17) b 18) a

19) c 20) a 21) c

22) circunferência tangente externa à original, com mesmo raio

23) se $A = (0, 0)$ LG: $x^2 + y^2 = rx \quad x \neq 0$

24) $2x - y - 23 = 0$ ou $2x - y + 25 = 0$

25) circunferência com mesmo centro da elipse e raio $\sqrt{a^2 + b^2}$.

26) circuncírculo de ΔABC 27) circunferência

28) $x^2 + \left[y - \left(\frac{d+p}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{d-p}{2}\right)^2$ 29) $x = (3 - y)(4y + 15)/6y$

30) $y = 7x - 6$, para $1 - \frac{1}{\sqrt{26}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{26}}$

31) a) circunferência de centro B e raio $2a - d$; b) circunferência de centro $(2d/3, 0)$ e raio $(2a - d)/3$

32) parábola 33) circunferência de centro F, médio de BC, e raio k/2

34) $y^2/b^2 + x^2/b^2 - 2y/a - 1 = 0$ 35) a) $m < -2$ ou $m > 1$; b) $y_c = 2x_c + 2$

36) a) elipse de focos A e B; b) distância focal = a, eixo principal = $aL/(a - b)$ e eixo secundário = $\frac{2}{2(a-b)}\sqrt{4L^2 - (a-b)^2}$

37) $(2x - 3)^2 + y^2 = 9$ 38) a) $x_0 > -\frac{y_0^2}{2p} + \frac{p}{2}$; b) $c = p > 0$

39) a) $(-1/m, -1/2)$; b) $y = -1/2$

40) $kx^2 + y^2 = a^2k$ (exceto $(\pm a, 0)$); $k > 1 \rightarrow$ elipse, $k = 1 \rightarrow$ círculo, $0 < k < 1 \rightarrow$ elipse, $k < 0 \rightarrow$ hipérbole

41) $k = 1 \rightarrow$ mediatriz de AB, $0 < k < 1 \rightarrow$ Círculo de Apolônio de razão k.

42) elipse de focos em $(0, 0)$ e $(2, 0)$, com eixo maior igual a 3.

43) $x = 4ay^2 + 1/4a$ 44) hipérbole 45) $y = -x^2/h + AB^2/4h$ 46) $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$

47) circunferência 48) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ 49) hipérbole 50) Hipérbole

51) hipérbole **52)** parábola de foco O e cuja diretriz é tangente à circunferência em A.
53) parábola de foco em A **54)** parábola **55)** parábola
56) parábola com vértice em A **57)** parábola **58)** parábola **59)** Parábola
60) parábola de vértice e parâmetro p/2 **61)** $x.y = c^2/4$
62) duas hipérboles conjugadas que tem para assíntotas as retas dadas.
63) hipérbole equilátera **64)** parábola de foco O e diretriz tangente ao círculo em A
65) parábola com vértice em A **66)** hipérbole
67) circunferência $(x - 5/3)^2 + (y - 8/3)^2 = 25/9$ **68)** $3x'^2 - y'^2 - 2 = 0$
69) $\theta = 60°$, $2x'^2 - y'^2 + 3 = 0$ **70)** $6x'^2 + y'^2 = 1$ **71)** $8x''^2 + 2y''^2 - 5 = 0$
72) $y'^2 - 8x' = 0$ **73)** a) $4x'^2 + y'^2 = 16$; b) $9x'^2 + 9y'^2 = 14$; c) $5y'^2 - 4x'^2 = 100$; d) $x'^2 - 5y' = 0$

74) $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$; $4x + 4y - \sqrt{2} = 0$ **75)** $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$

76) $F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ e $F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ **77)** a = 3/2, b = 2, c = 5/2, $F_1(-3/2, 2)$ e $F_2(3/2, -2)$

78) a) $3x'^2 - y'^2 - 2 = 0$; b) $6x'^2 + y'^2 - 1 = 0$ **79)** $8x''^2 + 2y''^2 - 5 = 0$
80) $4y''^2 - x''^2 = 1$
81) a) par de retas concorrentes; b) hipérbole; c) parábola; d) um ponto P(-1,-5); e) elipse; f) par de retas paralelas; g) conjunto vazio
82) $4x^2 - 17xy - 10y^2 - 24x + 37y + 10 = 0$ **83)** (1, 2)
84) $2x + y = 0$ e $3x - y - 5 = 0$

Marcelo Rufino de Oliveira nasceu em 1976 em Manaus-AM. Ingressou em 1994 no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), onde graduou-se em Eng. Mecânica- Aeronáutica em 1999, porém nunca exerceu a engenharia. Desde então trabalha coordenando e lecionando matemática e física em turmas preparatórias para concursos militares de níveis fundamental e médio em Belém. Em 2000 assumiu a coordenação regional da Olimpíada Brasileira de Matemática no estado do Pará, sendo também responsável pela organização da Olimpíada Paraense de Matemática. Em 2002 participou da banca corretora da Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em Fortaleza-CE.

COLEÇÃO
ELEMENTOS DA
MATEMÁTICA